

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

64. Band, Heft 6/10

16. Mai 1956

S. 241—480

## Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

**Kuratowski, K.:** Die wissenschaftliche Tätigkeit des Mathematischen Instituts der Polnischen Akademie der Wissenschaften. *Uspechi mat. Nauk* 10, Nr. 3 (65), 217—221 (1955) [Russisch].

● **Cossa, Paul:** *La cybernétique „Du cerveau humain aux cerveaux artificiels“*. (Evolution des Sciences No. 4). Paris: Masson et Cie. 1955. 98 p. 13 Fig. Fr. 525,—.

● **Cartwright, Mary L.:** *The Mathematical Mind*. London, New York, Toronto: Geoffrey Cumberlege, Oxford University Press 1955. 27 p.

**Bouligand, Georges:** Quelques types de situations dans la recherche mathématique. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 24, 53—69 (1955).

Verf. erhofft sich von einer Methodologie der mathematischen Forschung, wie sie auch von G. Polya gefördert wird, Hilfe bei den immer schwieriger werdenden Aufgaben, vor welche die Jünger der mathematischen Wissenschaften gestellt sind. Er schildert, bekannte Forscher zum Beispiel nehmend, typische Reaktionsweisen im Verlauf der Forscherarbeit, wie Einordnung schon vorhandener Ergebnisse in übergeordnete Begriffe, Ausweitung eines ursprünglich eng begrenzten Problems, Anpassung der Hypothesen an die Ursachen (Aufspaltung der Begriffe), Zusammenfassung von Problemen zu einer Problemgruppe, Stellungnahme gegenüber Vermutungen und Analogien (hier wird allerdings ein Warnungsbeispiel vorgeführt). Inwiefern andererseits das Studium eines Problems bei speziellen Daten seine eigenen Probleme hervorbringt, wird an zwei Beispielen eingehend dargetan. Während es möglich ist, eine bestimmte konvexe Fläche durch eine Folge von Stützebenen konstruktiv vollständig zu fixieren, stößt eine konstruktive Beschreibung einer Fläche negativer Krümmung auf große Schwierigkeiten; ähnliche Probleme hat man vor sich, wenn man eine stetig differenzierbare eindeutige Selbstabbildung der Ebene vollständig konstruktiv definieren will.

G. Aumann.

● **Young, J. W. A. (edited by):** *Monographs on topics of modern mathematics*. New York: Dover Publications 1955. XVI, 416 p. \$ 1,90.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

● **Perelman, Ja. I.:** *Unterhaltungsgeometrie*. 9. Aufl. unter Redaktion und mit Ergänzungen von B. A. Kordemskij. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1955. 303 S. R. 4,65 [Russisch].

● **Baker, C. C. T.:** *Practical mathematics for students of science and engineering. I*. London: English Universities Press 1955. VII, 352 p.

**Denbow, C. H.:** *Postulates and mathematics*. *Amer. math. Monthly* 62, 233—236 (1955).

**Lorent, Henri:** Sur l'„indéfiniment“ mathématique. *Enseignement math.* 40, 47—56 (1955).

Das Anliegen des Verf. ist in erster Linie pädagogisch. Er will mathematisch interessierten jungen Lesern den Begriff des Unbegrenzten an Beispielen aus der Arithmetik, aus der Geometrie und aus der Infinitesimalmathematik klar machen und auf diesem Wege zu den mengentheoretischen Grundtatsachen hinführen.

J. E. Hofmann.

## Geschichte.

**Gillings, R. J.:** *The oriental influence on Greek mathematics*. *Math. Gaz.* 39, 187—190 (1955).

Vgl. Gillings, *Australian J. Sci.* 16, 54 (1953). — Es handelt sich um einen



neuen Erklärungsversuch für den bekannten Fehler in der babylonischen Tabelle Pythagoreischer Zahlen (Plimpton 322). Verf. nimmt mit O. Neugebauer an, daß die Zahlen nach der Euklidischen Formel  $(2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2$  gebildet wurden. Für das zweite Zahlentripel der Tafel hat man dann (in sexagesimaler Schreibweise)  $p = 1,4$  und  $q = 27$ . Der Schreiber hat nun nach der Theorie des Verf. die Diagonale nicht direkt nach der Formel  $d = p^2 + q^2$  berechnet, sondern auf dem Umweg  $d = (p + q)^2 - 2qp$ . Den Wert  $1,31^2 = 2,18,1$  konnte er unmittelbar einer Quadrattafel entnehmen. Bei dem zweiten Glied beging er aber zwei Fehler: Das eine Teilprodukt  $2 \cdot 27 \cdot 1,0$  wurde nicht subtrahiert, sondern addiert, und das andere Teilprodukt  $54 \cdot 4$  wurde überhaupt vergessen. So kommt man tatsächlich auf die Zahl 3, 12, 1, die statt 1, 20, 25 in der Tafel steht. — Wenn auch zur Zeit keine bessere Erklärung des Fehlers zu existieren scheint, so dürfte doch das letzte Wort über die Sache noch nicht gesprochen sein. *H. I. Hermelink.*

**Carmody, Francis J.:** *Notes on the astronomical works of Thibit b. Qurra.* Isis 46, 235—242 (1955).

● **Newton, Isaac:** *Traité d'optique. Reproduction en fac-similé de l'édition de 1722.* (Les Maîtres de la pensée scientifique.) Paris: Gauthier-Villars 1955. XXX, 496 p.

Es handelt sich um den faksimilierten Wiederdruck der von P. Coste (1668—1747) besorgten französischen Ausgabe nach der 2. englischen von 1771. Vorangestellt ist eine von M. Solovine stammende Einleitung mit biographischen Angaben über Newton und Hinweisen auf die Bedeutung der Optik. *J. E. Hofmann.*

**Conte, Luigi:** *Il Marchese de l'Hospital senza gloria.* Archimede 7, 132—135, 228—230 (1955).

Verf. berichtet eingehend über Einzelheiten aus der von O. Spiess besorgten Ausgabe des Briefwechsels zwischen Joh. Bernoulli und l'Hospital (dies. Zbl. 64, 2), aus denen deutlich wird, wie stark l'Hospital in seinem wissenschaftlichen Schaffen von seinem jugendlichen Lehrmeister abhängt. *J. E. Hofmann.*

**Markušević, A. I.:** *Der Beitrag von Ju. V. Sochockij zur allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen.* Istoriko-mat. Issledovanija 3, 399—406 (1950) [Russisch].

Sochockij (1842—1927) hat in seiner Magisterarbeit (1868) gleichzeitig mit Casorati den heute als „Casorati-Weierstraß“ bezeichneten klassischen Satz und wesentliche Beiträge zur Kettenbruchtheorie gegeben. Seine Doktorarbeit (1873) enthält die Grundlagen zur Theorie des Cauchyintegrals, die 1919 von Privalov in dessen vielgenannter Saratower Diss. zu moderner Gestalt entwickelt wurde. S. darf in die Reihe der guten Funktionentheoretiker seiner Zeit gestellt werden — leider blieb ihm wesentliche Auswirkung in die mathematische Welt versagt, weil er russisch publizierte, so daß seine Ergebnisse vergraben blieben, bis sie jetzt hervorgeholt wurden. — Außerdem hat er über elliptische Funktionen gearbeitet, und zu ihrer Zeit (80-er Jahre) in Rußland hochgeschätzte Bücher über Algebra und Zahlentheorie geschrieben. *E. Ullrich.*

● **Tóth, Imre:** *Johann Bolyai. Leben und Werk des großen Mathematikers.* (Sammelreihe der Gesellschaft zur Verbreitung von Wissenschaft und Kultur.) Bukarest: Technischer Verlag 1955. 53 S. Lei 0,75.

Eichler, Martin: *Heinrich Brandt †.* Math. Nachr. 13, 321—326 (1955).  
Wiss. Würdigung und Schriftenverzeichnis.

**Otradnyh, F. P.:** *V. Ja. Bunjakovskij, Professor an der Universität zu Petersburg.* (Zum 150. Geburtstag.) Vestnik Leningradsk. Univ. 10, Nr. 5 (Ser. mat. fiz. chim. Nr. 2) 49—54 (1955) [Russisch].

**Girkmann, K.:** *Professor Dr. Karl Federhofer 70 Jahre.* Österreich. Ingenieur-Arch. 9, 73—78 (1955).

Wiss. Würdigung und Schriftenverzeichnis.



Keller, Ott-Heinrich und Wolfgang Engel: Heinrich Wilhelm Ewald Jung. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg 4, 417—422 (1955).

Wiss. Würdigung und Schriftenverzeichnis.

Künzi, Hans P.: Zum 60. Geburtstag von Rolf Nevanlinna. Elemente Math. 10, 97—100 (1955).

● In memoria di Giuseppe Peano. Cuneo: Presso il Liceo Scientifico Statale 1955. 115 p.

Cath, P. G.: Jules Henri Poincaré. (Nancy 1854— Paris 1912). Euclides, Groningen 30, 265—275 (1955) [Holländisch].

Tenca, Luigi: Giovanni Wallis e gli italiani. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 412—418 (1955).

Verf. gibt italienische Auszüge aus den Briefen von Wallis an den Großherzog Cosimo III. von Toscana (19. XI. 1670, Eintreten für Torricelli gegen Pascal im Zyklidenstreit, in dessen Verlauf Wallis von Pascal abschätzig behandelt worden war) und an Viviani (25. II. 1696, anerkennende Worte über das Florentiner Problem). Er berichtet ferner über Grandis freundschaftliches Eintreten für Wallis' Verfahren der unvollständigen Induktion (als Führungsmethode). J. E. Hofmann.

## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Köthe, G.: Das Bild der heutigen Mathematik. Experientia 11, 249—254 (1955).

Die Entwicklung der Grundlagenforschung; die Neuordnung der Mathematik durch die axiomatische Einstellung. H. Freudenthal.

● Robinson, Abraham: Théorie métamathématique des idéaux. (Collection de Logique Mathématique Sér. A, Nr. VIII.) Paris: Gauthier-Villars 1955. 181 p. 2.400fr.

In dem vorliegenden Buch, das die Untersuchungen des Verf. „Über die Metamathematik der Algebra“ (dies. Zbl. 43, 247) fortsetzt, haben wir es nicht mit Metamathematik (Mm.) im Sinne von Hilbert, sondern mit einer von Tarski und dem Verf. begründeten neuartigen Anwendung der modernen Logik auf die Mathematik zu tun. Gegenstand dieser Mm. sind axiomatische Theorien, deren Axiomensysteme im elementaren Logikkalkül (mit Quantoren) ausdrückbar sind. Der Gödelsche Vollständigkeitssatz sagt aus, daß eine Menge von Aussagen einer solchen Theorie stets ein Modell hat, wenn aus keiner endlichen Teilmenge ein Widerspruch abzuleiten ist. Dieser Satz hat ein Analogon in der Theorie der algebraischen Gleichungen: eine Menge von algebraischen Gleichungen (mit Koeffizienten aus einem Körper  $K$ ) hat stets eine Lösung in einem Oberkörper von  $K$ , wenn aus keiner endlichen Teilmenge die 1 linear zu kombinieren ist. Verf. stellt dar, wie dieses und viele andere Ergebnisse über algebraische Mannigfaltigkeiten als Spezialisierungen metamathematischer Sätze erhalten werden können. Manche neuen Resultate, von denen nicht bekannt ist, wie sie mit den bisherigen Methoden zu erhalten sind, ergeben sich aus der neuartigen Betrachtungsweise. Es handelt sich also um eine Bereicherung der axiomatischen Methode, die durch das Ineinandergreifen von Algebra und moderner Logik besonders reizvoll ist. Diese neue Mm. unterscheidet sich von der Hilbertschen auch dadurch, daß sie sich methodisch nicht auf das Finite beschränkt, sondern die naiv-mengentheoretischen Begriffsbildungen benutzt — wozu sie, da sie ja keine Grundlagenforschung sein will, natürlich berechtigt ist. In den ersten fünf Kapiteln werden nach vorbereitenden mathematischen Betrachtungen über topologische Räume und geordnete Mengen ausführlich die Grundlagen der neuen Mm. dargestellt: Tarskisysteme, der Logikkalkül mit dem Gödelschen Satz und algebraische Strukturen (das sind Modelle elementarer Axiomensysteme mit einer Gleichheitsrelation). Die Darstellung enthält hier gegenüber dem früheren Buch viele Neuerungen. In den nächsten beiden Kapiteln wird die Theorie der „Mannig-



faltigkeiten von Strukturen“ entwickelt, die die übliche Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten verallgemeinert: es besteht ein Verbandsisomorphismus zwischen den Idealen von Aussagen und den Mannigfaltigkeiten von Strukturen. Als Spezialisierungen der Theorie werden Sätze über Ringe, Gruppen, Halbgruppen, Polynomringe und Ringe mit Derivation abgeleitet. Das letzte Kapitel behandelt die besonders interessanten „théorèmes de transport“. Beispiel: Eine elementare Aussage der Körpertheorie, die für alle Körper der Charakteristik 0 gilt, gilt auch für alle Körper der Charakteristik  $p > p_0$  (für geeignetes  $p_0$ ). Die Fülle der Beispiele, die das Buch bringt, zeigt deutlich, wie sehr der Algebra die Einbeziehung dieser Mm. in ihre Forschungsmethoden empfohlen werden kann. *P. Lorenzen.*

**Postley, J. A.:** A method for the evaluation of a system of Boolean algebraic equations. *Math. Tables Aids Comput.* 9, 5—8 (1955).

Es handelt sich um Gleichungssysteme der Form  $R_t^k = f_k(Q_t^1, \dots, Q_t^n)$ ,  $S_t^k = g_k(Q_t^1, \dots, Q_t^n)$ ,  $Q_{t+1}^k = \Phi(Q_t^k, R_t^k, S_t^k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , so daß die Werte  $Q_t^k$  der Variablen  $Q^k$  zur Zeit  $t$  die  $Q_{t+1}^k$  bestimmen; der Bereich der Argumente und Werte besteht aus 1 (wahr) und 0 (falsch); alle Ausdrücke sind in Normalform [fortlaufende Disjunktion von Konjunktionen (= Gliedern) bejahter oder verneinter Argumente]. Die Tatsache, daß eine Disjunktion dann und nur dann wahr ist, wenn wenigstens ein Glied, d. h. alle Faktoren einer Konjunktion es sind, wird hier in naheliegender Weise mittels gelochter Karten mit 1- und 0-Reihe und  $n$  Kolonnen ausgewertet: Jedes Glied der Gleichungen für  $R^k$  und  $S^k$  hat eine Karte, die dann und nur dann in  $(1, k)$ , bzw. in  $(0, k)$ , gelocht ist, wenn  $Q^k$ , bzw.  $\bar{Q}^k$  (non- $Q^k$ ), in diesem Glied Faktor ist („Gleichungskarten“); ebenso hat man für  $Q^k = 1$  und  $Q^k = 0$  Karten vorrätig, die überall außer in  $(0, k)$ , bzw.  $(1, k)$ , gelocht sind („Wertekarten“), aus denen man zunächst den „ $t$ -Satz“ von Werten  $Q_t^k$  entnimmt. Man vergleicht diesen  $t$ -Satz durch homologes Aufeinanderlegen mit je einer Gleichungskarte. Der Wert des entsprechenden Gliedes ist dann und nur dann 1, wenn kein Loch der Gleichungskarte durch den  $t$ -Satz verstellt wird. Man vergleicht also, bis der  $R_t^k$ - und  $S_t^k$ -Wert entschieden sind, bestimmt dann aus  $\Phi Q_{t+1}^k$  und so den  $(t+1)$ -Satz von Wertekarten; etc. Das Verfahren ist ganz mechanisierbar. (Bem. des. Ref.: Die Methode ist eine dem Problem entsprechend besonders vereinfachte Version einer Rechenmaschine mit gelochten Karten.) *D. Tamari.*

**Shimony, Abner:** Coherence and the axioms of confirmation. *J. symbolic Logic* 20, 1—28 (1955).

The notation  $C(h/e) = r$  is used to mean that  $r$  is the degree of confirmation of the proposition  $h$  on the basis of the evidence  $e$ . The notation  $SC(h/e, h'/e')$  is used to mean that the confirmation of  $h$  on evidence  $e$  is less than or equal to the confirmation of  $h'$  on the evidence  $e'$ . Notation of the Lewis system of strict implication is also employed. Shimony considers the following axioms: (1)  $0 \leq C(h/e) \leq 1$ . (2) If  $e$  strictly implies  $h$ , then  $C(h/e) = 1$ . (3) If  $e$  strictly implies  $\sim(h \& h')$ , then  $C((h \& h')/e) = C(h/e) + C(h'/e)$ . (4)  $C((h \& h')/e) = C(h/e) C(h'/(h \& e))$  and  $C((h \& h')/e) = C(h'/e) C(h/(h' \& e))$ . In order to justify the above axioms he follows F. P. Ramsey and B. DeFinetti in showing that every „coherent“ set of confirmation evaluations must satisfy these axioms. A set of confirmation evaluations is said to be „coherent“ if there is no set of stakes based on these evaluations and such that a person is bound to lose on betting for these stakes. Shimony's concept of coherence is slightly stronger than that of Ramsey and DeFinetti and may be described as follows: Suppose that  $S$  is a stake and that  $0 \leq r \leq 1$ . We say that  $X$  believes  $h$  on evidence  $e$  by amount  $r$  if  $X$  is willing to lose  $rS$  on condition that  $h$  is false (given  $e$ ) provided that he will win  $(r-1)S$  on condition that  $h$  is true (given  $e$ ). Now if  $X$  believes  $h_1, \dots, h_n$  respectively on evidence  $e_1, \dots, e_n$  by



respective amounts  $r_1, \dots, r_n$ , and if  $X$  then cannot win regardless of the truth or falsity of the  $h_i$  and the  $e_i$ , and may even lose, we say that these  $n$  beliefs constitute an incoherent set of beliefs. (Ramsey and De Finetti would omit the phrase „and may even lose“.) Shimony's Principle of Coherence asserts that the confirmation function  $C$  must be such that if  $X$  believes  $h_1, \dots, h_n$  respectively on evidence  $e_1, \dots, e_n$  by respective amounts  $C(h_1/e_1), \dots, C(h_n/e_n)$ , then these beliefs are coherent. Shimony presents a similar theory concerning the comparative confirmation relation  $SC$  and a relation of comparative degree of belief. The advantage of the latter theory is of course its non-metrical character. Here Koopman's axioms for  $SC$  take the place of (1) — (4). In addition to the Principle of Coherence, a Closure Rule is introduced asserting that if a proposition  $Q$  and the proposition that  $C$  is defined for  $(h, e)$  together imply  $C(h/e) = p$ , then  $Q$  implies that  $C$  is defined for  $(h, e)$ . A similar rule is introduced for  $SC$ . It is held that both these firms of the Closure Rule are intuitively seen to be valid. Shimony derives axioms (1) — (4) from the conjunction of the Principle of Coherence and the Closure Rule. He also derives a strengthened form of (2) in which the conclusion becomes a sufficient as well as a necessary condition for the hypothesis. Finally, he derives Koopman's axiom for comparative confirmation from the same two principles. He points out that Koopman's axioms, when augmented by an „Axiom of  $n$ -Scales“ and an „Axiom of Comparability“ make possible a definition of  $C$  in terms of  $SC$  satisfying (1) — (4).  
F. B. Fitch.

**Wang, Hao:** Undecidable sentences generated by semantic paradoxes. *J. symbolic Logic* 20, 31—43 (1955).

A formalized set theory  $S$  of the usual sort is considered (but lacking an axiom of infinity), and also a formalized set theory  $S'$  obtained by adding the Hilbert  $\varepsilon$ -symbol to  $S$ . Use is made of the result of Bernays that if to the Hilbert-Bernays system  $Z_\mu$  of elementary number theory we add the number theoretical formulation of the assertion that  $S$  is consistent, then in the resulting system we can prove arithmetic translations of all theorems of  $S$ .  $S'$  is said „to have an  $\omega$ -consistent model“ if there are two classes  $T$  and  $F$  such that:  $\neg \mathfrak{A}$  is in  $T$  if and only if  $\mathfrak{A}$  is in  $F$ ;  $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$  is in  $T$  if and only if  $\mathfrak{A}$  and  $\mathfrak{B}$  are in  $T$ ;  $(\exists x) \mathfrak{A}(x)$  is in  $T$  if, for some term  $t$  of  $S'$  which contains no free variables,  $\mathfrak{A}(t)$  is in  $T$ ; for every formula  $\mathfrak{A}(a)$  of  $Z$  with the sole free variable  $a$ , the translation of  $(\exists m) \rightarrow \mathfrak{A}(m)$  into  $S'$  is in  $T$  only if some of the translations into  $S'$  of  $\mathfrak{A}(0), \mathfrak{A}(1), \mathfrak{A}(2), \dots$ , are not in  $T$ ;  $\mathfrak{A}$  is in  $F$  if and only if it is not in  $T$ ; all theorems of  $S'$  are in  $T$ . The subsystem of  $S'$  which is a translation of  $Z_\mu$  into  $S'$  is called  $S_0$ . The result of translating a formula or term from  $S'$  into  $Z_\mu$  and then translating this result into  $S_0$  is called the Bernays model of the formula or term. In order to establish a form of the Epimenides paradox in  $S'$  two functions  $f$  and  $\bar{s}$  and a predicate  $W$  are introduced. The function  $f$  has the property that  $f(n) = m$  is provable in  $S'$  if  $m$  is the Bernays model of  $n$ , where  $n$  and  $m$  are numerals in the notation of  $S_0$ . A method for defining  $f$  is given. The function  $\bar{s}$  is Gödel's substitution function, so that  $\bar{s}(n, m)$  is the Gödel number of the formula that results from replacing the free variable „ $x$ “ by the numeral denoting  $m$  in the formula having Gödel number  $n$ . The predicate  $W$  is such that for every sentence  $\mathfrak{A}$  of  $S_0$ , if  $\bar{s}$  is the Gödel number of  $\mathfrak{A}$ , we can prove  $[W(\bar{s}) \equiv \mathfrak{A}]$  in  $S'$ . The existence of this predicate follows from the assumption that  $S'$  has a  $\omega$ -consistent model, and it is equivalent to the assumption that truth for  $S_0$  is definable in  $S'$  in the sense of Tarski. Let  $W'$  be the Bernays model of  $W$  and let  $p$  be the Gödel number of the formula  $\neg W'(f(\bar{s}(x, x)))$ . Then  $\bar{s}(p, p)$  is the Gödel number of  $\neg W'(f(\bar{s}(p, p)))$ , so the latter formula is in effect the Bernays transform of a formula, namely  $\neg W(\bar{s}(p, p))$ , that asserts it to be false, and in  $S'$  the equivalence  $[W(\bar{s}(p, p)) \equiv \neg W'(f(\bar{s}(p, p)))]$  is provable. If  $f$ ,  $\bar{s}$ , and  $W$  are definable in  $S'$  and if  $S'$  has an  $\omega$ -consistent model, it is then easy to show that  $W(\bar{s}(p, p))$  is undecidable in  $S'$ .



In a similar way the Richard paradox is used to find an undecidable formula in  $S'$ .  
These arguments are also valid for the system  $S$ . F. B. Fitch.

**Stanley, Robert L.: Simplified foundations for mathematical logic.** J. symbolic Logic 20, 123—139 (1955).

Die Einfachheit des angegebenen Systems SF besteht darin, daß nur eine Grundverknüpfung und nur drei Schlußregeln verwendet werden. Der durch die Grundverknüpfung gebildete Term  $(\zeta/\alpha/\eta)$  ist zu interpretieren als „Menge der  $\alpha$ , für die sich  $\zeta, \eta$  ausschließen“. „Terme“ sind Variablen und solche Ausdrücke, die aus bereits gebildeten Termen  $\zeta, \eta$  und einer Variablen  $\alpha$  mittels der Grundverknüpfung zusammengesetzt sind. Tritt  $\alpha$  nicht in  $\zeta, \eta$  auf, so wird  $(\zeta/\eta)$  statt  $(\zeta/\alpha/\eta)$  geschrieben und als „Formel“ bezeichnet. Die logischen und mengentheoretischen Operationen werden mittels der Grundverknüpfung definiert. Die Schlußregeln schaffen folgende Übergänge: 1. Ein Formelglied  $(\zeta/\eta)$  geht in eine Disjunktion  $\sim (\theta e \zeta) \cdot \vee \cdot \sim (\theta e \eta)$  über, wo  $\theta$  ein geschichteter Term und  $\theta e \zeta$  eine Formel ist, die aus dem Term  $\zeta$  im wesentlichen durch eine Substitution entsteht. 2. Ein negiertes Formelglied  $\sim (\zeta/\eta)$  geht in eine Konjunktion  $\alpha e \zeta \cdot \alpha e \eta$  über, wo  $\alpha$  eine neue Variable ist. 3. Eine Formel  $\varphi$  geht in  $\varphi \cdot (\psi \vee \sim \psi)$  über. — Eine Formel  $\varphi$  gilt als „Satz“, wenn sich aus  $\sim \varphi$  mittels der Schlußregeln ein Widerspruch herleiten läßt. Es wird gezeigt, daß sich in SF alle Sätze des Systems NF (New foundations) von Quine (dies. Zbl. 16, 193) gewinnen lassen und daß SF widerspruchsfrei ist, sofern NF widerspruchsfrei ist. — Verf. betont, daß sich die Beweistechnik von SF besonders im Bereiche der gewöhnlichen Logik durch größte Einfachheit und Leichtigkeit auszeichnet. In diesem Bereiche erscheinen dem Ref. aber die nach Gentzen gebildeten deduktiven Systeme für metalogische Untersuchungen durchsichtiger und handlicher. Für den weiten Bereich, der durch das System SF gegeben wird, ist jedoch die formale Einfachheit und Geschlossenheit dieses Systems beachtenswert. Allerdings ist nicht zu verkennen, daß die Schlußregeln auf Grund der definitorisch eingeführten Verknüpfungen sehr komplexe Umformungen darstellen. Hiermit dürften einem absoluten Widerspruchsfreiheitsbeweis die größten Schwierigkeiten entgegenstehen. Kurt Schütte.

## Algebra und Zahlentheorie.

### Lineare Algebra. Polynome. Formen:

● Neiss, F.: **Determinanten und Matrizen.** 4. verb. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer Verlag 1955. VII, 111 S. 1 Abb. DM 6,—.

Carlitz, L.: **A special determinant.** Amer. math. Monthly 62, 242—243 (1955).

Mit der Matrix  $(a_{rs}), a_{1s} = s, a_{rs} = s^{2r-2}$  für  $r > 1$ , berechnet Verf. die zugehörige  $n$ -reihige Determinante und findet sie als  $1! 3! 5! \cdots (2n-1)! / \{(n-1)! \cdot (2n-1)\}$ . L. Holzer.

Cherubino, Salvatore: **Permutabilità e logaritmi delle matrici.** Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 14, 221—238 (1954).

Jede komplexe  $n \times n$ -Matrix  $A$  läßt sich eindeutig in  $A = A_D + A_J$  zerlegen, worin  $A_D$  und  $A_J$  miteinander vertauschbar sind und  $A_D$  einer Diagonalmatrix ähnlich,  $A_J^n = 0$  ist. (Verf. nennt  $A_D$  parte principale,  $A_J$  parte complementare von  $A$ .) Man kann  $A_D$  gewinnen, indem man  $A$  auf die Jordansche Normalform transformiert, die außerhalb der Diagonale stehenden Elemente durch Nullen ersetzt und zurücktransformiert. Sind  $A$  und  $B$  vertauschbare  $n \times n$ -Matrizen, so sind  $A_D, A_J, B_D, B_J$  paarweise vertauschbar, und es ist  $(AB)_D = A_D B_D$ ,  $(cA)_D = cA_D$ ,  $(A+B)_D = A_D + B_D$ . Verf. benutzt diese Bemerkungen, um für nichtsinguläre Matrizen einen Hauptwert des Logarithmus wie folgt zu definieren:  $\lg A = \lg A_D + \lg(E + A_D^{-1} A_J)$ . Darin ist  $E$  die Einheitsmatrix;  $\lg A_D$  ist durch



Transformation von  $A_D$  auf Diagonalform, Ersetzung der Eigenwerte  $\alpha_v$  durch die Hauptlogarithmen  $\lg \alpha_v$  und Zurücktransformieren erklärt, dagegen  $\lg (E + A_D^{-1} A_J)$  mittels der Potenzreihe für  $\lg (1 + z)$ , die hier wegen  $(A_D^{-1} A_J)^n = 0$  abbricht. Ob diese Definition des Hauptlogarithmus von  $A$  mit der üblichen (vgl. etwa H. Richter, dies. Zbl. 40, 5) gegebenen übereinstimmt, wird nicht untersucht. Unrichtig (schon für  $n = 1$ ) ist die zum Schluß aufgestellte Behauptung, für die Hauptlogarithmen vertauschbarer Matrizen  $A, B$  gelte stets  $\lg AB = \lg A + \lg B$ .

H. Wielandt.

Cantoni, Lionello: Serie di potenze e logaritmo di una matrice. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 376—381 (1955).

Für eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  und eine Potenzreihe  $\mathfrak{P}$  mit geeigneten Konvergenzeigenschaften bestimmt Verf. die Elementarteiler von  $\mathfrak{P}(A)$  aus denjenigen von  $A$  mittels der Werte  $\mathfrak{P}(\alpha_v), \mathfrak{P}'(\alpha_v), \dots$  ( $\alpha_v$  sind die Eigenwerte von  $A$ ). Er zeigt ferner, daß der von Cherubino erklärte Hauptlogarithmus von  $A$  (vgl. vorsteh. Referat) sich als Polynom in  $A$  darstellen läßt.

H. Wielandt.

Bruijn, N. G. de and G. Szekeres: On some exponential and polar representations of matrices. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 3, 20—32 (1955).

Für nichtsinguläre komplexe  $n \times n$ -Matrizen  $A$  untersuchen die Verf. (1) den Haupt-Logarithmus  $\text{Log } A$ , (2) die Haupt-Quadratwurzel  $A^Q$ , (3) Zerlegungen von  $A$  in Produkte von zwei Faktoren besonderer Art. Die bisher bekannten Ergebnisse werden einheitlich abgeleitet und vervollständigt. (1)  $\text{Log } A$  wird durch ein Cauchy-Integral erklärt; das Verhalten beim Übergang von  $A$  zur Transponierten  $A^T$ , zur konjugiert Komplexen  $A^C$  oder zur Inversen  $A^I$  wird festgestellt. Daraus ergibt sich der Zusammenhang der Invarianzeigenschaften von  $A$  mit denen von  $\text{Log } A$ ; so sind die zirkulären  $A$  (definiert durch  $A^{CI} = A$ ) durch rein imaginäre Hauptlogarithmen gekennzeichnet. (2)  $A^Q = \exp(\frac{1}{2} \text{Log } A)$  ist die einzige Lösung der Gleichung  $X^2 = A$ , deren Eigenwerte sämtlich im Winkelraum  $-\pi/2 < \arg z \leq \pi/2$  liegen (die Verf. nennen Matrizen mit solchen Eigenwerten positiv definit, auch im nicht-hermiteschen Fall). Die Operation  $Q$  ist mit  $T$  und  $CI$  vertauschbar, und wenn  $A$  keinen negativen Eigenwert hat, auch mit  $C$  und  $I$  einzeln. (3) Mit Hilfe von  $A^Q$  führt eine bekannte Schlußweise von Frobenius zu den folgenden Ergebnissen: Es gibt stets genau je eine Zerlegung  $A = KB$ , in der  $K$  positiv definit ist und außerdem (a)  $K$  symmetrisch und  $B$  orthogonal, oder (b)  $K$  hermitesch und  $B$  unitär, oder (c)  $K$  zirkulär und  $B$  reell; gehört überdies  $A$  der orthogonalen Gruppe an, so auch  $K$  und  $B$ ; das Entsprechende gilt für die reelle und die unitäre Gruppe; ist  $A$  eine Dreiecksmatrix, so sind im Fall (c) auch  $K$  und  $B$  Dreiecksmatrizen. Eine andere Art von Produktzerlegungen liefert der folgende Satz: Setzt man  $A^p = \exp(\frac{1}{2} \text{Log } A - \frac{1}{2} \text{Log } A^I)$  und  $A = A^p D$ , so ist  $A = DA^p$ ,  $D = D^I$ , und  $A^p$  besitzt keinen negativen Eigenwert; ist überdies  $P$  eine beliebige Operation der Form  $P = T^\alpha C^\beta I^\gamma$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1$ ), so ist  $\varphi$  mit  $P$  vertauschbar, und aus  $A = A^p$  folgt  $(A^p)^P = A^p$ ,  $D^P = D$ .

H. Wielandt.

Wielandt, Helmut: An extremum property of sums of eigenvalues. Proc. Amer. math. Soc. 6, 106—110 (1955).

Eine Maximum-Minimum-Charakterisierung der Teilsumme der Eigenwerte einer Hermiteschen Matrix wird angegeben, die eine Verallgemeinerung eines Satzes von Ky Fan (dies. Zbl. 41, 6) ist. Als eine Anwendung folgt daraus eine Ungleichung zwischen den Eigenwerten zweier Hermitescher Matrizen und der ihrer Summe.

K. Shoda.

Koteljanskij, D. M.: Über die Lage der Punkte des Spektrums einer Matrix. Ukrain. mat. Žurn. 7, 131—133 (1955) [Russisch].

Let  $A = (a_{jk})$  be a matrix of order  $n$  with complex elements. Let  $A^+$  be the matrix obtained from  $A$  by replacing the elements of  $A$  by its absolute values.



Let  $M$  be the maximum of the absolute values of the characteristic roots of  $A^+$ , then all the characteristic roots of  $A$  lie in the  $n$  circles with centers  $a_{ii}$  and with radii  $M - |a_{ii}|$ . L. K. Hua.

**Marcus, M. D.:** A remark on a norm inequality for square matrices. Proc. Amer. math. Soc. 6, 117–119 (1955).

Let  $A$  be an  $n \times n$  matrix; let  $g(z)$  be a polynomial or infinite series with circle of convergence which contains all the characteristic roots  $\lambda_j$  of  $A = (a_{ij})$  in its interior. Set  $\|A\|^2 = \text{tr}(AA^*) = \sum \sum |a_{rs}|^2$ . Then for  $c$  independent of  $g$ , depending only on  $A$ ,  $\|g(A)\|^2$  is not less than  $\sum |g(\lambda_j)|^2$ , and is not greater than

$$c^2 \sum_j \sum_{s=0}^{k_j-1} \frac{k_j - s}{(s!)^2} |g^{(s)}(\lambda_j)|^2,$$

where  $k_j$  is the multiplicity of  $\lambda_j$ , provided  $A$  is not nilpotent. The lower bound is obtained by transforming  $g(A)$  to triangular form; the upper bound is obtained by using the Jordan canonical form. The case  $g(z) = z^p$  was studied by Gautschi (this Zbl. 50, 251) and his result is shown to be a special case of this one. When  $g(z)$  is  $\exp tz$ , the stability criteria for the differential system  $\dot{x} = Ax$  in terms of the real parts of the characteristic roots of  $A$  flow out of the inequalities for  $\|g(A)\|$ .

J. L. Brenner.

**Goddard, L. S.:** On the characteristic function of a matrix product. Proc. Amer. math. Soc. 6, 296–298 (1955).

Let  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , be  $n \times n$  matrices over a field  $F$  with characteristic equations  $a_{0i}(x^3) + x a_{1i}(x^3) + x^2 a_{2i}(x^3)$  where  $a_{ji}(x)$  is a polynomial over  $F$ . Define  $H = A_1 + A_2 + A_3$ ,  $K = A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3$ . The author shows that if  $H = K = 0$ , or  $xH - K$  is of rank one for any  $x$  indeterminate over  $F$ , then the characteristic polynomial of  $A_1 A_2 A_3$  is

$$a_{01} a_{02} a_{03} + x \sum a_{1i} a_{0j} a_{2k} + x^2 a_{21} a_{22} a_{23}$$

where  $a_{rs} = a_{rs}(x)$  and the summation is taken over all permutations  $i, j, k$  of 1, 2, 3. This extends a result of Roth (this Zbl. 55, 9). F. W. Ponting.

**Huff, G. B.:** On quasi-idempotent matrices. Amer. math. Monthly 62, 334–339 (1955).

Let  $A$  be a square matrix over the complex field. The author defines  $A$  to be quasi-idempotent if there is a polynomial matrix  $F(x) = B + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n$  such that  $A^r = F(r)$  for all positive integers  $r$ . It is shown that  $A$  is quasi-idempotent if, and only if,  $A(A - E)^k = 0$  for some positive integer  $k$ ,  $E$  being the unit matrix. In this case  $F(x)$  is uniquely defined by  $A$ ;  $B^2 = B$ ;  $AB = BA = A$  and

$$F(x) = B + B_1 x + B_1^2 x^2/2! + \dots + B_1^n x^n/n!$$

where  $A(A - E)^n \neq 0$  and  $A(A - E)^{n+1} = 0$ . The author defines  $\ln A = B_1$ ,  $\exp_B B_1 = F(1) (= A)$  and shows that  $A = \exp_B(\ln A)$  and  $\ln(\exp_B B_1) = B_1$ .

F. W. Ponting.

**Schwarz, Hans Rudolf:** Critère de stabilité pour des systèmes à coefficients constants. C. r. Acad. Sci., Paris 241, 15–16 (1955).

It is shown that by elementary transformations every real  $n \times n$  matrix  $A$  can be transformed into a triple diagonal matrix  $B = (b_{ij})$  with  $b_{v+1,v} = -1$ ,  $b_{vv} = 0$ ,  $v = 1, \dots, n-1$ , and  $b_{ij} = 0$ ,  $j \neq i \pm 1$ . If  $-b_{nn}$  and  $b_{v,v+1}$ ,  $v = 1, \dots, n-1$ , are positive, all eigenvalues of  $A$  have a negative real part, and if  $p$  is the number of positive elements in the sequence  $s_0 = b_{nn}$ ,  $s_v = b_{nn} \prod_{k=1}^v b_{n-k, n-k+1}$ ,  $v = 1, \dots, n-1$ , then  $p$  eigenvalues have a positive real part. H. A. Antosiewicz.

**Shanks, Daniel:** On analogous theorems of Fredholm and Frame and on the inverse of a matrix. Quart. appl. Math. 13, 95–98 (1955).



Es sei  $\lambda^N + p_1 \lambda^{N-1} + \dots + p_N = 0$  die charakteristische Gleichung der  $N, N$ -Matrix  $A$  und  $I$  die Einheitsmatrix. Setzt man  $A_0 = 0$ ,  $a_0 = 1$ ,  $A_n = A(A_{n-1} + a_{n-1}I)$ ,  $a_n = -(\text{Spur } A_n)/n$ , so gilt nach Frame: 1.  $a_n = p_n$ , 2.  $A_{N+1} = 0$ ,  $\rightarrow$  3.  $A^{-1} = -(A_{N-1} + a_{N-1}I)/a_N$ . Dies wird hier auf neuem Wege bewiesen. Es folgt dann mit  $B = I - A$ : 4.  $B^{-1} = I + \sum_0^N A_n \left| \sum_0^N a_n \right.$ . Ein weiterer Beweis für 4. wird mit Hilfe der Integralgleichungstheorie gegeben, wobei sich auch die Möglichkeit einer Annäherung ergibt, indem die Summen von 0 bis  $r$  ( $r < N$ ) anstatt 0 bis  $N$  laufen, falls  $|a_{ik}| \leq M$  und  $M$  hinreichend klein.

R. Zurmühl.

**Dias Agudo, F. R.:** The groups with operators and the theory of matrices. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 4, 225—244 (1955).

Verf. beweist mit bekannten Methoden bekannte Sätze über Moduln endlichen Ranges mit einem Polynomring als Koeffizientenbereich und über Normalformen von Matrizen. Vergleich etwa O. Schreier-E. Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra, Bd. 2 (dies. Zbl. 13, 145), II. Abschnitt.

H. Leptin.

**Fröhlich, A. and J. C. Shepherdson:** On the factorization of polynomials in a finite number of steps. Math. Z. 62, 331—334 (1955).

Kurze Mitteilung über Fragen, die mit den Beispielen zur Primpolynomzerlegung von v. d. Waerden, Ref. und Krull [Math. Ann. 102, 738—739 (1930); dies. Zbl. 50, 33; 52, 34] zusammenhängen. Inzwischen ist eine ausführliche Darstellung erschienen [Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 248, 407—432 (1956)]. U. a. wird das Ergebnis von v. d. Waerden, daß es keinen für alle explizit gegebenen Körper gültigen Algorithmus zur Zerlegung von Polynomen in Primfaktoren gibt, in der Weise verschärft, daß ein fester Körper angegeben wird, in dem kein solcher Algorithmus existiert. Entsprechend wird das Beispiel des Ref. verschärft.

M. Kneser.

**Weiner, L. M.:** A factorization theorem concerning sums of homogeneous functions. Scripta math. 21, 20—23 (1955).

In this note there is considered the ring  $R$  of functions which are representable as sums  $F = F_n + F_{n-1} + \dots + F_0$ , where  $F_i$  is a real-valued, continuous, homogeneous function of degree  $i$  of  $m$  real variables. Let  $p$  denote  $(x_1, \dots, x_m)$ . With each element  $F$  of  $R$  and each point  $p$  of the region of definition of the elements of  $R$ , there is associated the polynomial  $P_F(p) = F_n(p) x^n + F_{n-1}(p) x^{n-1} + \dots + F_0(p)$ . Then it is shown that if  $F$  is an element of  $R$  defined in a region  $r$  such that the discriminant of  $P_F(p)$  is distinct from zero for all points of  $r$  when  $n > 1$ , and  $F_n(p)$  and  $F_{n-1}(p)$  are not both zero for any point of  $r$ , then  $F$  is factored uniquely into irreducible factors in  $r$  aside from the order of the factors and the quasi-units.

E. Frank.

**Butler, M. C. R.:** The irreducible factors of  $f(x^m)$  over a finite field. J. London math. Soc. 39, 480—482 (1955).

Let  $GF(q)$  denote the finite field of  $q$  elements and let the polynomial  $f(x)$  be irreducible over  $GF(q)$ . Let  $m$  be a natural number relatively prime to  $q$ . Here the degrees of all irreducible factors of  $f(x^m)$  over  $GF(q)$  are determined, and also their number. The results presuppose knowledge of the order of the roots of  $f(x)$  in the (finite and cyclic) multiplication group of its rootfields.

E. Frank.

**Teicher, Henry:** Reducibility of positive type polynomials. Proc. Amer. math. Soc. 6, 195—201 (1955).

$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$  is called a „positive-type polynomial“ if the  $a_j$  are real and positive. The author seeks conditions for  $f(x)$  to be a product of positive-type polynomials, and finds them for  $m = 2, 3, 4$ .

M. C. R. Butler.



Carlitz, L. and F. R. Olson: A problem in factorization of polynomials. Math. Scandinav. 3, 28—30 (1955).

$f(x)$  denotes an irreducible cubic polynomial over the rational number field  $R$ . It is proved that the  $k$  in  $R$  such that  $f(x + k f(x))$  splits into three (necessarily cubic and irreducible) factors in  $R[x]$  are determined by the solutions of the Diophantine equation  $y^2 = x^3 - ax + b$ . Hence (T. Nagell, Introduction to Number Theory, this Zbl. 42, 267), the number of such  $k$  may be zero, finite, or infinite.

M. C. R. Butler.

Mahajani, G. S. and V. R. Thiruvengkatachar: Remarks on a problem in symmetric functions. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 41, 225—230 (1955).

Es sei  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$  und  $\alpha_i \leq x_{i+1} \leq \alpha_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ). Die Verff. behandeln das Problem, die  $x_i$  so zu bestimmen, daß eine feste der  $n$  ersten elementarsymmetrischen Funktionen ein Extremum erreicht, während die  $n-1$  übrigen gegebene Werte annehmen. Wenn die  $n$ -te elementarsymmetrische Funktion variabel ist, ist das Problem mit einem andern äquivalent, das die Verff. früher untersucht haben (dies. Zbl. 46, 245).

W. Hahn.

Danguy, Louis: Quelques cas de résolution explicite d'une équation de degré  $n$ . Mathesis 64, 115—117 (1955).

### Gruppentheorie:

Schwarz (Švare), Štefan: Über Vergrößerungselemente in der Theorie der Halbgruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 697—698 (1955) [Russisch].

Ein Element  $t$  einer Halbgruppe  $S$  heißt ein rechtsseitiges Vergrößerungselement, wenn es eine echte Teilmenge  $M$  von  $S$  gibt, für die  $Mt = S$  gilt. Entsprechend werden linksseitige Vergrößerungselemente definiert. Verf. beweist, daß eine bikompakte Hausdorffsche Halbgruppe weder rechts- noch linksseitige Vergrößerungselemente enthält.

R. Kochendörffer.

Gluskin, L. M.: Homomorphismen von einseitig einfachen Halbgruppen auf Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 673—676 (1955) [Russisch].

Eine Halbgruppe  $G$  heißt „rechts-einfach“, wenn  $RG \subset R \subset G \Rightarrow R = G$ ; d. h.  $G$  enthält kein Rechtsideal  $\neq G$ ; oder auch  $ax = b$  ist für alle  $a, b \in G$  in  $G$  lösbar. Die Gesamtheit der (relativen) rechten Einheiten  $i_a$  (für alle  $a \in G$   $a i_a = a$ ) erzeugen eine Unterhalbgruppe  $T$ . Es wird bewiesen, daß die Gesamtheit  $N$  der Elemente  $n$ , die Lösungen von  $tn = t'$  für irgendwelche  $t, t' \in T$  sind, eine rechts-einfache Unterhalbgruppe von  $G$  bilden.  $N$  ist der kleinste Kern von Homomorphismen  $\varphi$  von  $G$  auf Halbgruppen mit Einheit;  $\varphi G$  ist notwendigerweise eine Gruppe. Die Komplexe  $aN$  ( $a \in G$ ) bilden eine Gruppe  $G/N$  ( $aN \circ bN = abN$ ), und  $\bar{\varphi}: \bar{\varphi}a = aN$  ist ein Homomorphismus von  $G$  auf  $G/N$  mit Kern  $N$ . Jeder andere mögliche Kern  $M$  ( $M \supset N$ ) bestimmt eindeutig einen Homomorphismus  $\varphi$  von  $G$  auf eine Faktorgruppe von  $G/N$ ; mit anderen Worten,  $\bar{\varphi}$  ist der größte gemeinsame (rechte) Teiler aller  $\varphi$ , d. h. es gibt stets  $\psi$  mit  $\varphi = \psi \bar{\varphi}$ . Der Verf. zitiert insbesondere die Problemstellung und Resultate von M. Teissier (dies. Zbl. 50, 16; 51, 255), wie auch Resultate von A. Suškevič (Die Theorie verallgemeinerter Gruppen, Charkov-Kiev 1937) und E. S. Ljapin (dies. Zbl. 38, 157).

D. Tamari.

Gluskin, L. M.: Einfache Halbgruppen mit Null. Doklady Akad. Nauk SSSR 103, 5—8 (1955) [Russisch].

Eine Halbgruppe heißt (kurzum) einfach, wenn sie nur triviale Homomorphismen, d. h. Isomorphismen und Abbildung auf ein einziges Element, gestattet. Bekanntlich gibt es nur zwei (triviale) kommutative, einfache Halbgruppen mit Null: (1)  $\{0, u\}$  mit  $u^2 = 0$ , und (2)  $\{0, e\}$  mit  $e^2 = e$  (E. S. Ljapin, dies. Zbl. 40, 298). Hier werden allgemein alle einfachen Halbgruppen mit Nullelementen charakterisiert:  $G$  ist eine solche von (1) verschiedene dann und nur dann, wenn (a)  $G$  keine Ideale



$\neq 0$  oder  $G$  enthält, (b) es zu allen Paaren  $a, b \in G$ ,  $a \neq b$ , Paare  $x, y \in G$  gibt, so daß entweder  $xay = 0 \neq xby$  oder  $xay \neq 0 = xby$ . Im Beweis spielen die „normalen Komplexe“, d. h. Komplexe von  $G$ , die in irgendeinem Homomorphismus  $\varphi$  als vollständiges Urbild eines Elementes von  $\varphi G$  erscheinen (Ljapin, l. c., 179), eine Rolle. Es werden dann mehrere Bedingungen angegeben, die alle zu den „vollständig einfachen“ (in gewisser Weise durch Matrizen darstellbaren) Halbgruppen von D. Rees [dies. Zbl. 28, 4; Proc. Cambridge Philos. Soc. 37, 434—435 (1941)] und A. H. Clifford (dies. Zbl. 45, 301) führen. *D. Tamari.*

**Munn, W. D. and R. Penrose:** A note on inverse semigroups. Proc. Cambridge philos. Soc. 51, 396—399 (1955).

Le but de cette Note est de donner pour un demi-groupe  $D$  quatre conditions qui équivalent chacune au fait que  $D$  soit un demi-groupe inversif à idempotents permutables, notion introduite indépendamment par V. V. Vagner [Mat. Sbornik, n. Ser. 32, 545—632 (1953)] et G. B. Preston (ce Zbl. 56, 19). Ces conditions sont les suivantes: C1.  $D$  est inversif et ses idempotents  $l$ -équivalents au sens de J. A. Green (ce Zbl. 43, 256) sont permutables ainsi que ses idempotents  $r$ -équivalents. C2. Chaque idéal à gauche principal est engendré par un et un seul idempotent ainsi que chaque idéal à droite principal [amélioration d'une partie d'un résultat de A. H. Clifford (ce Zbl. 51, 13, th. 2.2 du travail cité)]. C3.  $D$  est inversif et, pour tout idempotent  $e$ , les équations  $exe = e$  et  $xex = x$  n'ont pas d'idempotent solution commune autre que  $e$ . C4. Pour tout élément  $a$  de  $D$ , les équations  $axa = a$  et  $axx = x$  ont une solution commune unique. *R. Croisot.*

**Hashimoto, Hiroshi:** On the structure of semigroups containing minimal left ideals and minimal right ideals. Proc. Japan Acad. 31, 264—266 (1955).

L'A. considère des demi-groupes ayant un nombre fini d'idéaux à droite minimaux  $R_j$  et d'idéaux à gauche minimaux  $L_m$ . Il envisage les ensembles  $S_{kj}$  des éléments  $x$  d'un tel demi-groupe  $D$  vérifiant l'égalité  $xR_k = R_j$  et  $T_{lm}$  de ses éléments  $y$  vérifiant l'égalité  $L_l y = L_m$ . Il introduit  $S_j = \bigcap_k S_{kj}$ ,  $T_m = \bigcap_l T_{lm}$  et  $C_{km} = S_k \cap T_m$ . Les ensembles  $C_{km}$  sont des sous-demi-groupes disjoints de  $D$  contenant chacun un et un seul groupe maximal du noyau; on a  $C_{km} C_{in} \subseteq C_{kn}$ . L'A. introduit ensuite les conditions suivantes: (A)  $S_{kj}$  ne dépend pas de  $k$ ; (B)  $T_{lm}$  ne dépend pas de  $l$ . Il établit que (A) par exemple a lieu si  $D$  est simplifiable à droite. Le rapporteur considère cette propriété comme évidente si l'on remarque que, sous cette hypothèse,  $D$  se réduit à son noyau (qui, d'ailleurs, est un groupe à gauche) et  $S_{kj} = R_j$ ; on voit de plus que la condition (B) a lieu également dans ce cas (et à chaque fois que  $D$  est complètement simple). En présence des conditions (E) et (B), l'A. envisage les partitions de  $D$  déterminées par les sous-ensembles  $S_j$  et  $T_m$ . Remarquons que l'étude de l'A. est valable même si le nombre des idéaux minimaux est infini et que les ensembles  $S_{kj}$ ,  $T_{lm}$  et leurs intersections ont été étudiés aussi par R. J. Koch dans sa thèse (Tulane University, 1953, non publié). *R. Croisot.*

**Hashimoto, Hiroshi:** On the kernel of semigroups. J. math. Soc. Japan 7, 59—66 (1955).

L'A. étudie le noyau des demi-groupes ayant au moins un idéal à gauche minimal et au moins un idéal à droite minimal. Les résultats qu'il obtient sont connus depuis 1948 (cf. A. H. Clifford, ce Zbl. 38, 11). *R. Croisot.*

● **Kurosch, A. G.:** The theory of groups. Vol. I, II. English transl. of second ed. New York: Chelsea Publishing Company 1955. 270; 271 p. \$ 4,50; 4,95.

● **Burnside, W.:** Theory of groups of finite order. 2nd edition. New York: Dover Publications, Inc. 1955. XXIV, 512 p. \$ 3,95 cloth, \$ 2,00 paper.

Es handelt sich bei dem vorliegenden Buch nur um einen unveränderten Neu-



druck der im Jahre 1911 erschienenen zweiten Auflage. Daher ist die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung nach dem Stande von 1911, und mit dieser Beschränkung vollständig und übersichtlich, dargestellt, und zwar sowohl die Theorie der abstrakten Gruppen als auch die Darstellungstheorie. Im Hinblick auf die Bedeutung, die gerade die endlichen Gruppen und ihre Darstellungen bei der Anwendung auf Probleme der Physik und Chemie in neuerer Zeit in ständig zunehmendem Maße gewinnen, ist es bedauerlich, daß dem sonst so wertvollen Buche nicht ein Anhang mit einem Überblick über die vielfachen auf diesem Gebiet seit 1911 erreichten Ergebnisse beigelegt wurde.

O. Grün.

**Neumann, B. H.:** Groups with finite classes of conjugate subgroups. Math. Z. 63, 76—96 (1955).

Es ist bekannt, daß aus der Endlichkeit der Zentrumsfaktorgruppe die der Kommutatorgruppe folgt, daß aus der Endlichkeit der Kommutatorgruppe die aller Klassen konjugierter Elemente erschlossen werden kann, und daß schließlich für endlich erzeugbare Gruppen diese drei Eigenschaften äquivalent sind. Verf. beweist hier die folgenden schönen Kriterien: Klassen konjugierter Untergruppen sind dann und nur dann endlich, wenn die Zentrumsfaktorgruppe endlich ist; und die Kommutatorgruppe ist dann und nur dann endlich, wenn jede Untergruppe endlichen Index in einem Normalteiler hat.

R. Baer.

**Yacoub, K. R.:** General products of two finite cyclic groups. Proc. Glasgow math. Assoc. 2, 116—123 (1955).

Nach Vorbemerkungen in § 1 über Produkte zweier beliebiger Gruppen betrachtet der Verf. in § 2 Produkte von zwei endlichen zyklischen Gruppen  $A$  und  $B$ , welche noch der Bedingung  $A \cap B = E$  unterliegen. Die in der Vertauschbarkeitsrelation

$$a^y b^x = b^{\pi^y x} a^{\sigma^y} \quad (a \text{ und } b \text{ Erzeugende von } A \text{ bzw. } B)$$

auftretenden Permutationen  $\pi$  und  $\sigma$  haben folgende Eigenschaft: Ist  $\pi$  eine Permutation der Restklassen mod  $n$  (was eintritt, wenn  $B$  die Ordnung  $n$  hat), so ist die durch

$$\pi_u x \equiv \pi(x + u) - \pi(u) \pmod{n}$$

definierte Permutation  $\pi_u$  eine Potenz von  $\pi$ . Solche Permutationen bezeichnet der Verf. als semispeziell. Über diese werden zahlreiche Sätze und Hilfssätze bewiesen, z. B.: Die Ordnung einer semispeziellen Permutation  $\pi$  ist gleich der Länge des 1 enthaltenden Zyklus und ist höchstens gleich  $n - 1$ . Ist  $\pi$  semispeziell und  $\pi_u = \pi$  für ein zu  $n$  primes  $u$ , so ist  $\pi$  von der Gestalt  $\pi u \equiv r u \pmod{n}$ , ist eine „lineare Permutation“. Jede semispezielle Permutation der Ordnung 2 ist linear, ebenso jede semispezielle Permutation auf den Restklassen einer von 2 verschiedenen Primzahl  $p$ . Anwendungen der Ergebnisse auf Produkte von zwei zyklischen Gruppen werden nicht gegeben, sondern auf eine spätere Arbeit verschoben.

B. Huppert.

**Itô, Noboru:** Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen. Math. Z. 62, 400—401 (1955).<sup>\*</sup>

Über das Produkt  $G = A B$  von zwei abelschen Gruppen  $A$  und  $B$  war bisher nur bekannt, daß  $G$  auflösbar ist, sofern  $A$  und  $B$  endliche Ordnung haben (N. Itô, dies. Zbl. 44, 15). Verf. beweist in dieser Note: Satz 1. Jede Gruppe  $G = A B$ , die sich als Produkt von zwei abelschen Untergruppen  $A$  und  $B$  schreiben läßt, hat eine abelsche Kommutatorgruppe, ist also (zweistufig) metabelsch. Satz 2. Sei  $G = A B$  mit endlichen abelschen Untergruppen  $A$  und  $B$  von  $G$ . a) Ist  $A \neq B$ , so enthält  $G$  einen Normalteiler  $U \neq G$ , der  $A$  oder  $B$  umfaßt. b) Ist  $G \neq E$ , so enthält  $A$  oder  $B$  einen Normalteiler  $N \neq E$  von  $G$ . Satz 1 wird durch eine überraschend kurze direkte Rechnung bewiesen, Satz 2 durch geschickte Induktion nach der Gruppenordnung. Es wäre wünschenswert, diese Sätze auf Produkte von mehr



als zwei paarweise vertauschbaren abelschen Gruppen (für welche man bis jetzt nur die Auflösbarkeit bewiesen hat) zu verallgemeinern. *B. Huppert.*

**Itô, Noboru:** Über die Frattini-Gruppe einer endlichen Gruppe. *Proc. Japan Acad.* **31**, 327—328 (1955).

Verf. beweist folgenden Satz: Sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $H$  eine nachinvariante Untergruppe von  $G$ . Genau dann ist  $H$  nilpotent, wenn die Kommutatorgruppe  $H'$  von  $H$  in der Frattini-Gruppe  $\Phi(G)$  von  $G$  liegt. Dieser Satz umfaßt Ergebnisse von H. Wielandt (für  $H = G$ ) und dem Ref. (für  $H = G'$ ). Hilfsmittel beim Beweis ist der folgende, auch an sich interessante Hilfssatz: Sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $H$  eine nachinvariante nilpotente Untergruppe von  $G$ . Dann gibt es einen nilpotenten Normalteiler  $K$  von  $G$ , der  $H$  umfaßt. Hilfssatz und Beweis bleiben richtig, wenn man „nilpotent“ durch „auflösbar“ ersetzt. *B. Huppert.*

**Pollak, G.:** Neuer Beweis der Einfachheit der alternierenden Gruppe. *Acta Sci. math.* **16**, 63—64 (1955) [Russisch].

Die Einfachheit von  $A_n$  beweist man folgendermaßen. Man berechnet direkt, daß  $A_5$  einfach ist. Man nimmt an, daß  $A_{n-1}$  einfach und daß  $N$  normale Untergruppe von  $A_n$  sei. Nun ist  $N \cap A_{n-1}$  entweder  $E$  oder  $A_{n-1}$ ; ähnlich  $N \cap A_{n-1}^{(i)}$ , wo  $A_{n-1}^{(i)}$  die alternierende Gruppe aller Symbole außer dem  $i$ -ten ist. Angenommen  $N \cap A_{n-1} = A_{n-1}$ . Da  $A_{n-1} \cap A_{n-1}^{(1)}$  nicht leer ist, folgt  $N \cap A_{n-1}^{(1)} = A_{n-1}^{(1)}$ ;  $\{A_{n-1}, A_{n-1}^{(1)}\} = A_n \subset N$ . Angenommen  $N \cap A_{n-1}^{(i)} = 1$ ,  $i = 1, \dots$ . Wenn für ein  $p$ ,  $p \neq E$ ,  $p \in N$ , so ist  $p$  kein Element von  $A_{n-1}^{(i)}$ . Darum transformiert  $p$  alle Symbole. Berechnet man das Produkt  $pp'$ ,  $p = (123 \dots k_1) \dots (k_{s+1} \dots n)$ ,  $p' = (12) (3n) p(12) (3n)$ , so sieht man wegen  $n > 5$ , daß  $pp'$   $n$  ändert, 1 nicht ändert. Darum  $p = E$ . *J. L. Brenner.*

**Huppert, Bertram:** Primitive auflösbare Permutationsgruppen. *Arch. der Math.* **5**, 303—310 (1955).

Zunächst wird bewiesen: Jede primitive, auflösbare Permutationsgruppe vom Grade  $p + 1$  ( $p$  eine ungerade Primzahl) ist zweifach transitiv. Weiter untersucht Verf. zweifach transitive, auflösbare Gruppen, in denen diejenigen Permutationen, die ein Symbol festlassen, die übrigen Symbole transitiv permutieren. Sämtliche derartigen Gruppen lassen sich angeben, und zwar: Die symmetrische Gruppe  $\mathfrak{S}_3$ , die Gruppen der linearen Abbildungen  $y = ax + b$  mit  $a, b \in GF(2^r)$ ,  $a \neq 0$ , wobei  $2^r - 1$  eine Primzahl ist, und die Gruppen der Abbildungen  $\mu = ax^{2^t} + b$  mit  $a, b \in GF(2^r)$ ,  $a \neq 0$  und  $0 \leq t \leq r - 1$ . Diese Gruppen sowie die alternierende Gruppe  $\mathfrak{A}_3$  sind die einzigen primitiven, auflösbaren Gruppen, deren Grad die Form  $p + 1$  ( $p$  Primzahl) hat. Die symmetrischen Gruppen  $\mathfrak{S}_3$  und  $\mathfrak{S}_4$  sind die einzigen dreifach transitiven auflösbaren Permutationsgruppen. — In Ergänzung zu Sätzen von Schur (dies. Zbl. **7**, 149) und Wielandt (dies. Zbl. **34**, 16) wird bewiesen: Eine primitive, auflösbare Gruppe  $\mathfrak{G}$  vom Grade  $p^n$  mit  $n > 1$  enthält keinen  $p^n$ -Zyklus, ausgenommen den Fall  $p^n = 4$ ,  $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_4$ . Die Gruppen  $\mathfrak{S}_4$  und  $\mathfrak{A}_4$  sind die einzigen primitiven, auflösbaren Gruppen, welche eine reguläre Diedergruppe enthalten. — Schließlich wird für primitive, auflösbare Gruppen vom Grade  $p^n$  mit einer regulären abelschen Untergruppe  $\mathfrak{A}$  bewiesen: Wird  $\mathfrak{A}$  von  $\omega$  Elementen erzeugt und ist  $p^m$  die größte Invariante von  $\mathfrak{A}$ , so gilt  $(p^{m-1} - 1)/m < \omega$ . *R. Kochendörffer.*

**Berman, S. D.:** Gruppenalgebren Abelscher Erweiterungen von endlichen Gruppen. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **102**, 431—434 (1955) [Russisch].

Es sei  $G$  eine Erweiterung der Gruppe  $H$  mit abelscher Faktorgruppe  $G/H$ . Mit  $R(G, K)$  bzw.  $R(H, K)$  werden die Gruppenringe von  $G$  bzw.  $H$  über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$  bezeichnet, dessen Charakteristik kein Teiler der Ordnung von  $G$  ist. Für das Zentrum von  $R(G, K)$  und, falls  $G/H$  zyklisch ist, für  $R(G, K)$  selbst werden Systeme von primitiven orthogonalen Idempotenten ex-



plizit angegeben unter der Annahme, daß entsprechende Systeme für  $R(H, K)$  bereits bekannt sind. Hieraus ergibt sich aufs neue der bereits von I. Schur bewiesene Satz über die minimalen Darstellungskörper auflösbarer endlicher Gruppen.

*R. Kochendörffer.*

**Osima, Masura:** Notes on blocks of group characters. Math. J. Okayama Univ. 4, 175—188 (1955).

Sei  $\mathfrak{G}$  eine endliche Gruppe,  $p$  eine Primzahl, und  $\Gamma_p(\mathfrak{G})$  der Gruppenring von  $\mathfrak{G}$  über einem (algebraisch-abgeschlossenen) Körper der Charakteristik  $p$ . Verf. untersucht die Struktur des Zentrums  $Z_p(\mathfrak{G})$  von  $\Gamma_p(\mathfrak{G})$ , und stellt dabei den Zusammenhang seiner Untersuchungen mit den von R. Brauer gefundenen wichtigen Resultaten über die  $p$ -Blöcke von  $\mathfrak{G}$  her (die Brauerschen Arbeiten enthalten keine Beweise). — Für eine Klasse konjugierter Elemente  $K$  aus  $\mathfrak{G}$  bezeichne man als  $p$ -Defektgruppe  $\mathfrak{P}(K)$  eine  $p$ -Sylowgruppe des Normalisators  $\mathfrak{N}(G)$  eines Elements  $G \in K$ ; nach den Sylowschen Sätzen ist  $\mathfrak{P}(K)$  durch  $K$  bis auf willkürliche Transformationen mit Elementen aus  $\mathfrak{G}$  eindeutig bestimmt. Der Exponent von  $p$  in der Ordnung von  $\mathfrak{P}(K)$  heißt der Defekt  $d(K)$ . Es gilt: Für eine beliebige Untergruppe  $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$  spannen diejenigen  $K$ , für welche eine Defektgruppe  $\mathfrak{P}(K)$  in  $\mathfrak{H}$  liegt, ein Ideal  $Z_p(\mathfrak{H})$  von  $Z_p(\mathfrak{G})$  auf (Lemma 4, S. 177). Die Sätze von Brauer ergeben sich durch Vergleich dieser Ideale  $Z_p(\mathfrak{H})$  mit den Blockidealen von  $\Gamma_p(\mathfrak{G})$ ; die letzteren sind definiert als die Komponenten von  $\Gamma_p(\mathfrak{G})$  bei einer nicht verfeinerbaren Zerlegung in zweiseitige Ideale. Jedem Blockideal  $B$  entspricht eindeutig ein primitives Idempotent  $e_B$  aus  $Z_p(\mathfrak{G})$  vermöge  $e_B \in B$ . Es gilt dann: Zu jedem Blockidempotent  $e_B$  gibt es eine bis auf Konjugierte eindeutig bestimmte kleinste  $p$ -Untergruppe  $\mathfrak{P}(B)$  von  $\mathfrak{G}$ , für welche  $e_B$  im Ideal  $Z_p(\mathfrak{P}(B))$  enthalten ist (Th. 4, S. 182).  $\mathfrak{P}(B)$  heißt die Defektgruppe von  $B$ , und der Exponent von  $p$  in der Ordnung von  $\mathfrak{P}(B)$  heißt der Defekt von  $B$ . — Die Übereinstimmung dieser Definition der Defektgruppe und des Defekts von  $B$  mit der Brauerschen, scheinbar ganz anderen Definition beruht auf folgendem Satz: Sei  $\psi_B$  die durch  $\psi_B(e_B) = 1$  definierte irreduzible Darstellung von  $Z_p(\mathfrak{G})$ ; dann ist  $\mathfrak{P}(B)$  die kleinste Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ , für welche es eine  $p$ -reguläre Klasse  $K$  mit Defektgruppe  $\mathfrak{P}(K) \subset \mathfrak{P}(B)$  und  $\psi_B(K) \neq 0$  gibt (Lemma 6, S. 180). — Die  $B$  mit vorgegebener Defektgruppe  $\mathfrak{P}$  entsprechen umkehrbar eindeutig den Blockidealen  $B'$  des Normalisators  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$ , welche  $\mathfrak{P}$  als Defektgruppe besitzen, und zwar wird die Beziehung  $B \leftrightarrow B'$  folgendermaßen hergestellt: Ordnet man jeder Klasse  $K$  den im Zentralisator  $\mathfrak{C}(\mathfrak{P})$  gelegenen Teil  $K^\circ$  von  $K$  zu, so entsteht ein Homomorphismus  $f$  von  $Z_p(\mathfrak{G})$  in  $Z_p(\mathfrak{N}(\mathfrak{P}))$ ; dabei ist  $f(e_B) = e_B$  (Th. 6, S. 183). — Verf. gelingt es, durch eine (nicht gruppeninvariante) Konstruktion die Gesamtheit der  $p$ -regulären Klassen  $K$  von  $\mathfrak{G}$  in disjunkte, den Blöcken  $B$  zugeordnete Teilmengen  $\mathfrak{B}$  einzuteilen, und zwar derart, daß die Anzahl der  $K \in \mathfrak{B}$  gleich der Anzahl der irreduziblen modularen Charaktere  $\varphi \in B$  ist, und daß die zugehörige Determinante  $\det(\varphi(G)) \not\equiv 0 \pmod{p}$  ist ( $G$  durchläuft ein Vertretersystem der Klassen  $K \in \mathfrak{B}$ , und  $p$  ist ein Primidealteiler von  $p$ ). Die Elementarteiler der zu  $B$  gehörigen Teilmatrix  $C_B$  der Cartanschen Matrix von  $\mathfrak{G}$  (für  $p$ ) sind dann genau die Potenzen  $p^{d(K)}$  mit  $K \in \mathfrak{B}$  (Th. 8, S. 185). Für  $K \in \mathfrak{B}$  gilt  $\mathfrak{P}(K) \subset \mathfrak{P}(B)$ , und es gibt genau ein  $K \in \mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{P}(K) = \mathfrak{P}(B)$  (Th. 9, S. 186). Daraus folgt, daß die Anzahl der  $p$ -Blöcke  $B$  von  $\mathfrak{G}$  mit vorgegebener Defektgruppe  $\mathfrak{P}$  höchstens gleich der Anzahl der  $p$ -regulären Klassen  $K$  von  $\mathfrak{G}$  mit der Defektgruppe  $\mathfrak{P}$  ist (Cor. 2, S. 187). — Es seien noch die folgenden Sätze erwähnt: (a) Die Defektgruppe  $\mathfrak{P}(B)$  von  $B$  ist ein maximaler  $p$ -Normalteiler in ihrem Normalisator  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}(B))$  (Th. 5, S. 182). — (b) Wenn  $\mathfrak{G}$  einen  $p$ -Normalteiler  $\mathfrak{H}$  besitzt, dann ist  $\mathfrak{H}$  in der Defektgruppe eines jeden  $p$ -Blocks von  $\mathfrak{G}$  enthalten (Lemma 9, S. 182). — (c) Wenn  $\mathfrak{G}$  einen  $p$ -Normalteiler  $\mathfrak{H}$  besitzt, dessen Zentralisator  $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$  ebenfalls eine  $p$ -Gruppe ist, so besitzt  $\mathfrak{G}$  nur einen einzigen  $p$ -Block  $B$  (Th. 7, S. 183).

*P. Roquette.*



**Litoff, O.:** On the commutator subgroup of the general linear group. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 465—470 (1955).

Let  $R$  be an associative ring with identity,  $GL_n(R)$  be the group of all  $n$ -rowed invertible matrices over  $R$ . The subgroup generated by transvection of  $GL_n(R)$  is denoted by  $T$ , the commutator subgroup of  $GL_n(R)$  is denoted by  $C$ . The author proves that  $T = C$  for the following two cases: 1. Euclidean ring (which is an extension of a result of Hua and Reiner, this Zbl. **45**, 304) and 2. The set of units of  $R$  forms an ideal.

*L. K. Hua.*

**Dieudonné, Jean:** Witt groups and hyperexponential groups. Mathematika **2**, 21—31 (1955).

In his construction of the  $p$ -adic field  $\mathfrak{K}$  with a given residue-class field  $K$ , Witt defined the integral field-elements as vectors in infinitely many components  $x_0, x_1, \dots$  satisfying certain addition and multiplication laws (this Zbl. **16**, 51). By regarding the components as variables, the author considers the additive and multiplicative groups of the field  $\mathfrak{K}$  as formal Lie groups of infinite dimension. When  $K$  is the field of  $p$  elements (the only case considered here) these groups are called the additive and multiplicative Witt groups respectively, denoted by  $W$  and  $W^*$ . They are examples of recursive Lie groups (cf. next review but one). Another recursive Lie group is defined by means of the hyperexponential function  $\text{Hex}(x_0, x_1, \dots)$ , which takes the place of the exponential function in fields of characteristic  $p \neq 0$ . To define it, consider the series  $\exp(u_0 t + u_1 t^p + u_2 t^{p^2} + \dots)$  over the rational field. The coefficient of  $t^i$  in this expansion is  $x_i = u_i + F_i(u_0, \dots, u_{i-1})$ , where  $F_i$  is a polynomial. The latter equations can be solved recursively to give  $u_i = x_i + \Phi_i(x_0, \dots, x_{i-1})$ , where the  $\Phi_i$  are polynomials with coefficients which are  $p$ -adic integers (Dieudonné, this Zbl. **48**, 255). In terms of the  $x$ 's,  $\exp(u_0 t + u_1 t^p + u_2 t^{p^2} + \dots)$  may be reduced mod  $p$ , and it is then denoted by  $\text{Hex}(x_0, x_1, \dots) = \text{Hex}(\mathbf{x})$ . This function satisfies the equation  $\text{Hex}(\mathbf{x}) \text{Hex}(\mathbf{y}) = \text{Hex}(\mathbf{z})$ , where  $\mathbf{z}_i$  is a polynomial in  $x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_i$ . The recursive group so defined is the hyperexponential group, denoted by  $H$ . Using  $H$  the author constructs a homomorphism of the additive Witt group  $W$  onto the 1-dimensional multiplicative group  $W_1^*$  [multiplication:  $(x y)_1 = x_1 + y_1 + x_1 y_1$ ]; by means of this homomorphism and the multiplication table of the hyperalgebra of  $W$  ( $X_{hi}^p = X_{hi+1}$ ,  $h, i = 0, 1, 2, \dots$ ) he then constructs an isomorphism between  $W$  and  $H$ . This is to be used in his theory of abelian formal Lie groups (cf. next review but one).

*P. M. Cohn.*

**Dieudonné, Jean:** Sur quelques groupes de Lie abéliens sur un corps de caractéristique  $p > 0$ . Arch. der Math. **5**, 274—281 (1954), Rectifications ibid. **6**, 88 (1954).

**Dieudonné, Jean:** Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic  $p > 0$ . II. Amer. J. Math. **77**, 218—244 (1955).

These papers continue the author's investigations of formal Lie groups and their Lie hyperalgebras (this Zbl. **48**, 255; **55**, 256). Let  $G$  be a formal Lie group of dimension  $n$  over a field  $K$  of characteristic  $p \neq 0$ , and write  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  for short. If  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  denotes the product of  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$  in  $G$ , then the „Taylor formula“ for  $G$  states:  $f(\mathbf{x}\mathbf{y}) = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(\mathbf{y}) X_{\alpha} f$ , where the  $P_{\alpha}$  are formal power series and the  $X_{\alpha}$  are certain differential operators. By rearrangement according to monomials in  $\mathbf{y}$  this becomes:  $f(\mathbf{x}\mathbf{y}) = \sum \mathbf{y}^{\alpha} Z_{\alpha} f$ . The operators  $Z_{\alpha}$  thus defined are left-invariant semi-derivations of a certain height and are linearly independent over the ring of formal power series in  $\mathbf{x}$ . In fact they form a basis of the hyperalgebra of  $G$ , and conditions are stated for a set of semi-derivations  $Z_{\alpha}$  to determine a hyperalgebra in this way. In particular the multiplication law of  $G$  can be recovered from the multiplication table of the  $Z_{\alpha}$ . — The  $Z_{\alpha}$  satisfy the „gene-



ralized Leibniz Formula“  $Z_\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} (Z_\beta f)(Z_{\alpha-\beta}g)$ , and by means of this formula a necessary and sufficient condition is given for a homomorphism between two hyperalgebras to be derived from a homomorphism between the corresponding Lie groups. — Though the group is completely determined by the multiplication table of the  $Z_\alpha$  of its hyperalgebra, it is not in general enough to give the multiplication table of the  $X_\alpha$ ; this does hold however when the group law is canonical (cf. Dieudonné, Anais Acad. Brasil. Ci. 1955). — There follows a description of all the possible abelian 1-dimensional Lie groups over an algebraically closed field: Let  $X_r$  be the left-invariant operation which reduces at the neutral element to  $D_r$ , where  $D_r(x^{ap^r+b}) = a x^{(a-1)p^r+b}$  ( $0 \leq b < p^r$ ). Then i) if  $X_0^p = \lambda X_0$  ( $\lambda \neq 0$ ) then the group is isomorphic to the multiplicative group  $W_1^*$  [group law:  $(x, y) \rightarrow x + y + x y$ ]. ii) If  $X_h^p = 0$  for all  $h$ , then the group is isomorphic to the additive group  $W_1$  [group law:  $(x, y) \rightarrow x + y$ ]. iii) If  $X_h^p = 0$  for  $h < r$ ,  $X_r^p \neq 0$ , then there is also just one such isomorphism type. In each case the multiplication table for the hyperalgebra (for the canonical group law) is given. [In the paper the hypothesis is made that in ii), iii) the groups are abelian. By Lazard's result (this Zbl. 55, 256) that every 1-dimensional formal Lie group is abelian, this is unnecessary, as the author points out in a note added in proof. Moreover, the author has now shown that for each  $r$  a group of type iii) exists (cf. following review).] The case  $r = 1$ ,  $p = 5$  of iii) can be realised by a construction based on the addition theorem of elliptic functions, and the resulting „elliptic group“ is studied in the first paper under review. In general this elliptic group involves two arbitrary constants and exists for any  $p \neq 2$ , but it may be isomorphic to  $W_1^*$ ; this is so if and only if its Hasse invariant is  $\neq 0$  (cf. Hasse, this Zbl. 10, 148). — Finally, abelian formal Lie groups of dimension  $n$  over an algebraically closed field are studied. On the Lie algebra  $\mathfrak{g}_0$  of such a group  $G$  the mapping  $q: X \rightarrow X^p$  is semilinear, and it defines a Fitting decomposition:  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$ , where  $q$  is one-one on  $\mathfrak{h}$  and nilpotent on  $\mathfrak{k}$ . The set  $\mathfrak{h}$  is called the core and  $\mathfrak{k}$  the  $p$ -radical of  $\mathfrak{g}_0$ . The Lie group  $G$  breaks up correspondingly into a direct product of groups  $H, K$  where  $K$  has Lie algebra  $\mathfrak{k}$  and  $H$  is isomorphic to a direct product of  $m$  copies of  $W_1^*$  ( $m = \dim \mathfrak{h}$ ). The subgroups  $H$  and  $K$  are mapped into themselves by endomorphisms of  $G$  (and into the corresponding subgroups of the image under homomorphisms). Examples include the additive Witt group  $W_n$ , a coreless abelian group, and the multiplicative Witt group  $W_n^*$ , which is isomorphic to  $W_1^* \times W_{n-1}$ .

P. M. Cohn.

- Dieudonné, Jean: Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique  $p > 0$ . III. Math. Z. 63, 53–75 (1955).  
 Dieudonné, Jean: Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic  $p > 0$ . IV. Amer. J. Math. 77, 429–452 (1955).

In these papers the author continues his work on formal Lie groups of finite characteristic by showing how all such abelian groups may be obtained as homomorphic images of a certain „universal“ group. Here the notion of an infinite dimensional formal Lie group becomes necessary. Such a group is defined by a multiplication law which is a power series in an infinity of indeterminates  $x_0, x_1, \dots$  but otherwise satisfies the same conditions as for finite dimensional groups. The only other modification is that (for the purpose of ordering the terms of the power series) each variable  $x_i$  is assigned a certain weight  $g_i$ , where  $(g_0, g_1, \dots)$  is a strictly ascending sequence of positive integers. — Such an infinite dimensional group  $G$  is called recursive, if the product has the form (1)  $(xy)_i = \varphi_i(x_0, \dots, x_i, y_0, \dots, y_i)$ ; thus the  $i$ -th coordinate of the product  $xy$  is independent of  $x_j, y_j$  with  $j > i$ . The first  $n$  equations (1) define a finite dimensional group  $G_n$ , and there is a natural homomorphism of  $G$  onto  $G_n$  whose kernel is again a recursive group, denoted by  $G'_n$ . If  $\bar{G}$  is another recursive group, and  $\bar{G}_n, G'_n$  images and kernels of  $G$  corresponding

to  $G_n, G'_n$ , then a homomorphism  $u$  of  $G$  into  $G$  is recursive, if  $u_i(x)$  involves only  $x_0, \dots, x_i$ .—The hyperexponential group  $H$  (cf. last review but one) is discussed as example of a recursive group. (Generally, if the hyperalgebra of an abelian recursive group satisfies certain conditions, the group is said to be of hyperexponential type. Examples are  $H$  itself, the Witt group  $W$  (l. c.) and the group of „Einseinheiten“ in the  $p$ -adic field. It is then proved that a group of hyperexponential type is necessarily isomorphic to  $H$ , by a recursive isomorphism. However, these groups cannot be regarded as identical: The isomorphism is only „local“ in some sense, and a particular group  $U$  of hyperexponential type is defined by the multiplication table  $X_{hi}^p = X_{hi+1}$  ( $h, i = 0, 1, 2, \dots$ ) for its hyperalgebra, and its right translation operator is

$$R_y = \prod_{i=0}^{\infty} \text{Hex} (y_i X_{0i}, y_i^p X_{1i}, \dots, y_i^{p^h} X_{hi}, \dots);$$

this group  $U$  appears later as the universal group. The construction of abelian groups proceeds now as follows: Let  $K$  be any perfect field of characteristic  $p$ . An endomorphism  $u = (u_0, u_1, \dots)$  of the Witt group  $W$  is called a  $K$ -endomorphism if its coefficients are in  $K$ . The set of recursive  $K$ -endomorphisms forms a ring  $\mathfrak{E}$ ; this ring contains in particular the „Frobenius-homomorphism“  $p: p_i(x) = x_i^p$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) and the „shift-homomorphism“  $t: t_0(x) = 0, t_i(x) = x_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). The product  $\pi = pt = tp$  represents the „ $p$ -th power endomorphism“ of  $W$ . Further the Witt vectors  $A = (a_0, a_1, \dots)$  over  $K$  define endomorphisms of  $W$  by (Witt)-multiplication:  $x \rightarrow Ax$ , and so they may be identified with a subring  $\mathfrak{B}$  of  $\mathfrak{E}$ . The elements of  $\mathfrak{E}$  are then shown to be just the endomorphisms of the form

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} A_k p^k + \sum_{k=1}^{\infty} t^k B_k \quad (A_k, B_k \in \mathfrak{B}).$$

In particular the subring  $\mathfrak{E}^+$  of endomorphisms of the form  $\sum t^k B_k$  plays a role. The whole construction is now transferred to the hyperexponential group  $H$  by the standard isomorphism between  $W$  and  $H$  (l. c.). Let  $H^n$  be the direct product of  $n$  copies of  $H$ ; the recursive endomorphisms of  $H^n$  can then be described by  $n \times n$  matrices  $F = (f^{(ij)})$  with elements in  $\mathfrak{E}$ . If  $F = (f^{(ij)})$  is any endomorphism of  $H^n$  such that  $f^{(ij)} \in \mathfrak{E}^+$ , then an abelian formal Lie group  $G$  of dimension  $n$  can be associated with this endomorphism; the construction of  $G$  proceeds via its hyperalgebra. Conversely, every abelian formal Lie group  $G$  of dimension  $n$  over  $K$  is associated with such an endomorphism of  $H^n$  in this way. If the universal group  $U$  is used in place of  $H$ , then  $G$  is actually obtained as a homomorphic image of  $U^n$ . Several examples are considered in detail; they include 2-dimensional groups of the „streak“, „tree“ and „braid“ type, defined by endomorphisms

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & t^s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^s & 0 \end{pmatrix}$$

respectively of  $H^2$ . The author then considers homomorphisms of abelian groups and shows: If  $G, \bar{G}$  are two such groups of dimensions  $n$  and  $m$  respectively, then each homomorphism of  $G$  into  $\bar{G}$  is associated with an  $n \times m$  matrix of elements of  $\mathfrak{E}^+$ ; if  $G$  and  $\bar{G}$  themselves are associated with endomorphisms  $U$  and  $V$  of  $H^n$ , then they are isomorphic if and only if  $\pi I - tU$  and  $\pi I - tV$  are equivalent. These theorems are used to establish relations between the 2-dimensional groups constructed, to give examples of simple abelian Lie groups of dimension exceeding 1, and to define a duality of abelian Lie groups based on the operation of forming the transpose of the matrix  $U$ .

P. M. Cohn.

Patterson, E. M.: Note on three-dimensional Lie groups. Proc. Glasgow math. Assoc. 2, 112—115 (1955).

The author enumerates all 3-dimensional Lie algebras over the reals by the following elementary method. Let  $c_{jk}^i$  be the constants of structure with respect to some base. Let  $\varepsilon^{ijk}$  be 0 if two indices are the same, and be sign  $(i j k)$  in the re-



maning cases. Introduce  $a^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ipq} e_{pq}^j$ . The  $(3 \times 3)$ -matrix  $A = (a^{ij})$  has the property that its adjoint matrix (i. e. the matrix whose product with  $A$  is the scalar matrix  $\det A$ ) is symmetric. Conversely any such matrix  $(a^{ij})$  is obtained from a unique set of structural constants in the above way. Further if  $A$  and  $A^*$  are the associated matrices of two sets of structural constants of the same Lie algebra, then either  $A$  and  $A^*$  are equivalent as matrices or  $A$  and  $-A^*$ . We call this quasi-equivalence. The converse also holds. So the classification of 3-dimensional Lie algebras is reduced to the enumeration of the quasi-equivalence classes of  $(3 \times 3)$ -matrices whose adjoints are symmetric. The method is only applicable in 3-dimensional Lie algebras.

W. T. van Est.

**Schöneborn, Heinz:** Über eine Klasse von topologischen Gruppen. *Math. Z.* **61**, 357—373 (1955).

The author investigates topological groups  $A$  that have a neighborhood basis at the neutral element consisting of normal subgroups  $N_\nu$ . Any topological group referred to henceforth will be supposed to be of this type. A group is said to be linearly compact if any filter of cosets of (possibly different) closed subgroups has a nonvacuous intersection. The author proved in a previous paper (this *Zbl.* **55**, 22, 256) that for any linearly compact abelian  $A$ ,  $A/N_\nu$  satisfies the descending chain condition, and vice versa. One of the chief aims of the present paper is to investigate what the implications of linear compactness are in the non-abelian case. A subgroup  $B \subset A$  is said to be large if there exists a closed normal subgroup  $N \subset B$  of  $A$  such that  $A/N$  satisfies the descending chain condition for subgroups. Various properties of large subgroups are derived. Further if for a locally solvable group (in a sense defined by the author)  $A$  the completion  $\hat{A}$  is linearly compact, then any open subgroup of  $A$  is large in  $A$  and conversely. Further the author also proves various theorems on Sylow subgroups (as defined by him). Finally we mention: If  $A$  is locally solvable and linearly compact then  $A$  contains an abelian normal subgroup  $N$  such that  $A/N$  is compact. If in addition  $A$  is completely divisible, then  $A$  is abelian, and if instead any Sylow subgroup of  $A$  is compact, then  $A$  is compact.

W. T. van Est.

**Goto, Morikuni:** Dense imbedding of locally compact connected groups. *Ann. of Math.*, II. Ser. **61**, 154—169 (1955).

The purpose of the paper is to generalize various results on imbeddings of Lie groups into Lie groups to imbeddings of locally compact groups into locally compact groups. The first result proved by the author is: Let  $G$  be a locally compact connected group whose inner automorphism group is closed in the total automorphism group. Then every imbedding of  $G$  is closed if and only if the centre of  $G$  is compact. This is a generalization of a result of van Est. The second result generalizes a result of Malcev-Goto namely: Let  $G$  and  $H$  be locally compact connected and  $\varphi: G \rightarrow H$  a dense imbedding of  $G$ . If  $H$  satisfies the second countability axiom, then there is a one parameter subgroup  $X \subset G$  such that  $\varphi(G)\varphi(X) = H$ ;  $\overline{\varphi(X)} = \text{closure of } \varphi(X)$ . If the second countability axiom for  $H$  is dropped then there still exists an abelian Lie subgroup  $V \subset G$  such that  $\overline{\varphi(V)}$  is compact and  $\varphi(G)\overline{\varphi(V)} = H$ . The paper contains a number of examples and counterexamples. W. T. van Est.

**Goto, Morikuni:** On the group of automorphisms of a locally compact connected group. *Mem. Amer. math. Soc.* **14**, 23—29 (1955).

Let for a connected locally compact group  $G$  with totally disconnected center the 1-component of the (bicontinuous) automorphisms group of  $G$  be denoted by  $\mathfrak{A}(G)$ . Then  $\mathfrak{A}(G)$  is locally compact, and has no center, and for some  $k$  all continuous automorphisms of  $\mathfrak{A}(G)$ ,  $l \geq k$ , are inner. [See C. Chevalley, *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **30**, 274—275 (1944); E. Schenkman, this *Zbl.* **54**, 18.]

H. Freudenthal.

**Mostow, G. D.:** Some new decomposition theorems for semi-simple groups. Mem. Amer. math. Soc. **14**, 31—54 (1955).

Theorems about the decomposition of symmetric and nonsingular matrices give the algebraic tools for the topological investigation of the factor space of a Lie group by a semi-simple subgroup (eventually it is a fiber bundle with euclidean fibers with the factor space of a compact group as base):  $\mathfrak{K} + \mathfrak{G}$  is supposed to be a Cartan decomposition of the semi-simple  $\mathfrak{G}$  with  $\mathfrak{K}$  compact.  $\mathfrak{G}'$  a linear subspace of  $\mathfrak{G}$  with  $[x, y] \in \mathfrak{G}'$  for  $x, y \in \mathfrak{G}'$ ,  $\mathfrak{F}$  the set of  $X \in \mathfrak{G}$  orthogonal to  $\mathfrak{G}'$  in the sense of the Killing-Cartan form of  $\mathfrak{G}$ . Then the Lie group  $G$  of  $\mathfrak{G}$  is topologically  $K \cdot F \cdot E'$ , where  $K$  is the compact group of  $\mathfrak{K}$ ,  $F = \exp \mathfrak{F}$ ,  $E' = \exp \mathfrak{G}'$ . — If  $\mathfrak{G}'$  is a semi-simple subalgebra of a real  $\mathfrak{G}$ , then a Cartan decomposition of  $\mathfrak{G}'$  may be extended to  $\mathfrak{G}$ .

*H. Freudenthal.*

**Borel, A. and C. Chevalley:** The Betti numbers of the exceptional groups. Mem. Amer. math. Soc. **14**, 1—9 (1955).

The Poincaré polynomials of the exceptional compact groups are calculated. They are products of binomials  $1 + t^i$ , where the exponents  $i$  are:  $G_2$ : 3, 11.  $F_4$ : 3, 11, 15, 23.  $E_6$ : 3, 9, 11, 15, 17, 23.  $E_7$ : 3, 11, 15, 19, 23, 27, 35.  $E_8$ : 3, 15, 23, 27, 35, 39, 47, 59.

*H. Freudenthal.*

**Bott, R. and H. Samelson:** The cohomology ring of  $G/T$ . Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 490—493 (1955).

Les groupes de cohomologie entière du quotient  $G/T$  d'un groupe de Lie compact connexe  $G$  par un tore maximal  $T$  sont sans torsion et sont complètement connus [Bott, ce Zbl. **57**, 22; le rapp., Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 1147—1151 (1954)]. La Note analysée ici met en relations l'anneau de cohomologie entière  $H^*(G/T, \mathbb{Z})$  de  $G/T$  avec la structure infinitésimale de  $G$ . A cet effet, les AA. construisent, à l'aide d'une succession de fibrations de fibres homéomorphes à la sphère à deux dimensions, une variété compacte  $B$  de dimension égale à celle de  $G/T$ , dont l'anneau de cohomologie est le quotient d'un anneau de polynômes par un idéal qu'engendrent des éléments de degré 4 dont l'expression fait intervenir les entiers de Cartan de  $G$ . Ils définissent ensuite une application  $f: B \rightarrow G/T$  dont ils montrent qu'elle a le degré 1; de cela et de résultats connus on déduit que  $f^*$  applique  $H^*(G/T, \mathbb{Z})$  isomorphiquement sur le plus petit addende direct de  $H^*(B, \mathbb{Z})$  qui contient le sous-anneau engendré par  $f^*(H^2(G/T, \mathbb{Z}))$ . La détermination de  $H^*(G/T, \mathbb{Z})$  est donc, en principe, ramenée à celle de ce dernier groupe, que les AA. décrivent en utilisant les coefficients des racines exprimées comme combinaisons linéaires de racines fondamentales. On retrouve en particulier l'absence de torsion dans  $H^*(G/T, \mathbb{Z})$ . La Note se termine par l'étude de  $H^*(G_2/T, \mathbb{Z})$ , où  $G_2$  est le premier groupe exceptionnel, et par des remarques sur la cohomologie de  $G/K$  lorsque  $K$  est un sous-groupe connexe contenant  $T$ .

*A. Borel.*

**Harish-Chandra:** Integrable and square-integrable representations of a semi-simple Lie group. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 314—317 (1955).

Soient  $G$  un groupe de Lie connexe semi-simple admettant une représentation linéaire fidèle de dimension finie,  $\mathfrak{g}_0$  son algèbre de Lie,  $dx$  une mesure de Haar normalisée une fois pour toutes sur  $G$ ,  $\pi$  une représentation unitaire irréductible de  $G$  dans un espace hilbertien  $\mathfrak{H}$ ;  $\pi$  est dite de carré intégrable s'il existe  $\psi \in \mathfrak{H}$ ,  $\psi \neq 0$  tel que  $x \rightarrow (\psi, \pi(x) \psi)$  soit de carré intégrable sur  $G$ . Posons  $\int_G |(\psi, \pi(x) \psi)|^2 dx = \frac{1}{d_\pi}$  pour  $\psi$  unitaire. Soit  $\mathfrak{E}$  l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de  $G$ . Soit  $\mathfrak{E}_0$  la partie de  $\mathfrak{E}$  correspondant aux représentations de carré intégrable. Si  $\omega \in \mathfrak{E}_0$  et  $\pi \in \omega$ , posons  $d_\omega = d_\pi$ . Pour  $f$  indéfiniment différentiable à support compact sur  $G$ , on a la formule  $\int_G |f(x)|^2 dx = \int_{\mathfrak{E}} N_\omega(f) d\mu$  où  $N_\omega$  est le



carré de la norme d'Hilbert-Schmidt de  $\int_G f(x) \pi(x) dx$ ,  $d\mu$  étant une certaine mesure positive sur  $\mathfrak{G}$  bien déterminée. Alors (th. 3), si  $G$  est simple non compact, de premier nombre de Betti égal à 1, et si toute racine positive non compacte est totalement positive au sens d'une note antérieure de l'A. (ce Zbl. 56, 259), on a  $\mu(\{\omega\}) = d_\omega$  pour  $\omega \in \mathfrak{G}_0$ . D'autre part (th. 2) l'A. obtient pour  $d_\pi$  (considéré comme l'analogue du degré) une formule qui ressemble à celle de Weyl, lorsque la représentation  $\pi$  correspond (d'une manière explicite) à certaines formes linéaires sur une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$ , formes assujetties à prendre en certains points des valeurs entières  $\geq 0$  ou  $> 0$ . J. Dixmier.

**Bartle, Robert G.: Implicit functions and solutions of equations in groups.** Math. Z. 62, 335—346 (1955).

L'A. généralise à des groupes métrisables et complets la méthode classique des approximations successives, bien connue dans le cas des espaces de Banach, et ses applications au théorème des fonctions implicites; la notion de dérivée non nulle est remplacée par la notion plus générale d'homomorphisme „régulier“ („smooth“)  $h$ : lorsque  $h$  est injectif, cela signifie que  $|h(x)| \geq \alpha |x|$ , avec  $\alpha > 0$ , lorsque  $|x|$  est assez petit ( $|x|$  et  $|h(x)|$  sont des distances invariantes par translation dans les groupes considérés). L'A. examine aussi dans quelles conditions on peut affirmer que le nombre de solutions de  $f(x) = y$  ( $x$  et  $y$  dans des groupes métrisables et complets) reste constant lorsque  $y$  varie, ou dans quels cas on peut affirmer que ces solutions forment un continu pour  $y$  voisin de  $y_0$ , lorsqu'on sait qu'elles forment un continu pour  $y = y_0$ . J. Dieudonné.

**Enomoto, Shizu: Sur la structure des fonctions d'ensemble dans les groupes topologiques localement compacts. I.** Proc. Japan. Acad. 31, 284—287 (1955).

Let  $G$  be a  $\sigma$ -compact and locally compact topological group. A sequence  $\{V_n\}$  of neighbourhoods of the unit of  $G$  is said to be a branch if (i)  $\bar{V}_n$  is compact for  $n = 1, 2, \dots$ ; (ii)  $V_{n+1} V_{n+1}^{-1} \in V_n$  for  $n = 1, 2, \dots$ ; (iii) for each  $x \in G$  there exists an integer  $n_0(x)$  such that  $V_{n+1} x \subset V_n$  for  $n \geq n_0(x)$ ; (iv) the interior of  $V_1 V_2 V_3 \dots$  is empty. For every sequence  $\{U_n\}$  of neighbourhoods of the unit of  $G$  there exists a branch  $\{V_n\}$  such that  $V_n \subset U_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). If  $\{V_n\}$  is a branch, then  $H = V_1 V_2 V_3 \dots$  is a compact invariant subgroup of  $G$  and the group  $G/H$  is metrizable, separable and locally compact. R. Sikorski.

**Ribeiro, Hugo: Topological groups and Boolean algebras with operators.** Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 4, 195—200 (1955).

A topological group  $G$  is together a complex algebra (i. e. the Boolean algebra of all subsets of  $G$  with the operations  $X \cdot Y$  and  $X^{-1}$  for  $X, Y \subset G$  corresponding to the group operations in  $G$ ) and a closure algebra (i. e. the Boolean algebra of all subsets of  $G$  with the closure operations  $\bar{X}$  for  $X \subset G$ ). The purpose of the reviewed paper is to describe a topological group only in terms of the theory of Boolean algebras with operators  $X \cdot Y$ ,  $X^{-1}$  and  $\bar{X}$ . R. Sikorski.

### Verbände. Ringe. Körper:

**Tarski, Alfred: A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications.** Pacific J. Math. 5, 285—309 (1955).

Eine Abbildung  $f(x)$  des Verbandes  $A$  in sich heißt wachsend, wenn aus  $x \leq y$  stets  $f(x) \leq f(y)$  folgt. Es gilt der Fixpunktsatz: Jede wachsende Abbildung  $f(x)$  eines vollständigen Verbandes in sich besitzt eine nichtleere Menge  $P$  von Fixpunkten [d. h.  $f(x) = x$ ],  $P$  ist selbst wieder ein vollständiger Verband. Dieser Satz gilt allgemeiner für die Menge der gemeinsamen Fixpunkte einer Klasse untereinander vertauschbarer (d. h.  $f(g(x)) = g(f(x))$ ) wachsender Abbildungen eines vollständigen

Verbandes in sich. Ein total geordneter vollständiger Verband heißt ein stetig geordnetes System; besitzt ein Verband  $A$  zu zwei Elementen  $x < y$  stets ein weiteres Element  $z$  mit  $x < z < y$ , so heißt  $A$  dicht geordnet. Es werde mit  $f^*(X)$  die Menge der Bildelemente  $f(x)$ ,  $x \in X$ , bezeichnet. Eine Abbildung  $f(x)$  eines Verbandes  $A$  in sich heißt quasiwachsend, wenn für jede nichtleere Teilmenge  $X$  von  $A$  gilt  $f(\cup X) \supseteq \cap f^*(X)$  und  $f(\cap X) \subseteq \cup f^*(X)$ . Vertauschung der Ordnungsbeziehungen ergibt die quasifallenden Abbildungen. Sind nun  $f$  und  $g$  je eine quasiwachsende bzw. quasifallende Abbildung des stetig und dicht geordneten Systems  $A$  in sich und ist  $f(0) \supseteq g(0)$  und  $f(1) \subseteq g(1)$ , so ist die Menge  $P$  aller  $x$  mit  $f(x) = g(x)$  nicht leer und bildet ein stetig geordnetes System. Unter denselben Voraussetzungen für  $A$  gilt für eine quasiwachsende Abbildung  $f(x)$ , für die ein  $c \in A$  existiert mit  $f(0) \supseteq c \supseteq f(1)$ , daß die Menge aller  $x$  mit  $f(x) = c$  ein nichtleeres stetig geordnetes System bildet. Es werden Anwendungen auf die Theorie der vollständigen Booleschen Algebren  $B$  gemacht. Zwei Elemente  $a, b$  aus  $B$  heißen homogen,  $a \approx b$ , wenn die Booleschen Algebren  $[0, a]$  (alle  $x$  mit  $0 \leq x \leq a$ ) und  $[0, b]$  isomorph sind. Es werden einige Eigenschaften der Homogenität abgeleitet: Gilt  $a \leq b \leq c$ ,  $a' < c'$ ,  $a \approx a'$ ,  $c \approx c'$ , so gibt es ein  $b'$  mit  $a' \leq b' \leq c'$  und  $b \approx b'$ . Aus  $a_1 \cup b \approx a_2 \cup b \approx b$  folgt  $a_1 \cup a_2 \cup b \approx b$  und umgekehrt, usw. Schließlich wird eine Verallgemeinerung des Cantor-Bendixsonschen Satzes über abgeschlossene Mengen abgeleitet.

G. Köthe.

Davis, Anne C.: A characterization of complete lattices. Pacific J. Math. 5, 311—319 (1955).

Im Anschluß an die vorstehend referierte Arbeit von A. Tarski wird gezeigt, daß ein Verband dann und nur dann vollständig ist, wenn jede wachsende Abbildung von  $A$  in  $A$  einen Fixpunkt besitzt. Es wird weiter untersucht, ob ein solcher Satz für eine engere Klasse von Abbildungen richtig ist. Es heiße die Abbildung  $f(x)$  vereinigungsdistributiv, wenn stets  $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$  gilt. Ist  $A$  ein Verband mit  $\aleph_\alpha$  Elementen, so ist  $A$  dann und nur dann vollständig, wenn in  $A$  die Vereinigungen von Mengen von niedrigerer Mächtigkeit stets gebildet werden können und wenn jede vereinigungsdistributive Abbildung von  $A$  in sich einen Fixpunkt besitzt.

G. Köthe.

Lesieur, L.: Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne. Bull. Soc. math. France 83, 161—193 (1955).

L'A. donne une théorie unifiée des idéaux d'un anneau et des idéaux d'un demi-groupe, grâce à une étude approfondie de la structure des demi-groupes réticulés résiduels quasi-entiers avec élément universel satisfaisant à la condition de chaîne ascendante ou à la condition de chaîne descendante affaiblie. Il fait un grand usage de la notion de résiduel, les difficultés créées par le cas non entier étant tournées en utilisant la notion de résiduel propre. L'A. établit l'existence pour chaque élément de résiduels à gauche propres premiers en nombre nécessairement fini et il caractérise d'une façon particulièrement suggestive les résiduels à gauche propres maximaux. Il est conduit d'une manière naturelle à la notion de radical d'un élément qu'on peut définir comme le plus grand élément dont une puissance est contenue dans l'élément considéré ou comme l'intersection des sur-éléments premiers, les deux définitions étant équivalentes en toute généralité. Ceci amène à une large généralisation du théorème d'Hopkins-Brauer sur les idéaux nilpotents. La théorie de Fuchs sur la décomposition d'un élément comme intersection d'éléments premiers est également généralisée et s'applique ainsi en particulier aux idéaux bilatères d'un anneau non commutatif satisfaisant à une condition de chaîne convenable. L'A. étudie la décomposition d'un élément comme intersection d'éléments irréductibles. Il est remarquable que la possibilité d'une telle décomposition ait lieu moyennant la condition de chaîne descendante affaiblie. Une partie importante du mémoire est consacrée à l'analyse de la notion d'élément primaire à droite. Notons



ce théorème particulièrement intéressant: Pour qu'un élément soit primaire à droite, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre premier, celui-ci étant sur-élément premier minimum. Si la multiplication est commutative, la caractérisation se simplifie: Un élément est alors primaire si et seulement si il admet un seul résiduel propre premier. De cette analyse, l'A. déduit plusieurs cas où chaque élément est intersection finie d'éléments primaires à droite. Ceci n'ayant pas lieu en général même pour les idéaux bilatères d'un anneau non commutatif, il lui faut des hypothèses supplémentaires. Par exemple, si, en tant que treillis, le demi-groupe considéré est semi-modulaire et faiblement inter-continu, et si tout élément est union d'éléments principaux (cas des idéaux bilatères d'un anneau commutatif ou d'un demi-groupe commutatif), le théorème d'existence a lieu. Il a lieu aussi si le demi-groupe est entier et si tout élément est union d'éléments essentiels. Dans tous les cas considérés, l'A. donne un théorème d'unicité analogue au théorème d'Emmy Noether. Notons que, de plus, dans le dernier cas ci-dessus, il y a unicité complète de la décomposition. Ce travail très riche se termine par l'étude d'un cas où la condition de chaîne descendante affaiblie entraîne la condition de chaîne ascendante, généralisation du théorème classique sur les idéaux d'un anneau commutatif.

*R. Croisot.*

**Belousov, V. D.:** Über distributive Systeme von Operationen. Mat. Sbornik, n. Ser. **36 (78)**, 479—500 (1955) [Russisch].

Man betrachtet Systeme  $\Pi$  binärer Operationen über einer Menge  $M$  (Anzahl der Elemente  $\geq 3$ , endlich oder unendlich):  $\Pi = \{ \dots, A, \dots \}$ ; die für alle  $a, b \in M$  eindeutig definierten Operationen  $A(a, b) = c \in M$  werden alle als rechtsumkehrbar vorausgesetzt, d. h. die Gleichungen  $A(a, x) = b$  gestatten stets eine und nur eine Lösung  $x = A^{-1}(a, b)$ ,  $x \in M$ ;  $A$  heißt (links-)distributiv mit  $B$ , in Zeichen  $A d_l B$  oder einfach  $A d B$ , wenn identisch  $A[a, B(b, c)] = B[A(a, b), A(a, c)]$ ;  $\Pi$  heißt (links-) distributiv, wenn identisch  $A d B$  (für alle  $A, B \in \Pi$ ), und vollständig, wenn zu es jedem Tripel paarweise verschiedener El.  $a, b, c \in M$  (mindestens) eine Operation  $A \in \Pi$  mit  $A(a, b) = c$  gibt. Es wird bewiesen, daß in einem vollständigen, distributiven System dieses  $A$  durch solch ein Tripel eindeutig bestimmt ist, und daß aus  $A(a, b) = B(a, b)$ ,  $a \neq b$ ,  $A = B$  folgt, was sofort die Maximalität (in einem offensichtlichen Sinn) jedes vollständigen, distributiven Systems ergibt. Dagegen wird am Beispiel des Produktsystems  $\Pi_1 \times \Pi_2$  über  $M_1 \times M_2$ , definiert durch

$$(A_1, A_2) [(a_1, a_2), (b_1, b_2)] = [A_1(a_1, b_1), A_2(a_2, b_2)], \quad A_i \in \Pi_i, \quad a_i, b_i \in M_i,$$

$\Pi_1, \Pi_2$  vollständige, distributive Systeme, gezeigt, daß es maximale, distributive Systeme gibt, die nicht im obigen Sinn vollständig sind. Die vorliegende Arbeit klärt die Struktur vollst., distr. Syst. vollkommen auf und reduziert sie im wesentlichen auf die zwei folgenden Beispiele: (I)  $\Pi = \Pi(P) = \{A_p\}_{p \in P}$ ,  $p \neq 0$  mit  $A_p(a, b) = (1 - p)a + pb$ , wo  $M = P$  ein beliebiger (kommutativer) Körper ist; (II)  $\Pi = \Pi(G) = \{B_q\}_{q \in G}$  mit  $B_q(a, b) = ba^{-1}qa$ , wo  $M = G$  eine beliebige Gruppe ist. Im einzelnen wird für vollst., distr. Syst.  $\Pi$  gezeigt:  $\Pi$  wird mit dem durch  $A B(a, b) = A[a, B(a, b)]$  definierten rechten Produkt eine Gruppe, in der die rechte Einheitsoperation  $E(a, b) = b$  (identisch in  $a, b \in M$ ) die Einheit und  $A^{-1}$  das zu  $A$  inverse El. sind.  $\Pi$  ist entweder idempotent, d. h. für alle  $a \in M$ ,  $A \in \Pi$  gilt  $A(a, a) = a$  (Beispiel (I)), oder anti-idempotent, d. h. stets  $A(a, a) \neq a$  für  $A \neq E$  (Beisp. (II)). Im idempotenten Fall sind alle Operatoren  $A \neq E$  auch linksumkehrbar, und für die eindeutig bestimmte Lösung von  $A(x, b) = a$ , geschrieben  $x = {}^{-1}A(a, b)$ , gilt  ${}^{-1}A \in \Pi$ ; Adjunktion der linken Einheitsoperation  $F(a, b) = a$  und Einführung des linken Produkts  $A \circ B(a, b) = A[B(a, b), b]$  ergibt Symmetrie zwischen links und rechts in  $\Pi' = \Pi \cup \{F\}$ ; es gilt identisch  $A[B(a, b), B(c, d)] = B[A(a, c), A(b, d)]$ , insb.  $K[K(a, b), K(c, d)] = K[K(a, c), K(b, d)]$

für alle  $a, b, c, d \in M$  und  $A, B, K \in \Pi'$ ;  $M$  bildet also für jedes  $K \neq E, F$  eine sogenannte abelsche Quasigruppe [K. Toyoda, Proc. Imp. Acad. Tokyo 17, 221—227 (1941); D. C. Murdoch, dies. Zbl. 25, 100]. Unter wesentlicher Verwendung gewisser Automorphismenbegriffe und insbesondere der Resultate von Murdoch (l. c.), kann für jedes idempotente, vollst., distr. Syst.  $\Pi$  die Grundmenge  $M$  auf verschiedene, jedoch körperisomorphe Weisen explizit so als Körper  $\mathcal{P}(K, 0, 1)$  organisiert werden, daß  $\Pi = \Pi(P)$  (s. (I)) wird, wo  $K \in \Pi$ ,  $0, 1 \in M$  bis auf  $K \neq E, F$  und  $0 \neq 1$ , beliebig gewählt werden können. Z. B. ist die Addition in  $P$  durch  $a + b = K[-^1K(a, 0), K^{-1}(0, b)]$  definiert; der Isomorphismus  $\varphi: x \rightarrow x' = \varphi x$  ( $x, x' \in M$ ) von  $P = \mathcal{P}(K, 0, 1)$  auf  $P' = \mathcal{P}(K', 0', 1')$  ist eine lineare Substitution  $\varphi x \equiv x(1' - 0') + 0'$  (Produkt,  $+$  und  $-$  in  $P$ ). Im anti-idempotenten Fall definiert  $A(x, x) = x$  eine einfach transitive Gruppe  $\mathfrak{A}$  von Permutationen  $\chi$  der Menge  $M$ .  $A \leftrightarrow \alpha$  definiert einen Anti-Isomorphismus der Gruppe  $\Pi$  (organisiert durch das rechte Produkt) mit  $\mathfrak{A}$ . Für jedes  $p \in M$  erhält man durch  $a = \chi p$  eine ein-eindeutige Korrespondenz von  $\mathfrak{A}$  auf  $M$  und organisiert schließlich  $M$  durch  $ab = \alpha \beta p$ , wo  $a \leftrightarrow \alpha$ ,  $b \leftrightarrow \beta$ , d. h.  $a = \alpha p$ ,  $b = \beta p$ , als eine bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmte Gruppe  $G = G(p)$ , so daß  $\Pi = \Pi(G)$  wird (s. (II)). Man verifiziert, daß für beliebiges  $L \in \Pi$   $L(a, b) = L(\alpha p, \beta p) = L(\alpha p, \beta \alpha^{-1} \alpha p) = \beta \alpha^{-1} L(\alpha p, \alpha p) = \beta \alpha^{-1} \lambda \alpha p = b \alpha^{-1} a$ , wo  $L \leftrightarrow \lambda \leftrightarrow l$ , d. h.  $L(x, x) = \lambda x$ ,  $l = \lambda p = L(p, p)$ , also  $L = B_l$  in (II).  
D. Tamari.

Foster, Alfred L.: The identities of — and unique subdirect factorization within — classes of universal algebras. Math. Z. 62, 171—188 (1955).

Continuing his earlier work (this Zbl. 51, 22, 262), the author calls a universal algebra primal if it is functionally strictly complete (l. c.) and has more than one element. A class of algebras  $\{\mathfrak{A}_i\}$  of a given species is called strictly independent if for each set of words  $\{\Phi_i\}$  (in any indeterminates) there is a word  $\Phi$  in the same indeterminates such that  $\Phi = \Phi_i$  is a strict identity in  $\mathfrak{A}_i$ . As  $\Phi$  can contain only a finite number of indeterminates, any strictly independent class of algebras is necessarily finite, but infinite classes exist in which every finite subclass is strictly independent. Such classes are called clusters, and a primal cluster is one whose elements are all primal algebras. Example: The basic Post algebras (l. c.) form a primal cluster, likewise the  $n$ -fields (a class of algebras which includes all finite fields) and even the class of all  $n$ -fields and Post algebras together. A Basic Theorem states: If  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$  are in the same primal cluster, then the algebras which are isomorphic to subalgebras of the direct product of any powers of the  $\mathfrak{P}_i$  are precisely the algebras (of the same species as the  $\mathfrak{P}_i$ ) which satisfy all the strict identities common to  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ . Further, for any algebra with more than one element which is „subdirectly representable“ in this way, the subdirect factors are uniquely determined in the cluster. — Finally some open questions concerning „maximal“ clusters are raised.

P. M. Cohn.

• Queysanne, M. et A. Delachet: L'algèbre moderne. (Que sais-je? No. 661.) Paris, Presses Universitaires de France 1955. 136 p.

Eine kurze geschichtliche Einleitung als erster Teil beschreibt die Entwicklung der klassischen und die Entstehung der modernen Algebra, wobei der Leser bereits mit komplexen Zahlen, Substitutionsgruppen, Restklassen, Quaternionen, Matrizen und ganzen algebraischen Zahlen bekannt gemacht wird. Der zweite Teil bringt in Anlehnung an Bourbaki die Grundbegriffe der modernen Algebra: Verknüpfungen (lois de compositions), algebraische Strukturen, Gruppen, Ringe, Ideale, Körper, Isomorphismen, Automorphismen, Äquivalenzrelationen, Homomorphismen. Der dritte Teil enthält einige Anwendungen dieser allgemeinen Begriffe: Aufbau des Zahlensystems, Vektorräume, hyperkomplexe Zahlen, Polynomringe, Teilbarkeit in Ringen (dabei auch ein kurzer Hinweis auf die Rolle der Ideale in der algebraischen



(Geometrie). Bildung des Zerfällungskörpers eines Polynoms, algebraische Abgeschlossenheit des Körpers der komplexen Zahlen (als Théorème de d'Alembert bezeichnet). Auf diese Weise ist eine sehr zweckmäßige und gut lesbare Einführung in die heutige Algebra entstanden, die — abgesehen von wenigen Ausnahmen — vom Leser nicht mehr Vorkenntnisse voraussetzt als Schulmathematik. Einige kleinere Mängel: Der Versuch auf S. 43, zwischen der Herleitung eines Theorems und der Lösung eines Problems zu unterscheiden, muß wohl als mißlungen bezeichnet werden; die von Bourbaki abweichende Einführung der Polynome auf S. 114 ist unklar; der auf S. 130—133 gegebene Beweis für die algebraische Abgeschlossenheit des komplexen Zahlkörpers ist erheblich umständlicher als der auf einen Laplaceschen Ansatz zurückgehende Beweis von Dörge [S.-Ber. preuß. Akad. Wiss. Berlin 1928, 87—89 (1928)], der auch nicht mehr Hilfsmittel benötigt. *G. Pickert.*

**Tallini, Giuseppe:** *Sui sistemi a doppia composizione ordinati archimedei.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 367—373 (1955).

Ein (nicht notwendig assoziativer) archimedisch angeordneter Ring läßt sich isomorph in den Körper der reellen Zahlen abbilden. — Diesen Satz kann man weit kürzer als in dieser Arbeit geschehen unter Benutzung der folgenden bekannten Tatsachen beweisen: 1. Jede archimedisch angeordnete Gruppe läßt sich isomorph in die additive Gruppe  $R^+$  der reellen Zahlen abbilden. 2. Jeder monotone Isomorphismus in  $R^+$  einer Untergruppe von  $R^+$  wird durch Multiplikation mit einer reellen Zahl bewirkt. Ist nämlich — und nach 1. kann man sich auf diesen Fall beschränken — in einer Untergruppe von  $R^+$  eine beiderseits distributive Verknüpfung  $\circ$  gegeben, so liefert 2. eine Abbildung  $x \rightarrow x'$  mit  $x \circ y = x' y$ , und wiederum nach 2. ist  $x' = c x$ , so daß bei der Abbildung  $x \rightarrow c x$  die Verknüpfung  $\circ$  in die Multiplikation übergeht. *G. Pickert.*

**Pollák, G.:** *Lösbarkeit eines Gleichungssystems über einem Ringe.* Publ. math., Debrecen 4, 87—88 (1955).

Polynome (beliebiger Anzahl) aus einem Polynomring (mit beliebig vielen Erzeugenden) über dem Ring  $R$  besitzen genau dann in passendem Oberring von  $R$  ein gemeinsames Nullstellensystem, wenn das von den Polynomen erzeugte Ideal kein Element  $\neq 0$  von  $R$  enthält. *G. Pickert.*

**Kertész, A.:** *The general theory of linear equation systems over semi-simple rings.* Publ. math., Debrecen 4, 79—86 (1955).

Betrachtet werden in einem Ring  $R$  lineare Gleichungssysteme mit beliebig vielen Gleichungen und beliebig vielen Unbekannten, bei denen in jeder Gleichung nur endlich viele Koeffizienten  $\neq 0$  sind, die Unbekannten aber keiner derartigen Beschränkung unterworfen sind. Das Gleichungssystem heißt verträglich, wenn durch lineare Kombination niemals eine falsche Beziehung zwischen Elementen von  $R$  entsteht. Ein verträgliches Gleichungssystem kann aufgefaßt werden als  $R$ -Homomorphismus  $\varphi$  in  $R$  eines Untermoduls  $M$  eines freien  $R$ -Moduls mit der Erzeugendenmenge  $X$ . Eine Lösung in  $R$  ist dann eine Abbildung von  $X$  in  $R$ , deren Fortsetzung zu einem  $R$ -Homomorphismus des freien  $R$ -Moduls in  $M$  mit  $\varphi$  übereinstimmt.  $R$  ist genau dann halbeinfach, wenn jedes verträgliche Gleichungssystem bereits in  $M^\varphi$  eine Lösung besitzt. In diesem Fall werden noch sämtliche Lösungen eines homogenen verträglichen Gleichungssystems als Linearkombinationen von gewissen Lösungen dargestellt. *G. Pickert.*

**Szele, T.:** *Nilpotent Artinian rings.* Publ. math., Debrecen 4, 71—78 (1955).

Unter einem Artinschen Ring versteht man einen solchen mit  $U$ -Kettenbedingung für die Linksideale. Die additive Gruppe eines nilpotenten Artinschen Rings erfüllt nun die  $U$ -Kettenbedingung auch für ihre Untergruppen. Der Satz von Kuroš über derartige Gruppen (dies. Zbl. 3, 243) ermöglicht daher weitere Aussagen über die Struktur nilpotenter Artinscher Ringe. Nach einer angefügten Bemerkung läßt sich das Ergebnis über die Untergruppen der additiven Gruppe bei

einem nilpotenten Ring bereits aus der  $U$ -Kettenbedingung für die zweiseitigen Ideale gewinnen. *G. Pickert.*

**Szendrei, J.:** On the Jacobson radical of a ring. Publ. math., Debrecen 4, 93—97 (1955).

Es wird ein einfacher Beweis dafür angegeben, daß das Jacobsonsche Radikal  $J(I)$  des Ideals  $I$  eines Ringes  $R$  gleich  $J(R) \cap I$  ist.  $J(R)$  besteht nun aus genau den  $x \in R$  mit  $xI \subseteq J(I)$ , deren Restklassen nach  $I$  in  $J(R/I)$  liegen. Dieses Ergebnis wird auf den Fall angewandt, daß  $R$  als Schreiersche Erweiterung (dies. Zbl. 47, 266) von  $I$  gegeben ist. *G. Pickert.*

**Fuchs, L.:** On a new type of radical. Acta Sci. math. 16, 43—53 (1955).

Die Arbeit ist eine neue Version einer früheren ungauisch gefaßten Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 49, 20—21) mit erweitertem Inhalt. Insbesondere wird das Verhältnis des vom Verf. eingeführten Zeroid-Radikals  $Z$  eines Ringes  $R$  zu den wichtigsten bekannten Radikalen näher untersucht, auch werden gewisse neue Beispiele (volle Matrizenringe, kommutative Ringe) erörtert. In der Richtung des am Schluß des zitierten Referats erwähnten Problems der Radikalfreiheit von  $R/Z$  wurde das Resultat erzielt, daß das Nil-Radikal von  $R/Z$  stets 0 ist. *L. Rédei.*

**Ehrlich, Gertrude:** A note on invariant subrings. Proc. Amer. math. Soc. 6, 470—471 (1955).

Let  $R$  be a complete matrix ring of order  $n \geq 2$  over a ring with identity with characteristic  $\neq 2$ . The author proves that any proper invariant subfield of  $R$  with the same identity element as  $R$  is contained in the center of  $R$ . *L. K. Hua.*

**Almeida Costa, A.:** On modules and rings with operators. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 4, 5—62 (1955).

Ce travail fait suite à une série d'intéressantes publications de l'A. sur des questions d'algèbre moderne. De caractère spécialement expositif il se développe d'accord avec la Table de matières suivante: Modules with operators. Irreducible ideal rings. Rings with operators. Simple rings. Non-associative rings. Theory of the discrete direct sums. Semi-simple modules. Irreducible rings. Closed rings. *G. Ancochea.*

**Amitsur, S. A.:** On rings with identities. J. London math. Soc. 30, 464—470 (1955).

L'A. prouve que tout anneau PI (ce Zbl. 50, 29)  $S$  est régulier dans le sens d'Ore;  $S$  admet donc un corps (gauche)  $K$  des quotients.  $K$  satisfait aux mêmes identités que  $S$  et il est d'ordre fini par rapport à son centre. — Un raffinement de résultats antérieurs, concernant les anneaux PI sans idéaux nilpotents, est appliqué à l'étude des anneaux associatifs dont la structure de Lie est résoluble ou satisfait à la condition d'Engel. *G. Ancochea.*

**Amitsur, S. A.:** The  $T$ -ideals of the free ring. J. London math. Soc. 30, 470—475 (1955).

Soit  $F[x]$  l'algèbre associative libre, sur un corps  $K$ , engendrées par un ensemble infini  $\{x_i\}$  d'indéterminées. Un idéal de  $F[x]$  est dit  $T$ -idéal quand il contient son transformé pour tout endomorphisme de  $F[x]$ . Tous les  $T$ -idéaux sont primaires. Les  $T$ -idéaux premiers sont les idéaux  $M_n$  de  $F[x]$  engendrés par les identités auxquelles satisfont les matrices d'ordre  $n$  sur  $F[x]$ . *G. Ancochea.*

**Fujiwara, Tsuyoshi:** Note on the isomorphism problem for free algebraic systems. Proc. Japan Acad. 31, 135—136 (1955).

Das Wortproblem für allgemeine freie algebraische Systeme wird unter gewissen Bedingungen gelöst. *K. Shoda.*

**Nishi, Mico:** On the dimension of local rings. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 29, 7—9 (1955).

Verfasser gibt einen sehr kurzen Beweis für den folgenden Satz: Es sei  $\mathfrak{R}$  ein Stellenring von der Dimension  $n$  mit der vollständigen Hülle  $\mathfrak{R}^*$ , und es seien



$\mathfrak{p}_i^*$  ( $i = 1, \dots, n$ ) die minimalen Primoberideale des Nullideals in  $\mathfrak{R}^*$ . Hat dann jeder der Ringe  $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{p}_i^*$  die Dimension  $n$ , so ist bei jedem Primideal  $\mathfrak{p}$  aus  $\mathfrak{R}$  die Summe von Dimension und Dimensionsdefekt (Rang) gleich  $n$ . — Dieses allgemeine Theorem enthält als Spezialfälle die Sätze von Chevalley und Cohen, nach denen die Behauptung über die  $\mathfrak{p}$  aus  $\mathfrak{R}$  richtig ist, wenn  $\mathfrak{R}$  entweder einen geometrischen oder einen nullteilerfreien, vollständigen Stellenring darstellt. Das Cohensche Resultat wird beim Beweise an wesentlicher Stelle benutzt. *W. Krull.*

**Nagata, Masayoshi:** Basic theorems on general commutative rings. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A **29**, 59—77 (1955).

Eine ausgezeichnete, knappe und durchsichtige Herleitung der Hauptsätze der Idealtheorie kommutativer Ringe mit Einheitselement. Ausgehend von der Theorie der Quotientenringe behandelt Verf. u. a. die ganz abhängigen Ringerweiterungen (Nr. 5), die Ringe mit Minimalbedingung (Nr. 7), die Sätze über Primidealketten in Noetherschen Ringen (Nr. 8), die normalen, d. h. ganz abgeschlossenen Noetherschen Integritätsbereiche (Nr. 9). Die Theorie der Noetherschen Stellenringe wird bewußt beiseite gelassen. Charakteristisch für die jeden Bezug auf die Bewertungstheorie vermeidende Darstellung ist z. B. die Kennzeichnung der normalen Noetherschen Integritätsbereiche. Ein Noetherscher Integritätsbereich  $J$  ist dann und nur dann normal, wenn kein Hauptideal eine eingebettete Primärkomponente besitzt und wenn außerdem für jedes minimale Primideal  $\mathfrak{p}$  aus  $J$  der Quotientenring  $J_{\mathfrak{p}}$  normal (und damit ein Hauptidealring mit einem einzigen Primelement) wird. Besonders elegant ist die Entwicklung der Theorie der Quotientenringe. Hier wird systematisch die Möglichkeit mit einbezogen, daß das multiplikativ abgeschlossene System  $S$ , mit dessen Hilfe der Quotientenring gebildet werden soll, Nullteiler enthält.

*W. Krull.*

**Nakano, Noboru:** Über den Primäridealquotienten im unendlichen algebraischen Zahlkörper. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **18**, 257—269 (1955).

Verf. setzt seine an der gleichen Stelle erschienenen, elementar-idealtheoretischen, jeden Bezug auf die Bewertungstheorie vermeidenden Untersuchungen über Prim- und Primärideale in unendlichen algebraischen Zahlkörpern fort. Hier werden für zwei Primärideale  $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q}$  das Aussehen des Idealquotienten  $\mathfrak{q} : \mathfrak{q}'$  und die Frage nach der Gültigkeit einer Gleichung  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cdot \mathfrak{q}''$  behandelt. *W. Krull.*

**Nakano, Noboru:** Idealtheorie im Stiemkeschen Körper. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **18**, 271—287 (1955).

Die Idealtheorie in der Hauptordnung eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers wird unter der Voraussetzung, daß jedes Ideal nur unendlich viele Primoberideale besitzt, ohne Zuhilfenahme der Bewertungstheorie entwickelt.

*W. Krull.*

**Mori, Shinziro:** Über den Durchschnitt  $\bigcap_{\alpha} \mathfrak{a}_{\alpha}$  der Ideale  $\mathfrak{a}_{\alpha}$ . Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A **29**, 79—88 (1955).

Zu den bekannten für die Idealdurchschnitte  $\bigcap_n (\mathfrak{a}^n + \mathfrak{c})$  bei Noetherschen Ringen gültigen Sätzen gibt es schon bei ganz einfachen Ringen ohne Maximalbedingung kein Gegenstück mehr. Um hier weiterzukommen, bildet Verf. zu jedem  $\mathfrak{a}$  die Menge aller der  $\mathfrak{a}_{\alpha}$ , die dasselbe Radikal besitzen wie  $\mathfrak{a}$ . Er betrachtet dann — ohne die Forderung der Existenz eines Einheitselementes — die Klasse aller der Ringe  $\mathfrak{R}$ , in denen sich jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen (völlig beliebigen, also vor allem nicht notwendig im Noetherschen Sinne „starken“) Primäridealen darstellen läßt. Für diese Klasse gewinnt er in § 1 zunächst als Gegenstück zu dem von Zariski im Noetherschen Falle für  $\bigcap_n (\mathfrak{a}^n + \mathfrak{c})$  bewiesenen Durchschnittssatz das Theorem: es sei  $\mathfrak{c} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$  eine kürzeste Durchschnittsdarstellung von  $\mathfrak{c}$  durch Primärideale, und es seien zwar für  $i = r + 1, \dots, n$ , aber für kein  $i \leq r$  gleichzeitig die folgenden beiden Bedingungen erfüllt: a)  $\mathfrak{R}|\mathfrak{q}_i$  besitzt

ein Einheitsselement;  $\alpha + q_i = \mathfrak{R}$ . Dann wird  $\bigcap_{\alpha} (\alpha_x + c) = q_1 \cap \cdots \cap q_r$ . — Weiter leitet Verf. u. a. die wichtige Formel ab:  $\bigcap_{\alpha} (\alpha_x + (c_1 \cap c_2)) = \left[ \bigcap_{\alpha} (\alpha_x + c_1) \right] \cap \left[ \bigcap_{\alpha} (\alpha_x + c_2) \right]$ . In § 2 untersucht er den Zusammenhang zwischen  $\bigcap_{\alpha} (\alpha_x + c)$  und  $\bigcap_n (\alpha^n + c)$ . Hier erhält er für seine Ringklasse den Satz: Es wird dann und nur dann  $\bigcap_{\alpha} (\alpha_x + c) = \bigcap_n (\alpha^n + c)$  für jedes Idealpaar  $\alpha, c$ , wenn für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  und jedes Primärideal  $q \neq \mathfrak{R}$  stets  $\bigcap_n (\mathfrak{p}^n + q) = q$  wird, falls nicht  $\bigcap_n (\mathfrak{p}^n + q) = \mathfrak{R}$  ist und dabei  $\mathfrak{R}|q$  ein Einheitsselement besitzt. (Bei Noetherschen Ringen ist natürlich trivialerweise stets  $\bigcap_{\alpha} (\alpha_x + c) = \bigcap_n (\alpha^n + c)$ ). *W. Krull.*

**Tominaga, Hisao and Tetsuo Yamada:** On the  $\pi$ -regularity of certain rings. Proc. Japan Acad. **31**, 253—256 (1955).

Die vorliegende Note verallgemeinert gewisse Ergebnisse aus zwei Arbeiten von Azumaya [J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I **13**, 34—39 (1954)] bzw. Tominaga [Math. J. Okayama Univ. **4**, 135—141 (1955)]. Den Hauptplatz beanspruchen die Definitionen und die Formulierung der Sätze. Die Beweise sind äußerst einfach, oder sie erledigen sich durch Hinweise auf die genannten Arbeiten bzw. auf gewisse Ergebnisse von Levitzki. Von den Ergebnissen sei etwa das folgende hervorgehoben: Ein Ring  $R$  oder ein (zweiseitiges) Ideal  $A$  heißt von beschränktem Index, wenn ein  $n$  existiert derart, daß  $a^n = 0$  für jedes nilpotente Element  $a$  aus  $R$  bzw.  $A$ . Ist jedes von einem einzelnen Element erzeugte Ideal  $A = R$  aus  $R$  von beschränktem Index, so sagt man,  $R$  sei „lokal von beschränktem Index“. In einem beliebigen Ringe  $R$  gibt es stets ein kleinstes Ideal  $U$  mit der Eigenschaft, daß  $R/U$  kein Nilideal von beschränktem Index enthält. Verff. zeigen nun: Es sei  $\tilde{R} = R/U$  lokal von beschränktem Index. Dann sind, wenn man die  $\pi$ -Regularität wie in den Arbeiten von Azumaya und Tominaga definiert, sowohl für  $S = R$  als auch für  $S = \tilde{R}$  folgende vier Bedingungen gleichwertig: a)  $S$  ist  $\pi$ -regulär. b)  $S$  ist rechts  $\pi$ -regulär. c)  $S$  ist links  $\pi$ -regulär. d)  $S$  ist streng  $\pi$ -regulär. Ferner existiert unter unserer Voraussetzung in  $R$  ein eindeutig bestimmtes größtes  $\pi$ -reguläres Ideal  $P$  und es enthält  $R/P$  keine streng  $\pi$ -regulären Ideale. *W. Krull.*

**Fuchs, L.:** Beiträge zur Idealtheorie kommutativer Ringe. Wiss. Z. Humboldt- Univ. Berlin **4** (1954/55), 87—89 (1955).

Im ersten Teil des Vortrags beschäftigt sich Verf. mit Kriterien dafür, daß ein einzelnes Ideal  $\mathfrak{A}$  eines kommutativen Ringes mit Einheitsselement und seine sämtlichen Oberideale als Potenzprodukte endlich vieler Primideale dargestellt werden können. (Die Potenzen dieser Primideale brauchen dabei nicht alle verschieden zu sein.) Im zweiten Teil behandelt er — unter Angabe von Beispielen, aber ebenso wie im ersten Teil ohne Beweise — die von ihm eingeführten Begriffe „schwachprimäres Ideal“ und „Primideal“ vom Standpunkt der Verbände mit zusätzlicher kommutativer Multiplikation. Seine neueste hierhergehörige Arbeit, in der er über den kommutativen Rahmen hinausgeht [Acta math. Acad. Sci. Hungar. **5**, 299—313 (1954)], hat er dabei noch nicht berücksichtigt. *W. Krull.*

**Mead, D. G.:** Differential ideals. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 420—432 (1955).

Fundamental für die Theorie der Differentialideale ist die Frage nach der Zugehörigkeit eines gegebenen Polynoms zu einem gegebenen Ideal. In diesem Sinne hat H. Levi [Trans. Amer. math. Soc. **51**, 532—568 (1942)] systematisch untersucht, wann ein Potenzprodukt zu einem Ideal des Typus  $[u^n]$  bzw.  $[u v]$  gehört. Er hat dabei insbesondere im Falle  $[u v]$  zwei Klassen  $K_+$  und  $K_-$  von Potenzprodukten gefunden, von denen durch einfache Rechnung festgestellt werden kann, daß sie sicher bzw. sicher nicht zu  $[u v]$  gehören. Verf. ergänzt die Levischen Untersuchungen in vier Punkten. Er leitet zunächst gewisse Invarianzkriterien ab, die es gestatten,



den Levischen Berechnungsprozeß, mit dem über die Zugehörigkeit eines einzelnen Potenzproduktes zu  $[u v]$  entschieden wird, wesentlich zu vereinfachen (Theorem I). Ferner vergrößert er die Levische Klasse  $K$  (Theorem II) und beweist nach geeigneter Definition der Gewichtsfolge und des Exzeßgewichtes: Wenn kein Potenzprodukt mit nichtnegativer Gewichtsfolge und Exzeßgewicht 0 zu  $[u v]$  gehört, so liegt überhaupt kein Potenzprodukt mit nichtnegativer Gewichtsfolge in  $[u v]$  (Theorem III). Schließlich zeigt er durch Beispiele am Spezialfall  $[u^2]$ , daß die Levische hinreichende Bedingung für die Zugehörigkeit eines Potenzproduktes zu  $[u^2]$  nicht notwendig ist. Die Beweise der Theoreme stützen sich der Natur der Sache nach im wesentlichen auf geschickte und dabei teilweise ziemlich lange Rechnungen. W. Krull.

**Northcott, D. G.:** On homogeneous ideals. Proc. Glasgow math. Assoc. 2, 105—111 (1955).

Die für gewöhnliche Ideale geläufigen Sätze werden oft ohne ausführliche Begründung auf homogene Ideale ( $H$ -Ideale) übertragen. Verf. gibt hier genaue Beweise: Es liegt ein „graduierter“ Ring  $\mathfrak{A}$  zugrunde, in dem  $H$ -Ideale definiert werden können.  $H$ -Ideale, welche nur hinsichtlich homogener Elemente die Bedingungen eines Prim- oder Primärideals erfüllen, sind auch im gewöhnlichen Sinne Prim- oder Primärideale. Für den Beweis des Zerlegungssatzes genügt es, den Teilerkettensatz nur für  $H$ -Ideale vorauszusetzen („ $H$ -Noetherscher Ring“). Die zu einem  $H$ -Ideal gehörenden Primideale und isolierten Komponenten sind notwendig homogen. Die Kompositionsreihe eines homogenen Primärideals kann nur  $H$ -Ideale enthalten. Jedes  $H$ -Ideal ist als Durchschnitt von endlich vielen  $H$ -Primäridealen (mit bekannten Einschränkungen eindeutig) darstellbar. Verf. untersucht noch den Ring  $\mathfrak{A}^*$  der formalen Potenzreihen über  $\mathfrak{A}$  und das Entsprechen der Ideale von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}^*$ . — Es wäre wohl interessant, diesen Untersuchungen eine allgemeinere Definition des graduerten Ringes zugrunde zu legen, in der auch mehrfach homogene Ringe eingeschlossen sind. W. Gröbner.

**Cecioni, Francesco:** Alcune osservazioni sulla teoria della divisibilità. Boll. mat. Ital., III. Ser. 10, 382—400 (1955).

Aus eigenen praktischen Erfahrungen heraus schlägt Verf. — auch für die einführende algebraische Vorlesung — den folgenden Aufbau der Teilbarkeitstheorie in Integritätsbereichen und Polynomringen über Integritätsbereichen vor: a) Es wird der Begriff des g. g. T. (größten gemeinschaftlichen Teilers) eingeführt und es werden die g. g. T.-Ringe (Integritätsbereiche mit g. g. T. für je endlich viele Elemente) systematisch untersucht. Es wird gezeigt: Ist  $J$  ein g. g. T.-Ring, so gilt für  $J[x]$  der bekannte Gaußsche Satz und es ist auch  $J[x_1, \dots, x_n]$  ein g. g. T.-Ring. b) Man beweist, daß für einen g. g. T.-Ring, in dem jedes Element Produkt von endlich vielen unzerlegbaren ist, der bekannte Eindeutigkeits- und Zerlegungssatz gilt. c) Der Euklidische Algorithmus und die aus ihm ableitbaren schärferen Aussagen werden erst zum Schlusse untersucht. — Ihrem didaktischen Zweck entsprechend führt die vorliegende Arbeit den skizzierten Aufbau in aller Breite durch. Tiefere algebraische Kenntnisse werden nirgends vorausgesetzt. So werden z. B. auch die Grundeigenschaften eines Integritätsbereiches ausführlich besprochen. W. Krull.

**Divinsky, Nathan:** Pseudoregularity. Canadian J. Math. 7, 401—410 (1955).

L'A. dit que dans un anneau  $A$ , un élément  $x$  est pseudo-régulier à droite s'il existe  $y \in A$  satisfaisant à  $x + x y + x^2 y = 0$ ; un tel élément est quasi-régulier à droite (c'est-à-dire qu'il existe  $z$  tel que  $x + z + x z = 0$ ), et la réciproque est vraie si  $A$  admet un élément unité. Pour les anneaux sans élément unité, l'A. développe à partir de cette notion une théorie calquée sur celle du radical de Jacobson, notamment pour les anneaux commutatifs. J. Dieudonné.

**Jacobson, N.:** A note on two dimensional division ring extensions. *Amer. J. Math.* **77**, 593—599 (1955).

Soient  $\Delta$  un corps non commutatif,  $\Phi$  son centre,  $\Gamma$  un sous-corps de  $\Delta$ ,  $\Psi$  le centre de  $\Gamma$ . L'A. montre d'abord que si  $[\Delta:\Gamma]_L < +\infty$  (dimension à gauche) et  $[\Gamma:\Psi] < +\infty$ , alors  $[\Delta:\Phi] < +\infty$ ; inversement, si  $[\Delta:\Phi] < +\infty$ , alors  $[\Gamma:\Psi] \leq [\Delta:\Phi]$ , l'égalité n'ayant lieu que si  $\Delta = \Phi(\Gamma)$ . La seconde partie de l'énoncé fait un usage habile de la théorie des identités polynomiales dans un anneau (Kaplansky-Amitsur-Levitzki). L'A. montre ensuite que si  $[\Delta:\Gamma]_L = 2$  et  $[\Gamma:\Psi] < +\infty$ ,  $\Gamma$  (qui est de rang fini sur  $\Phi$ ) est nécessairement galoisien sur  $\Gamma$  si  $\Gamma$  n'est pas de caractéristique 2. En considérant l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique sur un espace  $M$  de dimension infinie dénombrable sur  $\Phi$  (algèbre qu'il prouve être simple et centrale si la forme quadratique est non dégénérée), il prouve qu'on peut obtenir de telles algèbres  $\Gamma$  qui soient des corps. Supposons qu'il en soit ainsi, et soient  $H$  un hyperplan de  $M$ ,  $\Gamma'$  le sous-corps de  $\Gamma$  engendré par  $H$  et l'identité. Alors, si la caractéristique est  $\neq 2$ , pour que  $\Gamma$  soit galoisien sur  $\Gamma'$ , il faut et il suffit que l'orthogonal de  $H$  soit  $= 0$ . Comme on sait aisément former des hyperplans pour lesquels cette propriété n'est pas vérifiée, on obtient ainsi des exemples  $\Gamma$  tels que  $[\Gamma:\Gamma']_L = [\Gamma:\Gamma']_R$  (dimension à droite)  $= 2$  mais où  $\Gamma$  n'est pas galoisien sur  $\Gamma'$ . *J. Dieudonné.*

**Hewitt, Edwin and Herbert S. Zuckerman:** Finite dimensional convolution algebras. *Acta math.* **93**, 67—119 (1955).

Les AA. définissent d'abord une notion très générale d'algèbre de convolution qui est si générale qu'elle comprend en particulier toutes les algèbres de rang fini sur le corps des nombres complexes. En fait, ils étudient dans ce travail les algèbres (sur le corps des complexes) de monoïdes (ces derniers étant qualifiés de „semi-groupes“ par les AA., contrairement à la terminologie usuelle qui réserve ce nom aux monoïdes dont tous les éléments sont réguliers). Après avoir donné de nombreuses propositions préliminaires, que nous ne pouvons résumer ici, sur les monoïdes vérifiant diverses conditions supplémentaires (de finitude ou de commutativité, le plus souvent) et sur les représentations („semi-caractères“) d'un monoïde dans le corps des complexes, les AA. caractérisent le radical de l'algèbre d'un monoïde fini  $G$ . En particulier, si  $G$  est commutatif, pour que l'algèbre de  $G$  soit sans radical, il faut et il suffit que, pour tout  $x \in G$ , si  $r$  est le plus petit entier  $\geq 1$  tel que  $x^r$  soit égal à une puissance  $x^s$  d'exposant  $< r$ , on ait nécessairement  $x^r = x$ . Les AA. prouvent aussi que si  $G$  est un monoïde fini dont tous les éléments sont idempotents, l'algèbre de  $G$  est sans radical si et seulement si  $G$  est commutatif. *J. Dieudonné.*

**Schenkman, Eugene:** On the derivation algebra and the holomorph of a nilpotent algebra. *Mem. Amer. math. Soc.* **14**, 15—22 (1955).

If  $L$  is a free nilpotent Lie algebra of class  $n$  generated by  $q \geq 2$  elements, then the holomorph of  $L$  (defined in a natural manner by  $L$  and its derivations) cannot be isomorphic to that of any other Lie algebra non-isomorphic to  $L$ . *H. Freudenthal.*

**Schafer, R. D. and M. L. Tomber:** On a simple Lie algebra of characteristic 2. *Mem. Amer. math. Soc.* **14**, 11—14 (1955).

Over a field  $\Phi$  of characteristic 2 any special Jordan algebra is a Lie algebra. If  $\mathfrak{J}_0$  is the Jordan algebra of hermitean matrices with trace 0 and with coefficients in a generalized Cayley algebra  $\mathfrak{C}$  over  $\Phi$ , and if  $\mathfrak{D}$  is the derivation algebra of  $\mathfrak{J}_0$ , then  $\mathfrak{D}/\text{ad } \mathfrak{J}_0$  is simple. If  $\mathfrak{C}$  has zero divisors (e. g. for algebraically closed  $\Phi$ ), then  $\mathfrak{D}/\text{ad } \mathfrak{J}_0 \cong \mathfrak{J}_0$ . *H. Freudenthal.*

**Goldberg, S. I.:** On the Euler characteristic of a Lie algebra. *Amer. math. Monthly* **62**, 239—240 (1955).

By establishing the Euler-Poincaré relation  $\sum (-1)^q R^q = \sum (-1)^q \dim C^q$  (where  $R^q$  is the  $q$ -th Betti number and  $C^q$  the space of  $q$ -dimensional cochains) for



linear algebras the author proves that the Euler characteristic  $\chi(L) = \sum (-1)^q R^q$  of any finite dimensional Lie algebra  $L$  over any field vanishes. *P. M. Cohn.*

**Tôgô, Shigeaki:** On splittable linear Lie algebras. *J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A* **18**, 289—306 (1955).

Let  $V$  be a vector space of finite dimension over a field of characteristic 0, and denote by  $\mathfrak{gl}(V)$  the set of endomorphisms of  $V$ , regarded as a Lie algebra over  $K$ . For any  $X \in \mathfrak{gl}(V)$  denote by  $S_X, N_X$  the semisimple and nilpotent components respectively (Chevalley, *Groupes de Lie II*, Paris 1951). Then a subalgebra  $\mathfrak{g}$  of  $\mathfrak{gl}(V)$  is called splittable, if  $S_X, N_X \in \mathfrak{g}$  for all  $X \in \mathfrak{g}$ . The author makes a detailed study of splittable Lie algebras and their connexion with algebraic Lie algebras (cf. e. g. Chevalley, l. c.), using the methods of the latter subject. — Every algebraic Lie algebra is splittable, but not conversely; more precisely, a subalgebra  $\mathfrak{g}$  of  $\mathfrak{gl}(V)$  is algebraic if and only if it is splittable and has a basis of elements whose eigenvalues are all rational. In a splittable algebra  $\mathfrak{g}$  the ideal  $\mathfrak{n}$  of all nilpotent matrices of the radical  $\mathfrak{r}$  is complemented in  $\mathfrak{r}$ , the complement being a maximal abelian subalgebra of  $\mathfrak{r}$  of semi-simple matrices, and conversely, when such a complement for  $\mathfrak{n}$  exists,  $\mathfrak{g}$  is splittable. — For any subalgebra  $\mathfrak{g}$  of  $\mathfrak{gl}(V)$  define  $\mathfrak{g}^*$  to be the algebraic hull of  $\mathfrak{g}$ , i. e. the least algebraic Lie algebra containing  $\mathfrak{g}$ , and similarly  $*\mathfrak{g}$  as the splittable hull of  $\mathfrak{g}$ . Then  $\mathfrak{g} \subseteq *\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}^*$  and  $*\mathfrak{g}$  is the smallest Lie algebra containing  $\mathfrak{g}$  which has the same nilpotent matrices as  $\mathfrak{g}^*$ . Dually the largest splittable algebra  $*\mathfrak{g}$  contained in  $\mathfrak{g}$  and the largest algebraic algebra  $\mathfrak{g}_*$  contained in  $\mathfrak{g}$  may be defined and they are characterized as follows:  $*\mathfrak{g}$  is the space spanned by the semisimple and the nilpotent elements of  $\mathfrak{g}$ , and  $\mathfrak{g}_*$  is spanned by the elements of  $*\mathfrak{g}$  which have rational eigenvalues. — Some of these notions can also be defined for algebraic groups and for abstract Lie algebras (for the latter by a consideration of their adjoint representation). In particular, if any subalgebra of  $\mathfrak{gl}(V)$  is either splittable or algebraic, then its adjoint representation has the same property, but the converse is false in both cases. — A number of results on algebraic Lie algebras and groups which are proved fairly simply include results due to Gotô (this Zbl. **38**, 21) and the theorem that a subgroup of the general linear group  $GL(V)$  has the same associative enveloping algebra as the least algebraic group containing it.

*P. M. Cohn.*

**Jacobson, N.:** A note on automorphisms and derivations of Lie algebras. *Proc. Amer. math. Soc.* **6**, 281—283 (1955).

Soit  $L$  une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps de caractéristique  $p$ . L'A. montre que  $L$  est nilpotente dans chacun des cas suivants: (a)  $L$  possède un automorphisme d'ordre premier sans point fixe  $\neq 0$ ; (b)  $L$  possède un automorphisme dont toutes les valeurs propres sont d'ordre infini; (c)  $p = 0$ ,  $L$  possède une algèbre nilpotente de dérivations sans point fixe  $\neq 0$ ; (d)  $p \neq 0$ ,  $L$  est restreinte au sens de l'A. (ce Zbl. **25**, 303), et possède une algèbre nilpotente de dérivations restreintes sans point fixe  $\neq 0$ . Il s'appuie principalement sur sa généralisation du théorème d'Engel (ce Zbl. **46**, 34); dans le cas (d), il est aussi montré que  $L$  est nilpotente restreinte; (a) généralise une résultat de Serre et du rapp. (ce Zbl. **51**, 19). On ne sait pas si toute algèbre de Lie nilpotente possède une dérivation sans point fixe  $\neq 0$  (qui serait alors forcément non intérieure), et dans cet ordre d'idées, l'A. termine sa note par un théorème de Schenkman disant que toute algèbre de Lie nilpotente possède une dérivation non intérieure.

*A. Borel.*

**Weiner, L. M.:** The algebra of semi-magic squares. *Amer. math. Monthly* **62**, 237—239 (1955).

Ein semi-magisches (s. m.) Quadrat  $A$  ist eine quadratische Anordnung von  $n^2$  Zahlen, deren Summe für irgendeine Zeile oder Spalte gleich einer Konstanten  $S = S(A)$  ist. Ein magisches Quadrat liegt vor, wenn auch die Summe von

jeder Diagonalen gleich  $S$  ist. Betrachtet man die  $n$ -reihigen s. m. Quadrate als (s. m.) Matrizen, so bilden sie für festes  $n$  einen Teilring  $R_n$  des vollen Matrizenrings vom Grade  $n$ . Beschränkt man sich auf s. m. Quadrate aus Zahlen eines Körpers  $F$ , dessen Charakteristik  $\neq n$  ist, so läßt sich  $R_n$  in die direkte Summe von zwei zweiseitigen Idealen  $M, N$  zerlegen:  $M$  besteht aus den Matrizen  $A = (a_{ij})$ , deren Elemente  $a_{ij}$  alle gleich einer festen Zahl  $a = a(A)$  sind, und  $N$  ist die Gesamtheit aller s. m. Matrizen  $A$  mit  $S(A) = 0$ .  $M$  ist vom Rang 1 über  $F$  und hat  $E_M = \frac{1}{n} \sum_{j,i=1}^n E_{ij}$  als Eins. Dabei ist  $E_{ij}$  die  $n$ -reihige quadratische Matrix nur mit einer Eins im Schnittpunkt der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte.  $N$  hat  $E_N = E - E_M$  als Eins und besitzt  $(n-1)^2$  Basiseinheiten  $A_{ij} = E_{11} - E_{1j} - E_{i1} + E'_{ij}$  ( $i, j = 2, \dots, n$ ). Verf. erwähnt nicht, daß  $N$  bezüglich  $F$  isomorph zu einer vollen Matrizenalgebra vom Grad  $n-1$  ist: Offenbar ist  $A_{ij} A_{kl} = \varphi_{jk} A_{il}$ , ( $\varphi_{jk} = 1 + \delta_{jk}$ ,  $\delta_{jk} = 0$  ( $j \neq k$ )  $= 1$  ( $j = k$ )) und  $\text{Det.}(\varphi_{ij}) = n \neq 0$ . Setzt man  $(\varphi_{ij})^{-1} = (\bar{\varphi}_{ij})$ ,  $F_{ij} = \sum_{r=2}^n \bar{\varphi}_{ri} A_{rj} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n (E_{s1} - E_{sj}) - (E_{i1} - E_{ij})$  ( $i, j = 2, \dots, n$ ), so folgt  $F_{ij} F_{kl} = \delta_{jk} F_{il}$  [vgl. W. P. Brown, Canadian J. Math. **7**, 188–190 (1955)].

H.-J. Hoehnke.

Thrall, R. M.: A class of algebras without unity element. Canadian J. Math. **7**, 382–390 (1955).

Die von W. P. Brown [Canadian J. Math. **7**, 188–190 (1955)] betrachtete verallgemeinerte Matrizenalgebra läßt sich durch drei Zahlen  $m \geq 1, l, r$  charakterisieren als die Algebra aller  $(l + m + r)$ -reihigen quadratischen Matrizen mit Elementen aus einem Körper  $F$  mit Nullen in den  $l$  ersten Zeilen und in den  $r$  letzten Spalten. Verf. ersetzt darin  $F$  durch eine Divisionsalgebra  $K$  von endlichem Rang über  $F$ , bezeichnet die so entstehende  $F$ -Algebra  $C = C(K, m, l, r)$  als eine „Teilmatrizen-Algebra“ und führt eine neue Familie von Algebren  $A$  ein, die er Algebren der Klasse  $Q$  nennt. Sie sind durch die folgenden einfachen Eigenschaften der Algebren  $C$  als deren Verallgemeinerung erklärt:  $A$  hat endlichen Rang über  $F$  und ein Idempotent  $\varepsilon$ , so daß  $(Q_1) \ \varepsilon A \varepsilon$  halbeinfach ist,  $(Q_2) \ A \varepsilon A = A$ ,  $(Q_3) \ A = \varepsilon A \varepsilon + \text{rad } A$  ( $\text{rad } A = \text{Radikal von } A$ ). Wenn überdies  $(Q'_1) \ \varepsilon A \varepsilon$  einfach ist, so heißt  $A$  zur Klasse  $Q'$  gehörig. Es wird bewiesen, daß jede Algebra der Klasse  $Q'$  homomorph zu einer Algebra  $C$  ist und als homomorphe Bilder von direkten Summen der Algebren  $C$  genau alle Algebren der Klasse  $Q$  erscheinen. Ferner werden die Automorphismen, Isomorphismen und Darstellungen dieser Algebren untersucht. Bei der Angabe aller Idempotenten, die eine Zerlegung gemäß  $(Q_{1-3})$  bewirken, erwähnt Verf. nicht, daß dies genau die ausgezeichneten Idempotenten von  $A$  sind: Nach L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, S. 100, Satz 5 (Zürich 1927) ist  $\varepsilon$  genau dann ausgezeichnet, wenn  $L, R \subseteq N = \text{rad } A$ , wobei  $L(R)$  aus allen Elementen der Form  $x - x\varepsilon$  ( $x - \varepsilon x$ ) besteht; bzw.:  $\varepsilon$  ist genau dann ausgezeichnet, wenn  $N_0 = L \cap R \subseteq N$ . Aus  $(N_0 \cap N)/N = (\varepsilon A \varepsilon \cap N)/N \cap (N_0 + N)/N = 0$  folgt  $N_0 \subseteq N$ , d. h.  $\varepsilon$  ist ausgezeichnet. Damit ist der Anschluß an eine Arbeit von C. Hopkins (dies. Zbl. **22**, 106) gewonnen, dessen Theorem 6. 8, p. 728 mit Rücksicht auf  $(Q_2)$  zeigt, daß  $N_0 = R \varepsilon L$ . Aus  $R \varepsilon L = N \varepsilon N \subseteq N^2 \subseteq N_0$  ergibt sich so  $N_0 = N^2$  und aus Gl. (4) des Verf. Gl. (3). Verf. geht nicht auf die Struktur des Antiradikals von  $A$  ein. Z. B. ist  $N \varepsilon + N^2$  die Summe aller der einfachen Linksideale  $l$ , für welche  $Al = 0$  ist, und ist daher unabhängig von der Wahl des ausgezeichneten Idempotents  $\varepsilon$ . — Druckfehler: p. 382, read  $r$  columns for  $l$ -columns; p. 385,  $W \cong Be$  for  $W \cong eB$ ; p. 388, (22)  $U_\varepsilon$  for  $U$ ,  $TS(\gamma)^{-1}$  for  $T(\gamma)^{-1}$ . Beim Beweis p. 389 von Theorem 8 wird versehentlich behauptet,  $GL(m)$  sei die Gruppe der inneren Automorphismen einer vollen Matrizenalgebra. Diese Gruppe ist bekanntlich  $\cong GL(m)/FI_m \cong PGL(m)$ . Für  $N \neq 0$  ist Theorem 8 trotzdem richtig. Das liegt an den Gliedern  $\gamma' \eta, \zeta \gamma$  in (22).

H.-J. Hoehnke.



Albert, A. A.: On involutorial algebras. Proc. nat. Acad. Sci. USA 41, 480—482 (1955).

Sei  $A$  eine assoziative Algebra endlichen Ranges über einem reellen Körper  $F$ . Vorausgesetzt werde, daß  $A$  einen involutorischen Antiautomorphismus  $x \mapsto x^*$  besitzt, und daß es eine lineare Abbildung  $d: A \rightarrow F$  gibt, für welche  $d(x x^*) > 0$  ist für alle  $x \neq 0$  aus  $A$ . Unter diesen Voraussetzungen ist  $A$  notwendig halbeinfach. Die folgenden Resultate werden bewiesen: (a) Ein Element  $a \in A$  heißt symmetrisch wenn  $a = a^*$ . Ist das der Fall, so sind die Eigenwerte von  $a$  (bei der rechtsseitigen regulären Darstellung  $a \rightarrow R_a$ ) sämtlich reell. — (b) Ein symmetrisches Element  $a$  aus  $A$  heißt positiv, wenn  $d(x a x^*) \geq 0$  ist für alle  $x \in A$ . Ist das der Fall, so sind die Eigenwerte von  $a$  sämtlich  $\geq 0$ . — (c) Sei  $F = Q$  der rationale Zahlkörper. Ein symmetrisches Element  $a \in A$  ist genau dann positiv, wenn  $a$  in  $Q[a]$  als Summe von 4 Quadraten darstellbar ist:  $a = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ;  $x_i \in Q[a]$ . — Der Beweis von (c) benutzt den Satz, daß eine quadratische Form in 5 Variablen über einem algebraischen Zahlkörper genau dann die 0 darstellt, wenn sie dies für jede unendliche reelle Primstelle dieses Zahlkörpers tut [s. Hasse, J. reine angew. Math. 153, 113—130 (1924), insbes. Satz 18, S. 129]. Im übrigen sind die Beweise elementarer Natur und sehr elegant. — Für den Fall, daß  $A$  die aus den Endomorphismen einer speziellen abelschen Mannigfaltigkeit erzeugte Algebra ist, treten diese Sätze bereits als Hilfssätze in einer Arbeit von Morikawa auf (dies. Zbl. 52, 380, vgl. dort insbes. Proposition 2, 3, S. 159 und Lemma 4, S. 163). P. Roquette.

Jaeger, Arno: A representation of multidifferential polynomials in fields of prime characteristic. Math. Ann. 130, 1—6 (1955).

Im Anschluß an frühere Arbeiten über (partielle) Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik (dies. Zbl. 46, 37; 47, 36; 48, 268) beweist Verf. folgende Sätze: (1)  $F$  sei ein endlich-algebraischer und separabler Funktionenkörper in den unabhängigen Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$  der Charakteristik  $p > 0$  über dem Grundkörper  $k$ . In  $F$  können  $n$  partielle Differentiationen definiert werden, die den Konstantenkörper  $C$  von  $F$  bestimmen.  $F$  besitzt dann über  $C$  den Rang  $p^n$ , und die Produkte  $\prod x_i^{\alpha_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $0 \leq \alpha_i \leq p - 1$ ) bilden eine Basis von  $F$  über  $C$ . (2) Mit Hilfe der über  $F$  erklärten Differentiationen wird der Ring  $\Omega$  der Multi-Differentialpolynome definiert und in ihm ein maximales zweiseitiges Ideal  $X$  konstruiert.  $\Omega/X$  ist dann  $C$ -isomorph zu dem vollen Endomorphismenring der  $C$ -Algebra  $F$ . H.-J. Kowalsky.

Jaeger, Arno: A relation between adjoint multidifferential polynomials and transposed matrices for fields of prime characteristic. Math. Ann. 130, 7—10 (1955).

Verf. untersucht den in dem vorangehenden Referat genannten Isomorphismus, der jedem Multi-Differentialpolynom einen Endomorphismus der  $C$ -Algebra  $F$ , also auch eine quadratische Matrix über  $C$  eindeutig zuordnet. Verf. zeigt, daß diese Zuordnung so getroffen werden kann, daß adjungierten Multi-Differentialpolynomen „transponierte“ Matrizen entsprechen, wobei jedoch der Übergang zur „transponierten“ Matrix durch Spiegelung an der Nebendiagonalen erfolgt. H.-J. Kowalsky.

Abhyankar, Shreeram and Oscar Zariski: Splitting of valuations in extensions of local domains. Proc. nat. Acad. Sci. USA 41, 84—90 (1955).

Ist  $R$  ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper  $K(R)$ ,  $v$  eine (nicht-archimedische) Bewertung von  $K(R)$  mit dem Bewertungsring  $R_v$  und dem zugehörigen maximalen Primideal  $M_v$ , so sagen Verff.,  $v$  habe das Zentrum  $p$  in  $R$  ( $p$  Primideal von  $R$ ), wenn  $R_v \supseteq R$  und  $M_v \cap R = p$ . — Theorem 1: Ist  $R$  regulärer Stellenring der Dimension  $s > 1$  mit dem maximalen Primideal  $M$  und haben  $K(R)$  und  $R/M$  die gleiche Charakteristik, ist weiter  $K^*$  eine endliche separable Erweiterung von  $K(R)$ , so gibt es unendlich viele inäquivalente reelle diskrete Bewertungen  $v$  von  $K(R)$  mit dem Zentrum  $M$  in  $R$ , die gleichzeitig in  $K^*$  zerfallen. —

Als Anwendung hiervon zeigen Verff.: Es sei  $R$  ein regulärer ganzabgeschlossener Stellenring mit maximalem Primideal  $M$ , die Charakteristik von  $R(M)$  gleich der von  $K(R)$ ,  $K^*$  eine endliche separable Galoissche Erweiterung von  $K(R)$ ,  $M^*$  ein maximales Primideal des ganzen Abschlusses  $R^*$  von  $R$  in  $K^*$ ,  $K_s$  der zu  $M^*$  gehörige Zerfällungskörper und die perfekte Hülle von  $R_s = \tilde{R}_M$  ( $\tilde{R} = K_s \cap R^*$ ,  $\tilde{M} = K_s \cap M^*$ ) sei ein Integritätsbereich. Dann ist  $M_s = \tilde{M} \cdot R_s = M \cdot R_s$ . Diese Vermutung von Krull wurde kürzlich von Nagata (vgl. dies. Zbl. 51, 26) auf anderem Wege etwas allgemeiner bewiesen.

*E. Lamprecht.*

**Abhyankar, Shreeram: Splitting of valuations in extensions of local domains. II.** Proc. nat. Acad. Sci. USA 41, 220—223 (1955).

Verf. verallgemeinert und verschärft die Aussage des Theorems 1 des voranstehenden Referates wie folgt: Falls  $R$  wie oben erklärt, oder falls  $R$  lokaler Integritätsbereich der Dimension  $s > 1$  mit Kern ist [vgl. Chevalley, Trans. Amer. math. Soc. 57, 1—85 (1945)], so gibt es unendlich viele  $v$  mit dem Zentrum  $M$  in  $R$ , die in  $K^*$  sogar vollständig zerfallen (vom Grade 1 sind).

*E. Lamprecht.*

**Nobusawa, Nobuo: An extension of Krull's Galois theory to division rings.** Osaka math. J. 7, 1—6 (1955).

Nach einer kurzen Darstellung der Galoisschen Theorie für Schiefkörpererweiterungen endlichen Ranges wird eine Verallgemeinerung für Erweiterungen unendlichen Ranges aufgestellt. Dabei werden folgende Voraussetzungen gemacht: Seien  $\Sigma$  ein Schiefkörper,  $\mathfrak{G}$  eine Automorphismengruppe von  $\Sigma$  und  $\Phi$  der Fixkörper (im folgenden: Körper = Schiefkörper) von  $\mathfrak{G}$  in  $\Sigma$ , dann sei (1)  $\Sigma$  im kleinen endlich über  $\Phi$  und (2) jedes Element von  $\Sigma$  besitze bei den Automorphismen von  $\mathfrak{G}$  nur endlich viele verschiedene Konjugierte. Auf Grund von (2) kann in  $\mathfrak{G}$  die Topologie im Sinne von W. Krull eingeführt werden, die sich auf die normalen, über  $\Phi$  endlichen Zwischenkörper zwischen  $\mathfrak{G}$  und  $\Sigma$  stützt. Die Gruppe  $\mathfrak{G}$  heißt regulär, wenn sie alle inneren Automorphismen von  $\Sigma$  über  $\Phi$  enthält. Ist  $\mathfrak{G}$  regulär, dann besteht im Sinne des Hauptsatzes der Galoisschen Theorie eine eindeutige Zuordnung zwischen den regulären und top. abgeschlossenen Untergruppen von  $\mathfrak{G}$  und den Zwischenkörpern zwischen  $\Phi$  und  $\Sigma$ . Bemerkung des Ref.: Legt man in  $\mathfrak{G}$  die endliche Topologie zugrunde, so kann unter Erhaltung der Ergebnisse Voraussetzung (2) gestrichen werden.

*F. Kasch.*

### Zahlkörper. Funktionenkörper:

**Dufresnoy, J. et C. Pisot: Sur les éléments d'accumulation d'un ensemble fermé d'entiers algébriques.** Bull. Soc. math., II. Sér. 79, 54—64 (1955).

Verff. setzen ihre Untersuchungsreihe (siehe dies. Zbl. 64, 37 und die dort angef. Lit.) über die Menge  $S$  der ganzalgebraischen Zahlen, deren Konjugierte alle im Einheitskreis liegen, fort. Mit der Schlußweise aus einer früheren Arbeit wird die Menge  $S'$  der Häufungspunkte von  $S$  untersucht. Insbesondere ergibt sich, daß von den Zahlen aus  $S'$  nur zwei kleiner als 1,8 sind, nämlich die Nullstelle  $(1 + \sqrt{5})/2 = 1,61\dots$  von  $1 + z - z^2$  und die Nullstelle 1,75... von  $1 - z + 2z^2 - z^3$ .

*F. Kasch.*

**Calloway, J. M.: On the discriminant of arbitrary algebraic number fields.** Proc. Amer. math. Soc. 6, 482—489 (1955).

Unter Benutzung von Siegels Identität für den Absolutbetrag der Diskriminante  $d$  eines algebraischen Zahlkörpers  $K$  vom Grade  $n$  zeigt Verf., daß  $|d|$  immer größer als  $(\pi/3)^{2r_2}$  ist, wenn  $n \geq 2$ . Dabei bezeichnet  $2r_2$  die Anzahl der komplexen Konjugierten von  $K$ .

*H. Bergström.*

**Frohlich, A.: On the absolute class-group of Abelian fields. II.** J. London math. Soc. 30, 72—80 (1955).

Es sei  $K$  ein abelscher Zahlkörper von 2-Potenzgrad mit der Galoisgruppe  $\Gamma(K)$



und der Klassenzahl (im weiteren Sinne)  $h_w$ . Verf. untersucht in Ergänzung einer früheren Note gleichen Titels (dies. Zbl. 55, 33) die Frage, wann  $h_w$  ungerade ist. Dazu kann  $K$  als reell angenommen werden. Sei  $A$  die Divisorengruppe von  $K$ ,  $I = \{a; a \in A, a^m \sim 1 \text{ mit } (m, 2) = 1\}$  und  $A^d = \{a^{1-\sigma}; a \in A, \sigma \in \Gamma(K)\}$ . Im zu  $I$  gehörigen 2-Klassenkörper von  $K$  bezeichne  $K_0^*$  ( $\overline{K_0}$ ) den größten abelschen (zentralen) Teilkörper.  $K_0^*$  ist der Geschlechterkörper (im weiteren Sinne) von  $K$  und  $\overline{K_0}/K$  gehört zu  $A^d I$ . Genau dann ist  $h_w$  ungerade, wenn über die notwendige Bedingung  $K_0^* = K$  der Geschlechtertheorie hinaus  $d_w = 0$  gilt, wo  $d_w$  die Anzahl der Basiselemente von  $A/A^d I$  bezeichnet. Um  $d_w$  aus dem Verzweigungsverhalten von  $K$  berechnen zu können, bestimmt Verf. die Galoisgruppe  $\Gamma(\overline{K_0}/K)$  aus den Erzeugenden der Trägheitsgruppen von  $K$ . Mit den durch sie definierten natürlichen Zahlen  $[p_i, p_j]$  (cross coefficients) wird eine Matrix  $T$  im  $GF(2)$  gebildet. Dann besagt  $d_w = 0$ , daß  $T$  in den verschiedenen Fällen den jeweils größten Rang besitzt.

H. W. Leopoldt.

**Deuring, Max: Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte eins.** Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1953, 85—94 (1953).

Ist  $C$  eine ebene algebr. Kurve vom Geschlecht  $g_C$  über dem endlich algebr. Zahlkörper  $k$  [gegeben durch die absolut irreduzible Gleichung  $f(x, y) = 0$  mit Koeff. aus  $k$ ], so wird durch

$$(1) \quad \zeta(s, C, k) = \prod_{\mathfrak{p}} \zeta(s, C, k, \mathfrak{p}) \quad (\mathfrak{p} \text{ alle Primdivisoren von } k)$$

die Zetafunktion von  $C$  erklärt; dabei ist

$$(2) \quad \zeta(s, C, k, \mathfrak{p}) = L(s, C, k, \mathfrak{p}) (1 - N \mathfrak{p}^{-s})^{-1} (1 - N \mathfrak{p}^{1-s})^{-1}$$

die Zetafunktion der durch  $f(x, y) \bmod \mathfrak{p}$  erklärten Kurve  $C/\mathfrak{p}$  über  $k/\mathfrak{p}$ , falls  $f(x, y) \bmod \mathfrak{p}$  absolut irreduzibel bleibt und  $g_C = g_{C/\mathfrak{p}}$ ; für die endlich vielen ausgenommenen  $\mathfrak{p}$  wird  $\zeta(s, C, k, \mathfrak{p})$  nachträglich festgesetzt. — Eine Vermutung von A. Weil besagt: Wenn  $g_C = 1$  ist und  $C$  einen komplexen Multiplikatorenring  $R$  besitzt, so ist

$$(3) \quad \prod_{\mathfrak{p}} L(s, C, k, \mathfrak{p})^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}} [(1 - \pi N \mathfrak{p}^{-s}) (1 - \bar{\pi} N \mathfrak{p}^{-s})]^{-1}$$

das Produkt zweier Heckscher  $L$ -Funktionen von  $k$  (vgl. dies. Zbl. 48, 270; dort wird auch in einem anderen Spezialfall ein entsprechendes Ergebnis hergeleitet). Verf. verifiziert diese Vermutung durch den Nachweis, daß durch  $\chi_0(a) \chi_0(b) = \chi_0(ab)$ ,  $\chi_0(\mathfrak{p}) = \pi/|\pi|$  [ $\pi$  gemäß (3)], wenn  $\mathfrak{p}$  kein Ausnahmeprimdivisor ist, ein Heckscher Größencharakter  $\chi_0(a)$  von  $k$  geliefert wird. Beim Beweis werden klassenkörpertheoretische Hilfsmittel und Eigenschaften des Multiplikatorringes benutzt, ferner wird zunächst das entsprechende Problem für eine zu  $C$  birational äquivalente Kurve  $C_0$  mit spezieller Erzeugung gelöst. Beim Übergang von  $C$  zu  $C_0$  können Unterschiede für endlich viele  $\mathfrak{p}$ -Faktoren vorliegen; daß dies nicht der Fall ist, will Verf. in einer späteren Note nachweisen. — Die durch (1), (2) und (3) erklärte Zetafunktion  $\zeta(s, C, k)$  genügt nach Hinzunahme einiger trivialer und  $I$ -Faktoren beim Übergang von  $s$  zu  $2 - s$  einer Funktionalgleichung des bekannten Typus.

E. Lamprecht.

**Deuring, Max: Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins. II.** Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abtl. 1955, 13—42 (1955).

Verf. untersuchte in einer ersten Mitteilung (vgl. vorsteh. Ref.) die Zetafunktion  $\zeta(s, C, k)$  einer algebraischen Kurve  $C$  vom Geschlecht 1 mit komplexer Multiplikation und mindestens einem rationalen Punkt über einem endlich-algebraischen Zahlkörper  $k$  (erklärt als Produkt der Zetafunktionen  $\zeta(s, C, k, \mathfrak{p})$  der Kongruenzmannigfaltigkeiten  $C \bmod \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p}$  alle endlichen Primstellen von  $k$ );  $\zeta(s, C, k)$  ist bis auf endlich viele elementare Ausnahmefaktoren als Produkt von  $\zeta$ - und  $L$ -Funktionen von  $k$  darstellbar (vgl. loc. cit.) und beim Übergang zu einer zu  $C$  birational äquivalenten Kurve  $C^*$  ändert sich  $\zeta(s, C, k)$  nur um endlich viele elementare Faktoren. Durch Abänderung der Definition für endlich viele  $\mathfrak{p}$ -Beiträge will Verf. zu einer Zetafunktion  $\zeta(s, K)$  des Funktionenkörpers  $K/k$  von  $C$  kommen, die (a) eine Invariante von  $K$  ist und (b) genau das Produkt der erwähnten  $\zeta$ - und  $L$ -Funktionen von  $k$  ist. — Verf. zeigt zunächst: Es sei  $A$  ein separabel erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen über  $\mathbb{C}$ ,  $x$  eine separierende

Variable und  $A/\kappa$  konservativ [Invarianz des Geschlechtes  $g(A/\kappa)$  bei Konstantenerweiterungen] und  $M$  ein System von Primdivisoren  $\mathfrak{p}$  zu diskreten Bewertungen von  $\kappa$ , so daß jedes  $\alpha \in \kappa$  nur endlich viele Pole und Nullstellen in  $M$  hat. Dann gibt es für fast alle  $\mathfrak{p} \in M$  eine Fortsetzung  $\mathfrak{p}'$  in  $A$ , für die 1.  $\mathfrak{p}'$  durch Fortsetzung von  $\kappa$  als Funktionalprimdivisor auf  $\kappa(x)$  und anschließende algebraische Erweiterung entsteht, 2.  $\mathfrak{p}'$  über  $\kappa(x)$  träge ist, 3.  $\kappa \bmod \mathfrak{p}$  der genaue Konstantenkörper von  $A \bmod \mathfrak{p}'$  ist, 4.  $g(A/\kappa) = g(A \bmod \mathfrak{p}'/\kappa \bmod \mathfrak{p})$  und  $A \bmod \mathfrak{p}'$  konservativ ist (Bezeichnung:  $\mathfrak{p}'$  reguläre Fortsetzung von  $\mathfrak{p}$  auf  $A$ ;  $A$   $\mathfrak{p}$ -regulär;  $x$   $\mathfrak{p}$ -regulär). Ist speziell  $A/\kappa$  konservativer elliptischer Funktionenkörper mit mindestens einem Primdivisor  $\mathfrak{q}$  vom Grade 1, so gibt es für jedes  $\mathfrak{p} \in M$  höchstens eine reguläre Fortsetzung  $\mathfrak{p}'$ . — Speziell für  $K$  und  $k$  folgt hieraus: Durchläuft  $\mathfrak{p}$  alle endlichen Primstellen von  $k$ , ist  $\zeta(s, K, \mathfrak{p}) = \zeta(s; K \bmod \mathfrak{p}')$  falls ein reguläres  $\mathfrak{p}'$  existiert und ist  $\zeta(s, K, \mathfrak{p}) = \zeta(s; k(x) \bmod \mathfrak{p}')$  sonst, so ist  $\zeta(s, K) = \prod_{\mathfrak{p}} \zeta(s, K, \mathfrak{p})$  eine

Invariante des Körpers  $K$ . Ob diese Definition auch bei beliebigen arithmetischen Funktionenkörpern  $A/k$  zum Ziel führt, hängt davon ab, ob man allgemein die Eindeutigkeit der regulären  $\mathfrak{p}'$  zeigen kann, und wie man die Beiträge zu irregulären  $\mathfrak{p}$  bei höherem Geschlecht erklären will. — Als Vorbereitung zum Nachweis von (b) zeigt Verf. weiter: Ist  $K$   $\mathfrak{p}$ -regulär,  $K^*$  ein elliptischer Körper über  $k$  mit der gleichen Invariante  $j$  wie  $K$ , so ist  $K^*$  genau dann  $\mathfrak{p}$ -regulär, falls  $\mathfrak{p}$  in  $k_t = k(\sqrt[t]{t(K/K^*)})$  unverzweigt ist ( $t$  Einheitenanzahl des Multiplikatorenringes von  $K$ ,  $t(K/K^*)$  Transformator von  $K$  in  $K^*$ ). — Seien weiter  $\chi(\mathfrak{p})$  bzw.  $\chi^*(\mathfrak{p})$  die durch die Nullstellen von  $\zeta(s, K, \mathfrak{p})$  bzw.  $\zeta(s, K^*, \mathfrak{p}')$  bestimmten Charaktere (vgl. loc. cit.), so ist:  $\chi^*(\mathfrak{p}) = \chi(\mathfrak{p}) \cdot \left(\frac{t(K^*/K)}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}_w$  wobei  $\left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right)_w$  das  $w$ -te Potenzrestsymbol in  $k$  bedeutet, wenn  $B$  für  $\mathfrak{p}$   $w$ -primär ist, und  $\left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}_w = 0$  sonst. Der rechnerische Nachweis dieser letzten Aussagen ist wegen notwendiger Fallunterscheidungen recht langwierig.

*E. Lamprecht.*

**Abhyankar, Shreeram:** On the ramification of algebraic functions. Amer. J. Math. **77**, 575—592 (1955).

$K$  sei ein algebraischer Funktionenkörper mit algebraisch-abgeschlossenem Konstantenkörper  $k$ , und  $V$  sei ein ganzabgeschlossenes Modell von  $K$ . Es sei  $K^*$  eine endlich-algebraische und separable Erweiterung von  $K$ , und  $V^*$  die ganzabgeschlossene Hülle von  $V$  in  $K^*$ . Zu jeder irreduziblen Teilmannigfaltigkeit  $W \subset V$ , und einer über  $W$  liegenden irreduziblen Teilmannigfaltigkeit  $W^* \subset V^*$  gehören die folgenden Invarianten: (a) der lokale Grad  $n(W^*/W)$ , definiert als der Körpergrad der vollständigen Hülle  $K_{W^*}^*$  von  $K^*$  bezüglich  $W^*$  [also des Quotientenkörpers der vollständigen Hülle des Stellenringes  $Q(W^*, V^*)$  von  $W^*$ ] über der entsprechend definierten vollständigen Hülle  $K_W$  von  $K$  bezüglich  $W$ ; (b) der Restklassengrad  $f(W^*/W)$ , definiert als der Körpergrad des Restklassenkörpers  $K_{W^*}^*$  [also des Restklassenkörpers von  $Q(W^*, V^*)$ ] über dem Restklassenkörper  $\bar{K}_W$ ;  $f(W^*/W)$  spaltet sich auf in den rein inseparablen Bestandteil  $i(W^*/W)$  und den separablen Bestandteil  $g(W^*/W)$ . Verf. nennt  $W$  verzweigt (branch variety), wenn es ein  $W^*$  gibt mit  $g(W^*/W) < n(W^*/W)$ . Die Gesamtheit der Punkte  $P \in V$ , welche auf einer verzweigten Teilmannigfaltigkeit  $W \subset V$  liegen, bilden die Verzweigungsmannigfaltigkeit  $B$  (branch locus) von  $V$  in  $K^*$ . Zunächst wird gezeigt: Falls  $W$  eine einfache irreduzible verzweigte Teilmannigfaltigkeit von  $V$  ist, dann gibt es eine verzweigte  $(r-1)$ -dimensionale irreduzible Teilmannigfaltigkeit  $U$  ( $r$  ist die Dimension von  $V$ ), welche  $W$  enthält. Falls insbesondere  $V$  singularitätenfrei ist, so ist die Verzweigungsmannigfaltigkeit  $B$  rein  $(r-1)$ -dimensional. — Verf. zeigt ferner, daß im Falle  $r = 2$ ,  $p = 0$  ( $p$  ist die Charakteristik von  $K$ ) folgender Sachverhalt gilt: (1) Wenn  $P$  ein einfacher Punkt von  $B$  ist, und  $P^*$  ein über  $P$  lie-



gender Punkt von  $V^*$ , dann ist die durch die Körpererweiterung  $K_{P^*}^*/K_P$  bestimmte Galoissche Gruppe  $G(P^*/P)$  zyklisch, und  $P^*$  ist ein einfacher Punkt von  $V^*$ . (2) Wenn  $P$  ein gewöhnlicher Doppelpunkt von  $B$  ist, dann ist  $G(P^*/P)$  direktes Produkt von zwei zyklischen Gruppen. — An Beispielen wird gezeigt, daß diese Aussagen für  $p > 0$  nicht mehr richtig sind; insbesondere braucht die lokale Galoissche Gruppe  $G(P^*/P)$  über einem einfachen oder gewöhnlichen Doppelpunkt  $P$  von  $B$  nicht einmal auflösbar zu sein. Die Existenz dieser Gegenbeispiele ist der Grund dafür, daß der klassische Beweis von Jung über die lokale Uniformisation algebraischer Flächen nicht auf den Fall der Charakteristik  $p > 0$  übertragen werden kann [vgl. dazu Jung, J. reine angew. Math. **133**, 289–314 (1908); vgl. auch Abschnitt 4 der vorliegenden Arbeit; sowie S. Abhyankar, „Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic  $p \neq 0$ “, erscheint demnächst in Ann. of Math.]. — Sei nun  $p > 0$ , und sei  $P$  ein einfacher Punkt von  $V$ . Es werde vorausgesetzt, daß die durch  $P$  gehenden irreduziblen Komponenten  $B_1, \dots, B_s$  die Eigenschaft besitzen, daß es ein System  $x_1, \dots, x_r$  uniformisierender Parameter für  $P$  gibt derart, daß  $x_i$  das durch  $B_i$  in  $Q(P, V)$  bestimmte Primideal erzeugt ( $1 \leq i \leq s$ ). Unter dieser Voraussetzung zeigt Verf.: Die Faktorgruppe der lokalen Galoisschen Gruppe  $G(P^*/P)$  über dem durch alle  $p$ -Sylowgruppen erzeugten Normalteiler ist direktes Produkt von  $s$  zyklischen Gruppen. Dieser Satz ist das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit. P. Roquette.

**Chow, Wei-Liang:** Abelian varieties over function fields. Trans. Amer. math. Soc. **78**, 253–275 (1955).

**Chow, Wei-Liang:** On abelian varieties over function fields. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 582–586 (1955).

Es sei  $A^*$  ein abelscher Funktionenkörper, dessen Konstantenkörper  $K^*$  seinerseits ein separabler Funktionenkörper ist; sei  $K$  der Konstantenkörper von  $K^*$ . Verf. konstruiert in invarianter Weise zwei zu  $A$  gehörige abelsche Funktionenkörper  $A, A'$  mit  $K$  als Konstantenkörper, welche er  $K$ -Bild und  $K$ -Spur von  $A^*$  nennt. Diese beiden Konstruktionen spielen in der Theorie der Albanesischen und Picardschen Funktionenkörper eine bedeutende Rolle (vgl. Chow, dies. Zbl. **43**, 384). Verf. beabsichtigt, in einer weiteren Arbeit die gesamte Theorie der Albanesischen und Picardschen Funktionenkörper auf der hier durchgeführten Konstruktion des  $K$ -Bildes und der  $K$ -Spur aufzubauen. Das ist vom algebraischen Standpunkt aus deshalb von großem Interesse, weil es sich in den vorliegenden Arbeiten durchweg um körpertheoretische, also birational invariante, Konstruktionen handelt. (N. B. Aus diesem Grunde wählte Ref. hier die Sprache der Körpertheorie, abweichend vom Verf., welcher die geometrische Sprechweise benutzt.) — Das  $K$ -Bild  $A$  von  $A^*$  ist eindeutig bestimmt als der maximale abelsche Funktionenkörper über  $K$ , welcher in  $A^*$  enthalten und von  $K^*$  unabhängig ist über  $K$  (Th. 4, S. 265). Die Körpererweiterung  $A^*/AK^*$  ist primär, d. h.: die algebraisch-abgeschlossene Hülle  $A^{0*}$  von  $AK^*$  in  $A^*$  ist eine rein inseparable Erweiterung von  $AK^*$  (Cor. 2, S. 268). Es ist nicht bekannt, ob sogar  $AK^* = A^{0*}$  ist; als einen Ersatz dafür zeigt Verf.: Für hinreichend großes natürliches  $m$  gibt es eine (mit Hilfe des Additionstheorems von  $A/K$  explizit beschreibbare) Einbettung von  $A$  in das  $m$ -fache, über  $K$  gebildete, unabhängige Körperkompositum  $A_m^*$  von  $A$  mit sich, derart daß  $A$  unabhängig ist von  $K_m^*$  über  $K$ , und daß  $AK_m^*$  in  $A_m^*$  algebraisch abgeschlossen ist (Theorem, S. 583). — Die  $K$ -Spur  $A'$  von  $A^*$  erhält man, indem man an Stelle von abelschen Teilkörpern von  $A^*$  dual die zu  $A^*$  homomorphen abelschen Funktionenkörper betrachtet. (Dabei heißt ein Erweiterungskörper von  $K^*$  ein homomorphes Bild von  $A^*$ , wenn er isomorph ist zu dem Restklassenkörper eines Stellenringes des abelschen Modells von  $A^*/K^*$ .) Genauer verläuft die Konstruktion von  $A'$  wie folgt: Man betrachte die abelschen Funktionenkörper  $B^*/K^*$ , welche zu  $A^*$  homomorph sind, und welche in der Konstantenerweiterung  $BK^*$  eines abelschen Funk-

tionenkörpers  $B/K$  enthalten sind. Unter diesen gibt es einen eindeutig bestimmten maximalen  $A_0^*$  in dem Sinne, daß jeder andere  $B^*$  ein homomorphes Bild von  $A_0^*$  ist (Th. 7, S. 269). Weiter gibt es unter allen abelschen Funktionenkörpern  $B'/K$  mit  $A_0^* \subset B'K^*$  einen eindeutig bestimmten kleinsten  $A'$  in dem Sinne, daß  $A_0^* \subset A'K^* \subset B'K^*$  ist für alle  $B'$ . Dieser  $A'$  ist die  $K$ -Spur von  $A^*$ . Er besitzt die Eigenschaft, daß es zu je zwei abelschen Funktionenkörpern  $B/K$ ,  $B^*/K^*$  mit  $B^* \subset BK^*$  stets ein homomorphes Bild  $A''$  von  $A'$  gibt mit  $B^* \subset A''K^* \subset BK^*$  (Th. 8, S. 270). Die Körpererweiterung  $A'K^*/A_0^*$  ist rein inseparabel, dual zu dem entsprechenden Sachverhalt für das  $K$ -Bild  $A$ . Es ist nicht bekannt, ob  $A'K^* = A_0^*$  ist; als Ersatz dafür zeigt Verf.: Für hinreichend großes natürliches  $m$  kann die Konstantenerweiterung  $A'K_m^*$  als ein (explizit beschreibbares) homomorphes Bild von  $A_m^*$  dargestellt werden (Bezeichnungen wie oben beim entsprechenden Sachverhalt für das  $K$ -Bild.) (Cor. S. 272). — Sowohl das Bild wie auch die Spur sind invariant gegenüber beliebigen Konstantenerweiterungen  $K \rightarrow K_1$  in folgendem Sinne: Das  $K_1$ -Bild, bzw. die  $K_1$ -Spur der Konstantenerweiterung  $A^*K_1/K^*K_1$  ist gleich der Konstantenerweiterung  $AK_1$ , bzw.  $A'K_1$ , des  $K$ -Bildes  $A$ , bzw. der  $K$ -Spur  $A'$ , von  $A^*$  (Cor. S. 585, und Th. 8, S. 270). — Das  $K$ -Bild  $A$  und die  $K$ -Spur  $A'$  von  $A^*$  sind zueinander isogen in dem Sinne, daß es einen Isomorphismus von  $A$  in  $A'$  und einen Isomorphismus von  $A'$  in  $A$  gibt; das ist eine Folge davon, daß  $A_0^*$  der einzige zu  $A^*$  homomorphe abelsche Funktionenkörper ist, welcher zu  $A'K^*$  isogen ist (Th. 7, S. 259). — Alle durchgeführten Konstruktionen fußen auf einem, auch an sich wichtigen Existenzsatz (Th. 3, S. 269), von welchem der folgende Spezialfall hervorgehoben sei:  $A^*$  entsteht genau dann aus einem abelschen Funktionenkörper  $A/K$  durch die Konstantenerweiterung  $K \rightarrow K^*$ , wenn für das über  $K$  gebildete zweifache unabhängige Kompositum  $A_2^* = A^* \times A^*$  gilt:  $A_2^* = A^* \times K^* = K^* \times A^*$  (Cor. 1, S. 264).

*P. Roquette.*

### Zahlentheorie:

Kraitschik, M.: Les carrés magiques d'ordre 4. *Mathesis* 64, 97—115 (1955).

Vor fast drei Jahrhunderten hat Frénicle eine Liste der 880 magischen Quadrate aufgestellt, die man aus den Zahlen von 1 bis 16 bilden kann. Die Vollständigkeit dieser Liste ist im Laufe der Zeit mehrmals angezweifelt worden, zu Unrecht, wie sich bei näherer Nachprüfung ergab; doch fehlte eine eigentliche Bestätigung. Diese erbringt Verf. mit Hilfe einer geeigneten Klassifikation.

*R. Sprague.*

Larsson, David F.: Un théorème fondamental concernant le nombre  $N$  écrit dans la base  $B$ . *Mathesis* 64, 20—22 (1955).

Eine natürliche Zahl  $N$  werde im System der Zahlen mit der Basis  $B$  dargestellt. Dann bilde man die Ziffernsumme, stelle diese Zahl wieder im  $B$ -System dar, bilde davon wieder die Ziffernsumme und setze dies fort, bis man zu einer einzigen Ziffer  $Z$  kommt. Es ist  $Z \neq 0$ ,  $\leq B-1$ , ferner ist  $N \equiv Z \pmod{B-1}$ ,  $Z = B-1$ , wenn  $N \equiv 0 \pmod{B-1}$ . Im Zehnersystem ergibt sich die bekannte Neunerregel. Der Nachweis wird ohne Kongruenzen geführt.

*N. Hofreiter.*

Storchi, Edoardo: Alcuni criteri di divisibilità per i numeri di Mersenne e il carattere  $6^{\text{co}}$ .  $12^{\text{mo}}$ ,  $24^{\text{mo}}$ ,  $48^{\text{mo}}$ , dell'intero 2. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser.* 10, 363—375 (1955).

Aufbauend auf Arbeiten von A. Aigner (dies. Zbl. 20, 291) und A. L. Whitman (dies. Zbl. 55, 271) gibt Verf. zunächst einige Beweise längst bekannter Sätze. Aus den von ihm bewiesenen Sätzen und den genannten Arbeiten baut er dann unter Berücksichtigung des bekannten kubischen Restcharakters von 2 für Primzahlen der Form  $6x+1$  Sätze auf, wenn 2 sechster, 12ter, 24ter, 48ter Potenzrest ist. Hieraus folgen die nachstehenden Schlussergebnisse: Allgemein wird eine Primzahl  $q > 2$  und eine weitere  $p$  vorausgesetzt, letztere  $\equiv 1 \pmod{q}$ , es werde  $[p/q] = A$  gesetzt:



Es ist  $2^q - 1$  durch  $p$  teilbar, wenn (1)  $q \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $A = 2$ . (2)  $q \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $A = 6$ ,  $p = a^2 + 27c^2$ . (3)  $A = 8$ ,  $p = a^2 + 64b^2$ ,  $b$  ungerade. (4)  $A = 16$ ,  $p = a^2 + 256f^2 = c^2 + 32d^2$ ,  $f + d$  gerade. (5)  $A = 24$ ,  $p = a^2 + 27b^2 = c^2 + 64d^2$ ,  $d$  ungerade. (6)  $A = 48$ ,  $p = a^2 + 27b^2 = c^2 + 256d^2 = e^2 + 32f^2$ ,  $f + d$  gerade.

L. Holzer.

**Maxfield, John and Margaret:** Sums of powers of numbers having a given period modulo  $m$ . Amer. math. Monthly **62**, 349—353 (1955).

The theorem of Moller (this Zbl. **46**, 268) on the sum of the  $n$ -th powers of the numbers belonging to a given exponent  $e$  modulo a prime is extended to an arbitrary modulus  $m$ . It is shown that if  $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$  the sum under consideration is congruent modulo  $p_i^{\alpha_i}$  to a sum of a number of sums of the  $n$ th powers of the numbers less than  $p_i^{\alpha_i}$  belonging to the exponent  $e_r$ , where  $e_r$  is a divisor of  $e$ . The unique solution of the  $k$  simultaneous congruences gives the desired extension. — To be able to applicate this result it is therefore necessary to generalize the result of Moller to the case that the modulus is a power of a prime. For  $p > 2$  it is shown that the sum of the  $n$ th powers of the positive integers less than  $p^s$  belonging to the exponent  $e = p^r e'$ , with  $0 \leq r < s$ ,  $s \geq 1$ ,  $e' | p - 1$ , is congruent mod  $p^s$  to  $\varphi(p^r) \mu(e'/(n, e')) \varphi(e')/\varphi(e'/(n, e'))$ . For  $p = 2$  the extension is also found and is as may be expected of a quite different form.

W. Verdenius.

**Rešetnik, Ju. G.:** Neuer Beweis eines Satzes von Čebotarev. Uspechi mat. Nauk **10**, Nr. 3 (65), 155—157 (1955) [Russisch].

The author gives a new proof of the following theorem due to Čebotarev: Let  $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$ , where  $p$  is a prime, and  $a_{v\mu} = \varepsilon^{k_v l_\mu}$  ( $v, \mu = 1, \dots, j$ ). Then  $|a_{v\mu}| \neq 0$ , for  $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_j \leq p - 1$ ,  $0 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_j \leq p - 1$ .

L. K. Hua.

**Lehmer, Emma:** On the number of solutions of  $u^k + D \equiv w^2 \pmod{p}$ . Pacific J. Math. **5**, 103—118 (1955).

Let  $N_k(D)$  be the number of solutions of  $(u, w)$  of  $u^k + D \equiv w^2 \pmod{p}$ . The typical results proved by the author are the following:  $N_{2k}(m^k) = p - 1$  for  $k$  odd and  $p = 2kh + 1$  and  $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$ ;  $N_4(D) = p - 1 - 2x\left(\frac{m}{p}\right)$ , for  $p = x^2 + 4y^2$ ,  $x \equiv y \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$  and  $D \equiv m^2 \pmod{p}$ , etc.

L. K. Hua.

**Carlitz, L.:** The number of solutions of certain types of equations in a finite field. Pacific J. Math. **5**, 177—181 (1955).

The author proves that the number of solutions of  $y^m = f_1(x_{11}, \dots, x_{1s_1}) + \dots + f_r(x_{r1}, \dots, x_{rs_r})$  is equal to  $q^{s_1 + \dots + s_r}$  over a finite field with  $q$  elements, where  $f_1, \dots, f_r$  are homogeneous polynomials of the variables indicated with the degrees  $m_1, \dots, m_r$  respectively, and  $(m, m_1 \cdots m_r, q - 1) = 1$ . In fact there exist integers  $h, k$  and  $l$  such that  $h m + k m_1 \cdots m_r + l(q - 1) = 1$ ,  $(h, q - 1) = 1$ , putting  $y = \lambda h$ ,  $x_{ij} = \lambda^{km_1 + \dots + m_r/m_i} z_{ij}$ , the problem then reduces to the case  $m = 1$ .

L. K. Hua.

**Mordell, L. J.:** Integer solutions of cubic equations in three variables. Rend. Mat. e. Appl. **14**, 431—438 (1955).

Let  $f(x, y, z)$  denote an irreducible polynomial of the third degree in the variables  $x, y, z$  with integer coefficients. Then it is an important problem to find all the integer solutions of the equation  $f(x, y, z) = 0$ . The author gives an account of his many contributions to this subject.

W. Ljunggren.

**Selmer, Ernst S.:** Die unbestimmte Gleichung  $X^3 + Y^3 = AZ^3$ . Nordisk mat. Tidskrift **3**, 48—56 (1955) [Norwegisch].

The author gives an account of some of his results from an earlier paper (this Zbl. **42**, 269).

W. Ljunggren.

**Selmer, Ernst S.: The Diophantine equation  $\eta^2 = \xi^3 - D$ . A note on Cassels' method.** Math. Scandinav. **3**, 68—74 (1955).

The author has recently set up a „second descent“ for the diophantine equation (1)  $X^3 + Y^3 + AZ^3 = 0$ , the „first descent“ being related to division of the elliptic argument by  $1 - \exp(2\pi i/3)$ . He has given strong numerical evidence that the number of generators „lost“ in the second descent is always even (this Zbl. **55**, 271). He has also set up a „second descent“ for (2)  $\eta^2 = \xi^3 - D$ , the first descent being related to division of the argument by 2. („On Cassels' conditions for the solubility of the diophantine equations  $\eta^2 = \xi^3 - D$ “, to appear in Arch. Math. Naturvid.). Here he gives strong numerical evidence that again an even number of generators is „lost“. He uses the known relation between (1) and (2) with  $D = -2^4 A^2$  and his extensive numerical results about (1). J. W. S. Cassels.

**Lehmer, D. H.: The distribution of totatives.** Canadian J. Math. **7**, 347—357 (1955).

Nach einem von Sylvester herrührendem Ausdruck nennt Verf. Totative die zu einer natürlichen Zahl  $n$  primen Zahlen  $\leq n$ . Ihre Anzahl ist bekanntlich  $\Phi(n)$ , die Eulersche Funktion. Nun stellt sich Verf. die Aufgabe, die Verteilung der Totative in den Teilintervallen des Intervalls  $(0, n)$  zu erforschen. Mit  $k$  als natürlicher Zahl,  $1 \leq k < n$ , bezeichnet Verf. die Anzahl der Totative im Intervall  $(nq/k, n(q+1)/k)$  mit  $\Phi(k, q, n)$ , mit  $E(k, q, n)$  den Ausdruck  $\Phi(n) - k\Phi(k, q, n)$ .  $E(k, q, n) = 0$  für jedes  $q$  bedeutet: Die Totative sind in allen diesen Unterintervallen gleich verteilt. Bei den Ausdrücken für  $E(k, q, n)$  treten außer der allgemein bekannten zahlen-theoretischen Funktion  $\mu(n)$  noch Liouvilles Funktion  $\lambda(n)$ , definiert bei kanonischer Zerlegung  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$  durch  $(-1)^s$ ,  $s = \sum_{i=1}^t \alpha_i$ , weiter  $\vartheta(n) = 2'$  auf.  $\vartheta(n)$

ist die Anzahl der quadratfreien Teiler von  $n$ . Zunächst zeigt Verf., daß  $E(k, q, n) = 0$  ist bei Erfüllung mindestens einer der folgenden Bedingungen: (1)  $k = 2$ , (2)  $k^2 | n$ , (3) mindestens einer der Primteiler von  $n$  ist von der Form  $kx + 1$ . Im folgenden seien diese Fälle ausdrücklich ausgenommen. Weiter gilt für  $k = 3$ :  $E(3, 2, n) = E(3, 0, n)$ ,  $E(3, 1, n) = -2E(3, 0, n)$ , und es wird  $E(3, 0, n) = -\lambda(n)\vartheta(n)/4$  für  $3|n$ ,  $E(3, 0, n) = -\lambda(n)\vartheta(n)/2$  sonst. Ähnliche Formeln gibt Verf. auch für  $k = 4$  und  $k = 6$ . Sei nur die Formel für  $E(6, 0, n)$  angeführt: Ist  $n = 2^\alpha 3^\beta n_1$ ,  $n_1$  zu 6 prim, so ist

$$E(6, 0, n) = 2\mu^2(3^\beta) \{1 + 5\mu(2^\alpha)\} \lambda(n) \vartheta(n_1) / \{1 - 7\mu(2^\alpha)\}.$$

Noch beweist Verf.: Ist  $n$  das Produkt lauter voneinander verschiedener Primzahlen der Form  $kx - 1$ , so ist  $E(k, 0, n) = E(k, k-1, n) = (2-k)\mu(n)\vartheta(n)/2$ , dagegen ist für ein  $q$  zwischen 2 und  $k-2$  (beides inkl.)  $E(k, q, n) = \mu(n)\vartheta(n)$ . Weiter zeigt er:  $|E(k, q, n)| \leq (k-1)\vartheta(n)$ . Am Schlusse gibt er einige asymptotische Formeln. L. Holzer.

**Lambek, Joachim and Leo Moser: On integers  $n$  relatively prime to  $f(n)$ .** Canadian J. Math. **7**, 155—158 (1955).

Es sei  $f = \{f(n)\}$  eine Folge nicht negativer ganzer Zahlen,  $Q_f(x) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ (n, f(n)=1}} 1$

und  $f^*(n)$  die Anzahl der Zahlen  $m$  mit  $f(m) = n$ . Ist 1.  $f(n)$  nicht abnehmend, 2.  $f^*(n)$  nicht abnehmend und endlich, so beweisen Verff.

$$Q_f(x) = 6\pi^{-2}x + O(f(x) \log f(x)) + O(f^*(f(x)) \log f(x)) + O(x^{-1/2}).$$

Der Beweis verläuft elementar. Wenn hierin die beiden ersten  $O$ -Terme  $o(x)$  sind, gilt also (1)  $P_f = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q_f(x)}{x} = \frac{6}{\pi^2}$ . Der Fall  $f(n) = [\alpha n]$  wurde kürzlich von G. L. Watson behandelt (dies. Zbl. **51**, 32). Da  $P_f$  ungeändert bleibt, wenn die Werte von  $f(n)$  auf einer Menge der Dichte Null abgeändert werden, gibt es Folgen  $f$ , für die (1) gilt, ohne daß eine der gemachten Voraussetzungen erfüllt ist. Andererseits



gibt es, wie durch Beispiele belegt wird, Folgen  $f$ , für die (1) nicht gilt, obwohl nur eine der obigen vier Bedingungen verletzt ist. *H.-E. Richter.*

**Nicol, C. A. and H. S. Vandiver:** On generating functions for restricted partitions of rational integers. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 37–42 (1955). Errata. Ibid. 251 (1955).

Verff. führen ihre in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **56**, 40) begonnenen Untersuchungen weiter. Sei

$$F(z, x, n, a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n (1 - x^i)^{a_i} = \sum_{s \geq 0} H_s(z) x^s.$$

Verff. leiten in einem ersten Theorem eine Rekursionsformel für  $H_s(z)$  her.

Setzt man für  $z = 1$  und alle  $a_i = 1$  abkürzend  $F_n(x) = \prod_{i=1}^n (1 - x^i) = \sum_{s \geq 0} A_s^{(n)} x^s$ ,

so wird weiter u. a. die Relation  $\Phi(r, n) = - \sum_{p=1}^{l_r} p A_{pn+r}^{(n)} (l_r = [(n+1)/2 - r/n])$

bewiesen, in der  $\Phi(r, n)$  die bereits in oben zitierter Arbeit studierte Funktion  $q(n) \mu(n(r, n)) / \mu(n/(r, n))$  bedeutet (und von den Verff. v. Sterneck-Zahl genannt wird). *H. Ostmann.*

**Volkman, Bodo:** Über die Klasse der Summenmengen. Arch. der Math. **6**, 200–207 (1955).

Verf. knüpft an seine früheren Untersuchungen an (dies. Zbl. **48**, 34; **51**, 41, 297; **55**, 51), in denen für Klassen  $K$  von Mengen  $\mathfrak{A}$  natürlicher Zahlen auf Grund der Zuordnung  $\mathfrak{A} \rightarrow F(\mathfrak{A}) = \sum_{a \in \mathfrak{A}} 2^{-a}$  punktmengentheoretische Aussagen gemacht werden.

Auf Verf. geht in diesem Zusammenhang auch die Heranziehung des Hausdorffschen Dimensionsbegriffes zurück. Es bezeichne  ${}_r K$  die der Klasse  $K$  zugeordnete Punktmenge; es sei  $d(\zeta) = -(\log 2)^{-1} (\zeta \log \zeta + (1 - \zeta) \log (1 - \zeta))$ ,  $0 < \zeta < 1$ ,  $d(0) = d(1) = 0$  [also  $d(\zeta)$  stetig in  $\langle 0, 1 \rangle$ ,  $d(\zeta) = d(1 - \zeta)$ ]. Verf. beweist (1): Ist  $K(\zeta)$  die Klasse aller Mengen  $\mathfrak{A}$ , deren asymptotische Dichte  $\geq \zeta$  ist, so gilt

$\dim {}_r(K(\zeta_1) + K(\zeta_2)) \leq d(\zeta_1 + \zeta_2)$  für  $\frac{1}{2} \leq \zeta_1 + \zeta_2 \leq 1$ , bzw.  $= 0$  für  $\zeta_1 + \zeta_2 \geq 1$ .

(2): Ist  $S(\zeta)$  die Klasse aller Summenmengen  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n) + B(n)}{n} = \zeta \leq 1$ , so ist  $\dim {}_r S(\zeta) \leq \min(1, 2d(\zeta/2))$ . — Ferner gibt Verf. noch einen Beweis

des Satzes von E. Wirsing (dies. Zbl. **52**, 48), daß die Klasse aller reduzierbaren Mengen (= Mengen  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ , wobei jeder Summand mindestens zwei Elemente besitzt) das Lebesguesche Maß 0 hat. — Aus seinem Beweis des letztgenannten Satzes gewinnt schließlich Verf. noch den Satz: Besitzt eine der beiden unendlichen Mengen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  eine positive obere asymptotische Dichte, so ist die Zahlenfolge  $2^n F(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , nicht gleichverteilt mod 1. *H. Ostmann.*

**Rohrbach, Hans und Bodo Volkman:** Verallgemeinerte asymptotische Dichten. J. reine angew. Math. **194**, 195–209 (1955).

$\mathfrak{A}_i$  seien Mengen nicht negativer ganzer Zahlen,  $\varphi(x)$  eine positive, monoton nicht abnehmende Funktion,  ${}_q A_i(x) = \sum_{\substack{y=1 \\ y \in \mathfrak{A}_i}}^x \varphi(y)$  und  $I_q(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n) =$

$\liminf_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^n {}_q A_i(x) \right) \left( \sum_{y=1}^x \varphi(y) \right)^{-1}$ . Verff. versuchen das von Ref. für die gewöhnliche asymptotische Dichte ( $\varphi(x) = 1$ ) bewiesene Ergebnis über die Dichte der Summenmenge  $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{A}_n$  (dies. Zbl. **51**, 281) auf eine größere Klasse von Funktionen  $\varphi$ , die z. B. alle Potenzen  $x^\alpha$  mit  $\alpha \geq 0$  umfaßt, auszudehnen, also zu zeigen, daß abgesehen von genau angebbaren Ausnahmefällen die Ungleichung  $I_q(\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{A}_n) \geq D_q(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n)$  gilt. Ref. ist es allerdings nicht gelungen zwei Beweislücken zu schließen, und zwar erstens S. 205

Fußnote <sup>6</sup>), wo anscheinend von  $D_q(\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n) = 0$  auf  $D_q(\mathfrak{A}_0) = D_q(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n)$  geschlossen wird, und zweitens S. 208 unten, wo die Größe  $\psi'$  keine Konstante ist, sondern von  $k$  abhängt; der Hilfssatz 13 wird nämlich im Verlauf des Beweises nicht auf die Mengen  $\mathfrak{A}_i$  sondern auf andere von  $k$  abhängige Mengen angewandt.

M. Kneser.

**Klöter, Hubert und Alfred Stöhr: Wesentliche Komponenten und asymptotische Dichte.** J. reine angew. Math. **194**, 210—217 (1955).

$\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$  seien Mengen nicht negativer ganzer Zahlen, von denen  $\mathfrak{B}$  die Null enthalte;  $\lambda^*$  bzw.  $\gamma^*$  sei die asymptotische Dichte von  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{C}$ ; jede ganze Zahl  $m > n_0$  lasse sich als Summe einer endlichen Anzahl  $l(m)$  von Summanden aus  $\mathfrak{B}$  darstellen; schließlich sei  $\lambda^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=n_0+1}^n l(m)$  die mittlere asymptotische Ordnung von  $\mathfrak{B}$ . Als Hauptergebnis wird in Analogie zu einer die Schnirelmannsche Dichte betreffenden Ungleichung von A. Brauer (dies. Zbl. **19**, 6) die Abschätzung  $\gamma^* \geq \lambda^* \cdot 1 - \lambda^{*-1} (1 - \lambda^*)$  bewiesen. Man vgl. auch die Arbeit von F. Kasch [Math. Z. **62**, 368—387 (1955)], wo dieses Ergebnis verschärft wird.

M. Kneser.

**Stalley, Robert: A modified Schnirelmann density.** Pacific J. Math. **5**, 119—124 (1955).

Neben den in der additiven Zahlentheorie bislang verwendeten Dichtebegriffen für Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen betrachtet Verf. noch die folgende Dichte:

$$\delta'(\mathfrak{A}) = \lambda' = \begin{cases} \frac{\text{fin}}{i-1, 2, \dots} \frac{A(a_i)}{a_i}, & \text{wenn } \mathfrak{A} = \{a_0 = 0, a_1, a_2, \dots\} \text{ unendlich ist,} \\ 0, & \text{wenn } \mathfrak{A} \neq 0 \text{ und endlich ist.} \end{cases}$$

Zunächst zeigt Verf. an Hand einfacher Beispiele, daß die dem Mann-Dysonschen Satz nachgebildeten Abschätzungsformeln für  $\gamma' = \delta'(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$  nicht mehr bestehen. — Folgende Abschätzungen werden bewiesen: (1) Aus  $\lambda' + \beta' > 1$  folgt  $\gamma' = 1$  (also  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ). — (2) Ist  $\lambda' + \beta' \leq 1$  und  $\{0, 1, 2, \dots, k-1\} \subseteq \mathfrak{A}$ , so folgt  $\gamma' \geq k^{-1} (k-1) \lambda' + \beta'$ . — Zum Beweis zieht Verf. ein Resultat von H. B. Mann (dies. Zbl. **45**, 19) in einer Form heran, die sich schon innerhalb des Beweises eines Satzes von Besicovitch (dies. Zbl. **12**, 394) findet. — Schließlich beweist Verf. noch unter Heranziehung eines Satzes des Ref. (dies. Zbl. **36**, 25): Fällt  $\gamma'$  mit der asymptotischen Dichte von  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$  zusammen, und enthält  $\mathfrak{A}$  irgend  $k$  aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, so gilt  $\gamma' \geq k^{-1} (k-1) \lambda' + \beta'$  ebenfalls.

H. Ostmann.

**Hornfeck, Bernhard: Berichtigung zur Arbeit: Ein Satz über die Primzahlmenge.** Math. Z. **62**, 502 (1955).

Vgl. dies. Zbl. **56**, 39.

**Rodosskij, K. A.: Über eine Ausnahme-Nullstelle und die Verteilung der Primzahlen in kurzen arithmetischen Progressionen.** Math. Sbornik, n. Ser. **36** (78), 341—348 (1955) [Russisch].

Verf. untersucht die Funktion  $\psi(x, D, l) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{D}}} \Lambda(n)$ , ( $D, l = 1$  und

leitet neue Formeln für die Differenz dieser Funktion her, die geeigneter als die bekannten sind, falls eine Ausnahmenullstelle  $\tilde{\beta}$  bei einer  $L$ -Reihe  $L(s, \tilde{\chi})$  modulo  $D$  existiert. Zunächst wird gezeigt: Sei  $0,9 \leq \Delta \leq 1$ ,  $T \geq 3$ ,  $\log D \geq 12$  und bezeichne  $N(\Delta, T, D)$  die Anzahl der Nullstellen aller  $L$ -Reihen modulo  $D$ , die im Rechteck  $\Delta \leq \sigma \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq T$  gelegen sind. Dann gibt es eine absolute Konstante  $A_1$ , so daß die Abschätzung  $N(\Delta, T, D) < A_1 \log^{12} DT \cdot (DT)^{O(1-\Delta)/\Delta}$  gilt. Hiermit ergibt sich folgende Approximation für  $\psi(x, D, L)$ : Sei  $14 \log D \leq \log x \leq \log^3 D$ . Dann existieren positive, absolute Konstanten  $D_1, A_2, A_3$ , so daß



für  $D > D_1$  die Abschätzung

$$\left| \psi(x, D, l) - \frac{x}{\varphi(D)} \left\{ 1 - E(D) \tilde{\chi}(l) \tilde{\beta}^{-1} x^{\tilde{\beta}-1} \right\} \right| < \frac{x}{\varphi(D)} \left\{ A_3 \log^{12} D \cdot \left( \frac{e A^2}{\delta_0 \log D} \right)^{-(A_1 \log x)/2 \log D} + \frac{1}{D} \right\}$$

gilt; dabei ist  $E(D) = 1$ ,  $\delta_0 = 1 - \tilde{\beta}$ , falls  $1 - \tilde{\beta} \leq A_2 \log^{-1} D$ , sonst  $E(D) = 0$ ,  $\delta_0 = A_0 \log^{-1} D$ . Hierbei wird u. a. die Verschärfung des Verf. (s. dies. Zbl. 56, 271) von einer Linnikschen Abschätzung über die Grenze der von  $\tilde{\beta}$  verschiedenen Nullstellen der  $L$ -Reihen verwendet. Endlich wird bewiesen: Es gibt positive, absolute Konstanten  $D_2, A_4, A_5, A_6$ , so daß für  $x^{1-A_4} \leq u \leq x$ ,  $(\log x)/\log \log x \geq A_5 \log D$ ,  $D \geq D_2$  die Abschätzung

$$\left| \psi(x+u, D, l) - \psi(x, D, l) - \frac{u}{\varphi(D)} \left\{ 1 - E(D) \tilde{\chi}(l) x^{\tilde{\beta}-1} \right\} \right| < A_6 \delta_0 \frac{u}{\varphi(D)}$$

gilt.

*H.-E. Richert.*

**Fogels, E. K.:** Über Primzahlen am Anfang einer arithmetischen Progression. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 455—456 (1955) [Russisch].

The author asserts that, by modifying the arguments in Rodosskij's proof of Linnik's theorem on the least prime number in an arithmetic progression (this Zbl. 51, 34; 56, 271), it is possible to prove the following stronger result: Given  $\varepsilon > 0$ , there exists a number  $A_0(\varepsilon) > 30/\varepsilon$  such that if  $D$  is a positive integer  $> 1$ ,  $(l, D) = 1$ , and  $A > A_0(\varepsilon)$ , then there are more than  $D^{A(1-\varepsilon)}$  prime numbers less than  $D^A$  and congruent to  $l$  modulo  $D$ .

*P. T. Bateman.*

**Carlitz, Leonard:** Some class number relations. Math. Z. 62, 167—170 (1955).

Let  $S_{r,s}(n)$  denote the number of representations of the rational integer  $n$  as a sum of squares of which the first  $r$  are odd and the last  $s$  are even. If  $0 \leq a \leq 3$  and  $0 \leq b \leq 3$ , then

$$S_{a+b, 6-a-b}(n) = \sum_{i+j=n} S_{a, 3-a}(i) S_{b, 3-b}(j).$$

For each possible pair of values of  $a$  and  $b$  the author modifies this formula by substituting Glaisher's formula [Quart. J. Math. 38, 1—62 (1907)] for  $S_{r, 6-r}(n)$  on the left and Kronecker's class number formulas [Monatsber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin 1875, 223—236 (1875)] for  $S_{a, 3-a}(i)$  and  $S_{b, 3-b}(j)$  on the right.

*P. T. Bateman.*

**Newman, Morris:** An identity for the coefficients of certain modular forms. J. London math. Soc. 30, 488—493 (1955).

If  $r$  is an integer write  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^r = \sum_{m=0}^{\infty} p_r(m) x^m$  and define  $p_r(m)$  to be zero if  $m$  is not a non-negative integer. In an earlier paper (this Zbl. 50, 269) the author has proved that if  $r = 2, 4, 6$  and  $p$  is a prime number  $> 3$  such that  $r(p+1) \equiv 0 \pmod{24}$ , then

$$p_r(n p + r [p^2 - 1]/24) = (-p)^{(r/2)-1} p_r(n/p)$$

for any integer  $n$ . In the present paper he shows that this assertion is also true for  $r = 8, 10, 14, 26$  but for no other values of  $r$ . The proof uses the theory of modular functions on the group  $\Gamma_0(p)$ .

*P. T. Bateman.*

**Malyšev, A. V.:** Berichtigung zu dem Artikel „Anwendungen der Arithmetik der Quaternionen auf die Theorie der ternären quadratischen Formen und auf die Zerlegung der Zahlen in Kuben“. (UMN, VIII, 5 (57), 3—71 (1953)). Uspechi mat. Nauk 10, Nr. 1 (63), 243—244 (1955) [Russisch].

The author corrects an error in a joint paper with Linnik on ternary quadratic forms of certain special genera. The error is similar to one made by Linnik himself (this Zbl. 24, 250) and corrected by Pall [Amer. J. Math. 64, 503—513 (1942)].

*P. T. Bateman.*

**Oppenheim, A. and E. S. Barnes:** The non-negative values of a ternary quadratic form. *J. London math. Soc.* **30**, 429—439 (1955).

Let  $Q(x, y, z)$  be an indefinite quadratic form of determinant  $d > 0$ . It is shown that there are integer  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  such that

$$0 \leq Q(x, y, z) \leq (16 d/5)^{1/3},$$

the last equality sign being needed if and only if  $Q$  is equivalent to a multiple of  $-x^2 - xy - y^2 + 90z^2$ . The rather delicate proof is an elaboration of the methods of Barnes (this *Zbl.* **64**, 43), where the result was enunciated without proof.

*J. W. S. Cassels.*

**Cassels, J. W. S.:** Bounds for the least solutions of homogeneous quadratic equations. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **51**, 262—264 (1954).

Verf. beweist: Es sei  $f(\mathfrak{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} f_{ij} x_i x_j$  eine ganzzahlige quadratische Form,  $F = \max |f_{ij}|$ ,  $n \geq 2$ , es gebe Gitterpunktvektoren  $\mathfrak{x}$  (nicht der Nullvektor) mit  $f(\mathfrak{x}) = 0$ . Dann gibt es einen Gitterpunktvektor  $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n)$  mit  $f(\mathfrak{a}) = 0$  und  $0 < \max |a_j| < \{(3n^2 + n - 10)(n - 1)^2 F/2\}^{(n-1)/2}$ .

*L. Holzer.*

**Tornheim, Leonard:** Asymmetric minima of quadratic forms and asymmetric Diophantine approximation. *Duke math. J.* **22**, 287—294 (1955).

Es sei  $f(x, y)$  eine indefinite, quadratische Form mit der Diskriminante 1 und ohne rationale Wurzeln.  $P$  sei die Menge der positiven Zahlen und  $N$  die Menge der negativen Zahlen, die von  $f(x, y)$  für ganze Zahlen  $x, y$  dargestellt werden. Es sei  $1/p = \inf P$  und  $-1/n = \sup N$ . Für ein gegebenes ganzes  $k$  sei  $A = \max(p, kn)$ . Für  $k = 1$  (symmetrischer Fall) sind die Werte  $A$  durch die Markoff-Ketten bekannt ( $\sqrt{5}$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{8}, \dots$  mit dem Grenzwert 3). Für beliebiges ganzes  $k$  ist der kleinste Wert von  $A$  gleich  $A_1 = \sqrt{k^2 + 4k}$ . Das nächste Minimum ist

$$A_2 = [k^2 + k + (3k - 1)(k^2 + 4k)^{1/2}] [2(2k - 1)]^{-1} \text{ für } k \geq 2.$$

$A_2$  ist Häufungspunkt von oben. Daher gibt es kein nächstes Minimum. Der Nachweis erfolgt mit Kettenbrüchen. Dabei ergibt sich auch der einfache Zusammenhang mit der asymmetrischen Approximation von Irrationalzahlen durch rationale Zahlen.

*N. Hofreiter.*

**Grammel, R.:** Diophantische Vektorgleichungen. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **9**, 126—147 (1955).

German letters  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r} = (x, y, z), \dots$ , denote vectors in  $R^3$  and Latin letters  $a, b, \dots$  are scalars;  $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$  and  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$  are the scalar and the vector product, respectively. All vectors have integral components, and all scalars are integers. The author determines necessary and sufficient conditions for the existence of integral solutions  $\mathfrak{r}$ , and the dimension of these solutions, for a number of linear equations, in particular the following ones,

$$\begin{aligned} [\mathfrak{a}, \mathfrak{r}] &= \mathfrak{b}; \quad \mathfrak{a}\mathfrak{r} = \mathfrak{b}; \quad \mathfrak{a}\mathfrak{r} = \mathfrak{b} \text{ and } \mathfrak{c}\mathfrak{r} = \mathfrak{d}; \quad [\mathfrak{a}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{r}]] = \mathfrak{c}; \\ [\mathfrak{a}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{r}]] + \mathfrak{c}\mathfrak{r} &= \mathfrak{d}; \quad \mathfrak{a}[\mathfrak{b}, \mathfrak{r}] + \mathfrak{c}\mathfrak{r} = \mathfrak{d}; \quad \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{r}) + \mathfrak{c}\mathfrak{r} = \mathfrak{d}; \quad \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{r}) = \mathfrak{c}(\mathfrak{b}\mathfrak{r}) = \mathfrak{e}; \\ [\mathfrak{a}, [\mathfrak{b}, [\mathfrak{c}, \mathfrak{r}]]] &= \mathfrak{d}; \quad \mathfrak{a}[\mathfrak{b}, [\mathfrak{c}, \mathfrak{r}]] = \mathfrak{d}. \end{aligned}$$

A final paragraph deals with generalisations to other lattices and point sets in  $R^3$ .

*K. Mahler.*

**Bambah, R. P. and K. Rogers:** An inhomogeneous minimum for nonconvex star-regions with hexagonal symmetry. *Canadian J. Math.* **7**, 337—346 (1955).

A generalization of Bambah's theorem on the inhomogeneous minimum of binary cubic forms with three real factors (this *Zbl.* **42**, 275) to any homogeneous function  $f(x, y)$  such that the region  $|f(x, y)| \leq 1$  has similar convexity and symmetry properties to the corresponding region for the cubic form.

*J. W. S. Cassels.*

● **Vries, Dirk de:** Metrische Untersuchungen diophantischer Approximationsprobleme im nicht-lakunären Fall. *Diss. Univ. Amsterdam* 1955. s'Gravenhage: Uitgeverij Excelsior 1955. 93 p. [Holländisch.]



This dissertation is concerned with the generalization of known theorems about the set of  $\theta$  for which (1)  $|x\theta - y| < \varphi(x)$  has infinitely many integer solutions  $y, x > 0$  [where  $\varphi(x)$  is some non-negative function of  $x$ ] to the inequality (2)  $|f(x)\theta - y| < \varphi(x)$ , where  $f(x)$  is some (not necessarily integer-valued) function of the integer variable  $x$ . The enunciations of many of the theorems are highly complicated and somewhat general; here I report only on the salient features. In the first part the author remarks that if  $f(x)$  is positive and integer-valued and if

$$(3) \quad \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N \frac{\Phi(f(x))}{f(x)} \quad (\Phi(g) \text{ is Euler's function})$$

has a lower limit  $> 0$  then  $f(x)$  is a  $\Sigma$ -function in the language of the reviewer (this Zbl. 35, 319): and so if  $\varphi(x)$  is monotone the inequality (2) has infinitely many solutions for almost all or almost no according as  $\Sigma \varphi(x)$  diverges or converges. Indeed if  $f(x)$  is a polynomial with integer coefficients it is shown that (3) tends to

$$(4) \quad \sum \frac{\mu(d) Q_d}{d^2} = \prod_{p \text{ prime}} \left(1 - \frac{Q_p}{p^2}\right) > 0$$

as  $N \rightarrow \infty$ , where  $Q_d$  is the number of solutions of  $f(x) \equiv 0(d)$ ,  $0 < x \leq d$ . For if  $q(d, N)$  is the number of solutions of  $f(x) \equiv 0(d)$ ,  $0 < x \leq N$ , one can justify the change in limiting-processes in

$$\begin{aligned} \lim_N \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N \frac{\Phi(f(x))}{f(x)} &= \lim_N \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N \sum_{d|f(x)} \frac{\mu(d)}{d} = \lim_N \sum_d \frac{\mu(d)}{d} \cdot \frac{q(d, N)}{N} \\ &= \sum_d \frac{\mu(d)}{d} \lim_N \frac{q(d, N)}{N} = \sum_{d^2} \frac{\mu(d) Q_d}{d^2}. \end{aligned}$$

Again, for functions  $f(x)$  which increase slowly and regularly such as  $f(x) = [(\log x)^d]$  ( $d > 0$ ) or  $[(P(x))^{1/m}]$  where  $P(x)$  is polynomial with rational coefficients and degree  $< m$  it is shown that (3) tends to  $6/\pi^2$ : for this is known to be the limit when  $f(x) = x$  and one can apply a partial summation argument. In the second part the author shows that there is a similar 'almost all or almost no' result depending on the divergence or convergence of  $\Sigma \varphi(x)$  when  $f(x) = (ax + b)^{1/n}$  ( $a > 0$ ,  $b \geq 0$  rational,  $n > 0$  integral). Here certain modifications in the proofs are required since  $f(x)$  is not in general an integer, but there is nothing very unexpected. In the third part the author considers the set of  $\theta$  for which

$$|\theta - y, [(P(x))^{1/m}]| < x^{-\alpha}$$

has infinitely many integer solutions  $x > 0, y$ , where  $P(x)$  is a polynomial with integer coefficients and degree  $n$ ;  $m$  is an integer, and  $\alpha > n/m + 1$ . He shows that the set has dimension  $(n/m + 1)/\alpha$  in Hausdorff's sense if either  $m = 1$  or  $m > n$ . The proof uses the machinery constructed by Jarník to deal with  $|\theta - y_i/x| < x^{-\alpha}$  (this Zbl. 1, 324). [The reviewer remarks that the introduction of  $\varphi(p)$  in, for example, Stelling 1 leads to a very great complication in the enunciation and proofs, but the apparent gain in generality is quite bogus for two reasons. In the first place  $\varphi$  occurs only in the combination  $k/\varphi$ , which is obviously independent of  $\varphi$ ; in the second place as soon as the prime  $p$  exceeds the degree and coefficients of the integral polynomial  $P(x)$  it is clear that  $P(x + \varphi) \equiv P(x) (p)$  for all integer  $x$  if and only if  $\varphi \equiv 0 (p)$ ].

J. W. S. Cassels.

• Lutz, Elisabeth: Sur les approximations diophantiennes linéaires  $p$ -adiques. (Actualités scientifiques et industrielles No. 1224.) Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg XII. Paris: Herman & Cie 1955. 106 p. 1200 frs.

This little book gives a very readable account of the present position in the theory of linear Diophantine approximations in the  $P$ -adic field. The material roughly corresponds to that considered, in the real case, in chapters 5, 6, 7 of J. F. Koksma's book (this Zbl. 12, 396). A great deal of the results is due to the author

herself. For the older theory, see, in particular, H. Turkstra, this Zbl. **14**, 345. — Contents: I.  $P$ -adic spaces. Measure. Hyperconvex forms and associated lattices. II. General results on linear Diophantine approximations in the  $P$ -adic field. III. The existence of linear systems having remarkable Diophantine properties. The  $P$ -adic analogue of Kronecker's theorem. IV. Metrical results. — Throughout the book, both homogeneous and inhomogeneous results are studied. The analogy of the results found to those in the real case is striking. It seems probable that many of the theorems of this book may have interesting applications in other subjects, e. g. in the theory of algebraic number fields. K. Mahler.

**Roth, K. F.:** Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika* **2**, 1—20 (1955).

This important paper contains a proof of the long conjectured theorem, „If  $x$  is an algebraic irrational number, and if there are infinitely many fractions  $h/q$  with  $|\alpha - h/q| \leq q^{-\kappa}$ ,  $q > 0$ ,  $(h, q) = 1$ , then  $\kappa \leq 2$ .“ — Much of the proof runs on classical lines. The new ideas are concerned with the multiple zeros at rational points of polynomials in many variables. If  $R(x_1, \dots, x_m) \equiv 0$  is such a polynomial, and if  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  are real numbers and  $r_1, \dots, r_m$  are positive integers, write

$$R(\alpha_1 + y_1, \dots, \alpha_m + y_m) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_m=0}^{\infty} c(j_1, \dots, j_m) y_1^{j_1} \dots y_m^{j_m}.$$

Then the index of  $R$  at  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  relative to  $r_1, \dots, r_m$  is defined as

$$\min (j_1/r_1 + \dots + j_m/r_m)$$

extended over all  $j_1, \dots, j_m$  with  $c(j_1, \dots, j_m) \neq 0$ . This index is a non-Archimedean (logarithmic) valuation. Next let  $B, r_1, \dots, r_m, q_1, \dots, q_m$  be positive integers, and let  $\mathfrak{R}_m = \mathfrak{R}_m(B; r_1, \dots, r_m)$  be the set of all polynomials

$$R(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k_1=0}^{r_1} \dots \sum_{k_m=0}^{r_m} a_{k_1 \dots k_m} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} \equiv 0$$

with integral coefficients satisfying  $|a_{k_1 \dots k_m}| \leq B$ . Denote by  $\Theta_m(B; q_1, \dots, q_m; r_1, \dots, r_m)$  the upper bound of the index of  $R$  at the point  $(h_1/q_1, \dots, h_m/q_m)$ , extended over all  $R \in \mathfrak{R}_m$  and over all integers  $h_1, \dots, h_m$  prime to  $q_1, \dots, q_m$ , respectively. The main lemma states: „Let  $m, r_1, \dots, r_m, q_1, \dots, q_m$  be positive integers and  $\delta$  a real number such that  $0 < \delta < 1/m$ ,  $r_m < 10/\delta$ ,  $r_{j-1}/r_j > 1/\delta$  for  $j = 2, 3, \dots, m$ ,  $\log q_1 > m(2m+1)/\delta$ ,  $r_j \log q_j \geq r_1 \log q_1$  for  $j = 2, 3, \dots, m$ . Then

$$\Theta_m(q_1^{\delta r_1}; q_1, \dots, q_m; r_1, \dots, r_m) < 10^m \delta^{(1/2)^m}.$$

This lemma is proved by induction for  $m$ . — If the theorem were false, one could select  $m$  solutions  $h_j/q_j$  of  $|\alpha - h_j/q_j| < q_j^{-\kappa}$ , where  $\kappa > 2$ , and construct a polynomial  $R \equiv 0$  with not too large integral coefficients, which would be (i) of high index at  $(\alpha, \dots, \alpha)$ , but (ii) of low index at  $P = (h_1/q_1, \dots, h_m/q_m)$ . A certain partial derivative of  $R$ , taken at  $P$ , would then, by (i), be very small in absolute value, while, by (ii), it would be  $\neq 0$ . As  $R$  has a rational value of denominator  $q_1^{r_1} \dots q_m^{r_m}$ , one would arrive at a contradiction. K. Mahler.

**Poitou, Georges:** Approximations diophantiennes et groupe modulaire. *Publ. sci. Univ. Alger, Sér. A* **1**, 15—21 (1955).

This is the abstract of a lecture given in 1954 at a Paris seminar on algebra and the theory of numbers. The author deals mainly with classical results on the minima of binary quadratic and Hermitean forms and their connection with the modular and Picard groups. K. Mahler.

**Tornheim, Leonard:** Approximation to irrationals by classes of rational numbers. *Proc. Amer. math. Soc.* **6**, 260—264 (1955).

Ist  $(m, r, s) = 1$ , so heißt die reelle Zahl  $k_0$  Approximationskoeffizient für  $[m, r, s]$ , wenn die Ungleichung  $k \geq k_0$  gleichbedeutend damit ist, daß für jedes



irrationale  $\xi$  unendlich viele Brüche  $a/b$  mit  $(a, b) = 1$ ,  $a \equiv rt \pmod{m}$ ,  $b \equiv st \pmod{m}$  ( $t$  ganz, von  $a$  und  $b$  abhängig),  $|\xi - a/b| < k/b^2$  existieren. In Fortsetzung bisheriger Betrachtungen [insb. Koksma, dies. Zbl. 44, 43; Descombes und Poitou, C. r. Acad. Sci., Paris 234, 581–583, 1522–24 (1952), Ref. dies. Zbl. 38, 188] zeigt Verf. u. a., daß  $k_0$  nur von  $m$  abhängt und daß  $k_0 = m/\sqrt{5}$  für  $m = p^e$  ( $p > 2$  prim,  $e \geq 0$  ganz),  $k_0 = m/2$  für  $m = 2^e$  ( $e \geq 1$ ),  $k_0 = m$  für  $m = p^e q^f$  ( $q$  und  $q \neq p$  prim,  $e$  und  $f$  positiv). Wird die Bedingung  $(a, b) = 1$  fallen gelassen, so kommt  $k_0 = m/\sqrt{5}$  für jedes  $m$ . Beweismittel elementar. Vom Ref. bemerkte Druckfehler: S. 261 Zeile 15 steht  $\leq$  anstatt  $\geq$ , S. 262 Zeile 3 von unten:  $q$  anstatt  $b$ , S. 263 Zeile 15:  $>$  anstatt  $<$  und Zeile 16: [2] anstatt [3].

S. Hartman.

**Gonçalves, J. Vicente:** Sur le développement des irrationalités quadriques en fraction continue. Univ. Lisboa, Revista Fac. Si., II. Ser. A 4, 273–282 (1955).

Verf. hat (Curso de Algebra superior I, parte 3, p. 125, Lisboa 1953) zwei neue Periodizitätsbeweise für die regelmäßigen Kettenbrüche quadratischer Irrationalzahlen gebracht. Für die vom Verf. dabei gefundenen Formeln hat Perron (dies. Zbl. 64, 47) neue Beweise veröffentlicht, worauf Verf. in Abschnitt 1 zunächst Bezug nimmt. Verf. setzt

$$\xi = (p + \delta)/q \text{ und } \xi_n = (p_n + \delta)/q_n, \text{ wo } \delta = \sqrt{D}$$

irrational ist und  $p, q, D$  ganze Zahlen sind. Es wird dann in Abschnitt 2 eine ganze Zahl  $a$  beliebig vorgegeben. Es läßt sich dabei durch Erweiterung des Bruches  $\xi$  immer erreichen, daß  $D - p^2$  durch  $aq$  teilbar ist. Verf. beweist sodann die Formel

$$(1) \quad p_l = -\varepsilon \sigma_{k-1} p_n + 2\delta \left(\frac{1}{2} - \varepsilon S_k\right)$$

wobei gesetzt ist:  $\beta_v = a_v/\xi_v \xi_{v-1}$ ;  $\sigma_i = |\beta_l \beta_{l-1} \cdots \beta_{l-i}|$ ,  $S_k = \sigma_0 + \cdots + \sigma_{k-2} + \frac{1}{2} \sigma_{k-1}$  ( $S_1 = \frac{1}{2} \sigma_0$ ),  $l = n + k$ ;  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $a_v = \varepsilon \cdot a$ . Wenn nun bei dem Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots$$

$b_{i-1} + a_i \geq a > 0$  für  $i = n + 1, n + 2, \dots$ ,  $|a_v| = a$ ,  $\xi_{l-1} \geq (\xi_l + a)/\xi_l$ ,  $a_{l-1} < 0, \dots, a_{n+1} < 0$  (für  $k > 1$ ) ist, ergibt sich für genügend großes  $l$   $|p_l| < \delta$  oder  $|p_l| < 3\delta$  und damit die Periodizität. Die Ergebnisse von Perron sind hier für  $a = 1$  enthalten. In Abschnitt 3 behandelt Verf. einen etwas allgemeineren Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots,$$

bei dem wieder  $\xi = (p + \delta)/q$  ist,  $\xi_1$  durch  $\xi = b_0 + a_1/\xi_1$  definiert ist und die zu  $\xi_1$  gehörige irrationale Größe  $\delta_1$  mit  $\delta$  durch die Gleichung  $\delta_1 = a_1^2 \delta$  verknüpft wird. Allgemein gilt bei  $\xi_v$ ,  $\delta_v = a_v^2 \delta_{v-1}$ . Für diesen Kettenbruch findet Verf. eine zu (1) analoge Formel und entsprechende Abschätzungen. Die Arbeit weist 2 Druckfehler auf. Im ersten Satz von Abschnitt 2 muß an Stelle von 12 und 13, 11 und 12 stehen. In der 5. und 6. Zeile von Abschnitt 3 muß an Stelle des Index 2 der Index 1 stehen.

J. Mall.

**Djerasimović, Božidar:** Beitrag zur Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche. Math. Z. 62, 320–329 (1955).

Verf. führt für einen geordneten Komplex der Größen oder Symbole  $a_1 a_2 \cdots a_m$  die Bezeichnung  $A = a_1 a_2 \cdots a_m$  ein. Analog wird gesetzt:  $a_1 a_2 \cdots a_m b_1 b_2 \cdots b_m = AB$ . Es gilt auch das assoziative Gesetz  $\{AB\}C = A\{BC\}$ , jedoch nicht das kommutative Gesetz. Es werden ferner für den (hier interessierenden) Fall, daß die  $a_i$  natürliche Zahlen sind, 3 Operationen definiert: 1. Die Inversion:  $A = a_m a_{m-1} \cdots a_3 a_2 a_1$ , 2. Weglassen der ersten oder der letzten Glieder:

$$'A = a_2 a_3 \cdots a_m, \quad A' = a_1 a_2 \cdots a_{m-1},$$

$$^{(k)}A = a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_m, \quad A^{(k)} = a_1 a_2 \cdots a_{m-k}, \quad k \leq m,$$

3. Änderung der geraden Gliederzahl in die ungerade und umgekehrt:

$*A = (1 + a_2) a_3 \cdots a_m$  für  $a_1 = 1$  bzw.  $*A = 1 (a_1 - 1) a_2 a_3 \cdots a_m$  für  $a_1 \geq 2$ ,

Analog für  $A^*$ .  $A = (a_1 a_2 a_3 \cdots) = a_1 + 1 \overline{a_2 + 1} \overline{a_3 + \cdots}$  möge einen regelmäßigen Kettenbruch darstellen, der sich symbolisch nach Euler in der Form  $(a_1 a_2 \cdots a_m) = [a_1 a_2 \cdots a_m] / [a_2 a_3 \cdots a_m]$  oder  $(A) = [A] / [A^*]$  schreiben läßt, wenn  $[A] = [a_1 a_2 \cdots a_m]$  gesetzt wird. Mit den für diese neuen Symbole geltenden Regeln beweist Verf. ziemlich kurz eine Reihe von Formeln, die in den §§ 5, 6, 9 und 11 von Perrons „Die Lehre von den Kettenbrüchen“ (dies. Zbl. 56, 59) abgeleitet wurden. Ferner gestattet ihm diese Symbolik die übersichtliche Formulierung des in IV bewiesenen Satzes 1, der enthält, wie aus dem Kettenbruch einer quadratischen Irrationalzahl unmittelbar der Kettenbruch der zu ihr konjugierten bestimmt werden kann und umgekehrt. Dieser Satz 1 läßt noch einige Erweiterungen und Ergänzungen zu, die ebenfalls in IV gebracht werden. In V wird die neu eingeführte Symbolik auf kulminierende und fastkulminierende Perioden angewandt und dabei ein kurzer Beweis von Ergebnissen gegeben, die Steuerwald (dies. Zbl. 37, 31) gefunden hat. Der erwähnte Beweis umfaßt allerdings nicht alle Ergebnisse von Steuerwald.

*J. Mall.*

**Diananda, P. H. and A. Oppenheim: Criteria for irrationality of certain classes of numbers. II.** Amer. math. Monthly 62, 222—225 (1955).

Fortsetzung einer Note des zweitgenannten Verf. (dies. Zbl. 55, 45). Sei  $x = a_0 + a_1/b_1 + a_2/b_1 b_2 + a_3/b_1 b_2 b_3 + \cdots$  mit ganzrationalen Zahlen  $a_i, b_i$ , die  $0 \leq a_i \leq b_i - 1$  und  $2 \leq b_i$  genügen. Dann wird gezeigt (Th. A): Konvergiert eine Teilfolge von  $a_i/b_i$  gegen eine rationale Zahl  $h/k < 1$  und gilt für diese Teilfolge  $a_i/b_i = h/k$ , dann ist  $x$  irrational. — Setzt man mit beliebigen natürlichen Zahlen  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ):

$$a_{k_{i-1}+1} b_{k_{i-1}+1} - \cdots - a_{k_{i-1}-k_i} b_{k_{i-1}+1} \cdots b_{k_{i-1}+k_i} = A_i/B_i,$$

so gilt wieder  $0 \leq A_i \leq B_i - 1$ ,  $2 \leq B_i$ , und es ist  $x = a_0 + A_1/B_1 + A_2/B_1 B_2 + \cdots$ . Nennt man diesen Übergang eine Verdichtung, so gilt (Th. B): Dann und nur dann ist  $x$  eine rationale Zahl  $h/k$ , wenn es eine Zahl  $N$  und eine Verdichtung gibt, so daß  $A_i = (h/k) (B_i - 1)$  für alle  $i \geq N$  gilt.

*F. Kasch.*

## Analysis.

### Mengenlehre:

● Littlewood, J. E.: The elements of the theory of real functions. Third rev. ed. New York: Dover Publications, Inc. 1955. VII, 71 p. \$ 1,35.

Ein kurze Einführung in die Mengenlehre; die vier Abschnitte sind den Kardinalzahlen, der Wohlordnung, den geordneten Mengen und den Elementen der Punkt-mengenlehre gewidmet.

*H. Hornich.*

Fraissé, Roland: Sur certains opérateurs dans les classes de relations. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 2109—2110 (1955).

$R$  et  $S$  étant des relations à  $m$  arguments parcourant chacun des ensembles de base, l'A. considère les isomorphismes  $\varphi$  (ou „is“) entre une restriction de  $R$  à un ensemble fini  $F$ , et une restriction de  $S$ ; il leur adjoint un élément  $\varphi_\emptyset$  dont l'„ensemble de définition“ serait vide. Il classe les  $\varphi$  par récurrence, au moyen d'un système de deux entiers  $\gamma = (n, p)$ ; le principe est le suivant: tous les is sont des  $(0, p)$ -is; supposant définis les  $(n-1, p')$ -is pour  $p' \leq p$ ,  $\varphi$  sera un  $(n, p)$ -is si, quels que soient  $r \leq p$  et  $F$  formé de  $F$  augmenté de  $r$  éléments, il existe un prolongement  $\bar{\varphi}$  de  $\varphi$  à  $\bar{F}$  qui est un  $(n-1, p-r)$ -is, et s'il en est de même en échangeant  $R$  et  $S$ .  $R$  et  $S$  seront dites  $\gamma$ -parentes lorsque  $\varphi_\emptyset$  est un  $\gamma$ -is de  $R$  vers  $S$ ; la  $\gamma$ -parenté ainsi obtenue avait été indiquée par l'A. sous une forme plus compliquée



(ce Zbl. 40, 164). Il introduit le  $\gamma$ -opérateur  $\mathfrak{P}$  d'espèce  $(m \rightarrow m')$ , qui, à chaque relation  $R$  à  $m$  arguments, associe une relation  $\mathfrak{P}R$  à  $m'$  arguments définie sur la même base; la définition est la suivante: tout  $\gamma$ -is de  $R$  vers  $S$  est encore un is de  $\mathfrak{P}R$  vers  $\mathfrak{P}S$ . L'A. indique sans démonstration des propriétés des  $\gamma$ -opérateurs ainsi que des relations simples entre  $\gamma$ -opérateurs,  $\gamma'$ -is, et  $\gamma''$ -parenté. *R. de Possel.*

**Fraïssé, Roland:** La construction des  $\gamma$ -opérateurs et leur application au calcul logique du premier ordre. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 2191—2193 (1955).

Parmi les  $(0, p)$ -opérateurs d'espèce  $(m \rightarrow m')$  de la note précédente, qu'il nomme maintenant 0-opérateurs, l'A. distingue les opérateurs suivants qu'il nomme „simples“: 1. étant donnés  $\alpha, \beta \leq m'$ , celui qui associe à  $R$  la relation fixe  $I(x_1, \dots, x_{m'})$  égale à  $+$  lorsque  $x_\alpha = x_\beta$  et à  $-$  dans le cas contraire; 2.  $\xi(i)$  étant une fonction à valeur entière  $\leq m'$  définie pour  $i \leq m$ , celui qui associe à  $R$  la relation  $R'$  définie par  $R'(x_1, \dots, x_{m'}) = R(x_{\xi(1)}, \dots, x_{\xi(m)})$ . Il nomme „fonction  $(+, -)$ “ une fonction  $\Theta(z_1, \dots, z_\mu)$  prenant les valeurs  $+$  ou  $-$  lorsque chaque  $z_i$  parcourt l'ensemble  $\{+, -\}$ . Il considère les opérateurs d'espèce  $(m \rightarrow m-1)$ ,  $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{E}_m$  qui, à  $R$ , associent  $S(x_1, \dots, x_{m-1})$  égale à  $+$  lorsque  $R(x_1, \dots, x_{m-1}, y) = +$  resp. pour tout  $y$  ou pour un  $y$  au moins de la base de  $R$ . Un  $\gamma$ -opérateur d'espèce  $(m \rightarrow m')$  peut être construit à partir des opérateurs simples, avec les fonctions  $(+, -)$  et les deux opérateurs particuliers  $\mathfrak{A}_m$  et  $\mathfrak{E}_m$ . L'A. montre qu'il y a correspondance biunivoque entre une telle construction et une formule  $\Phi$  du calcul logique du 1<sup>er</sup> échelon (1<sup>ste</sup> Stufe) ayant un seul prédicat à  $m$  places vides et  $m'$  individus libres. Dans le cas où il n'y a pas d'individus libres, les relations à  $m$  arguments qui vérifient une telle  $\Phi$  constituent une réunion finie  $\Gamma$  de classes définies par les parentés  $\gamma$ . Les  $\Gamma$  sont les „classes arithmétiques“ de A. Tarski (ce Zbl. 49, 7). Pour que deux relations  $R, S$  vérifient les mêmes  $\Phi$ , il faut et suffit que  $R$  et  $S$  soient  $\gamma$ -parentes quel que soit  $\gamma$ . C'est l'„équivalence arithmétique“ de A. Tarski.

*R. de Possel.*

**Medvedev, Ju.T.:** Über nichtisomorphe rekursiv-abzählbare Mengen. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 211—214 (1955) [Russisch].

Let subsets  $E', E''$  of  $N$  (the set of positive integers) be called isomorphic if there is a recursive  $(1, 1)$  mapping of  $N$  onto itself which sends  $E'$  into  $E''$ . Let  $E''$  be called „at least as dense as  $E', E' \dots E''$ “, when there exists a recursive function  $\theta$  such that the number of elements of  $E''$  in the interval  $[1, \theta(n)]$  is at least as great as the number of elements of  $E'$  in  $[1, n]$ . If  $E', E''$  are isomorphic then clearly  $E' \rightarrow E''$  and  $E'' \rightarrow E'$ . Let  $E' \rightarrow E''$  be defined as  $(E' \rightarrow E''$  and not  $E'' \rightarrow E')$ .

Theorem 1: A recursively enumerable set  $H$  with infinite complement  $\bar{H}$  is hypersimple [in the sense of Post, Bull. Amer. math. Soc. 50, 284—316 (1944)], if and only if  $\bar{H} \rightarrow N$ . Theorem 2: If the decision problem (d. p.) of  $E'$  is  $(1, 1)$  reducible to the d. p. of  $E''$  then  $E' \rightarrow E''$ . Theorem 3 shows that it is possible to construct effectively a sequence of type  $\omega$  of hypersimple sets  $H_0, H_1, H_2, \dots$  such that  $\bar{H}_0 \rightarrow \bar{H}_1 \rightarrow \bar{H}_2 \dots$  (so that in particular for  $m \neq n$   $H_n$  is not isomorphic to  $H_m$ ). Theorem 4 states that this is also true if  $\omega$  is replaced by any constructive ordinal  $\alpha$ .

The general question of whether descending sequences  $\dots \bar{H}_2 \rightarrow \bar{H}_1 \rightarrow \bar{H}_0$  exist is left open, although in the case  $\alpha = \omega$  such a sequence (however a non-effective one) can be given. The author asks whether, if  $H_0, H_1$  are hypersimple sets such that  $\bar{H}_0 \rightarrow \bar{H}_1$ , there always exists a hypersimple  $H_2$  such that  $\bar{H}_0 \rightarrow \bar{H}_2 \rightarrow \bar{H}_1$ .

*J. C. Shepherdson.*

**Schmidt, Jürgen:** Eine verallgemeinerte Wohlordnung und die Endlichkeitsbedingungen der Ordnungstheorie. Arch. der Math. 6, 374—381 (1955).

Es werden die folgenden Eigenschaften einer geordneten (= teilweise geordneten) Menge in ihrem gegenseitigen logischen Zusammenhang untersucht: Minimal- und Maximalbedingung, well-partially-ordered (= wpo), total-geordnet, wohl-

geordnet, langenendlich, breitenendlich, endlich. Dabei bedeutet breitenendlich, daß jede Teilmenge, in der  $x \leq y$  stets  $x = y$  nach sich zieht, endlich ist, und wpo, daß es zu jeder Teilmenge  $M$  eine endliche Teilmenge  $N$  so gibt, daß die Menge aller  $y$ , zu denen ein  $x \in M$  mit  $x \leq y$  existiert, übereinstimmt mit der Menge aller  $y$ , zu denen ein  $x \in N$  mit  $x \leq y$  existiert. U. a. wird bewiesen: wpo bedeutet dasselbe wie Breitenendlichkeit zusammen mit Minimalbedingung, wohlgeordnet dasselbe wie total-geordnet zusammen mit wpo, Endlichkeit dasselbe wie Breitenendlichkeit zusammen mit Minimal- und Maximalbedingung. Ferner wird gezeigt: Die Menge ist wpo, wenn jedes ihrer Elemente als obere Grenze von endlich vielen Elementen einer festen wpo Teilmenge dargestellt werden kann. G. Pickert.

**Krbek, Franz von: Wohlordnung.** Acta math. 93, 313–316 (1955).

Verf. behauptet, einen Beweis des Wohlordnungssatzes zu liefern mit Hilfe der folgenden „revidierten“ Fassung des Auswahlaxioms: „In jeder vorliegenden Menge läßt sich stets ein Element auszeichnen“. — Zunächst wird, in der üblichen Weise, gezeigt: Eine totalgeordnete Menge  $T$  mit erstem Element  $a$  besitzt stets einen maximalen durch die Ordnung in  $T$  wohlgeordneten Anfang. Dabei heißt  $A$  Anfang, wenn aus  $x \in A$  und  $y < x$  auch  $y \in A$  folgt. Ferner wird bemerkt: Ist  $T \subseteq E$  totalgeordnet und  $W \neq E$  der maximale innerhalb  $T$  wohlgeordnete Anfang von  $T$ , so kann man einen passenden Teil  $T^* \supset W$  von  $E$  derart totalordnen, daß  $W$  in seiner Anordnung Anfang von  $T^*$  ist. Man erhält dann eine „Verlängerung“  $W^*$  des wohlgeordneten  $W$ , und zwar im wesentlichen einfach durch Anfügen eines Elements aus  $E - W$  an  $W$ . Im Anschluß hieran scheint Verf. es für selbstverständlich zu halten, daß unter allen so (d. h. vermutlich: durch Iteration dieses Verfahrens) gewonnenen wohlgeordneten  $U \subseteq E$ , die ein bereits vorliegendes  $W$  „verlängern“, ein maximales System  $\mathfrak{M}$  paarweise miteinander verträglicher existiert, wobei Verträglichkeit für wohlgeordnete  $U$  und  $V$  bedeutet: „ $U$  ist Anfang von  $V$  oder  $V$  ist Anfang von  $U$ “. Die Vereinigung aller  $U \in \mathfrak{M}$  gibt dann natürlich eine Wohlordnung von  $E$ . Als Ergänzung, für den Fall, man „lehne die Berechtigung ab, so zu definieren“, wird allerdings auch angedeutet, wie die Existenz von  $\mathfrak{M}$  aus einschlägigen, auf dem Auswahlaxiom beruhenden Sätzen gefolgert werden kann. — Zum Abschluß wird auf die Unabhängigkeit des hier benutzten Axioms von den Zermeloschen Axiomen hingewiesen. B. Banaschewski.

**Ocan, Ju. S.: Theorie der Operationen über Mengen.** Uspechi mat. Nauk 10, Nr. 3 (65), 71–128 (1955) [Russisch].

Die Arbeit enthält eine Vorlesung über die Theorie der Mengenoperationen. Unter einer Mengenoperation versteht der Verf. eine Operation, die jeder Folge von Untermengen  $\{E_n\}$  eines abstrakten Raumes  $X$  die Menge

$$\psi\{E_n\} = \sum_{\mathfrak{z} \in N} \left( \prod_{n \in \mathfrak{z}} E_n \cdot \prod_{n \notin \mathfrak{z}} (X - E_n) \right)$$

zuordnet, wo  $N$  eine Klasse der Untermengen  $\mathfrak{z}$  der Menge aller natürlichen Zahlen ist. Das erste Kapitel ist der Theorie allgemeiner Mengenoperationen gewidmet. Im zweiten Kapitel werden positive Mengenoperationen betrachtet, d. h. Operationen  $\psi$  mit der Eigenschaft: wenn  $A_n \subset B_n$  für  $n = 1, 2, \dots$ , dann  $\psi\{A_n\} \subset \psi\{B_n\}$ . Die Klasse der positiven Mengenoperationen ist identisch mit der Klasse der  $\delta$ s-Operationen der Gestalt  $\psi\{E_n\} = \sum_{\mathfrak{z} \in N} \prod_{n \in \mathfrak{z}} E_n$ . Insbesondere wird die  $A$ -Operation

untersucht. Im dritten Kapitel beschäftigt sich der Verf. mit Klassen  $\psi(\mathfrak{R})$  aller Mengen  $\psi\{E_n\}$ , wo  $\{E_n\}$  eine beliebige Folge der zu einer festen Klasse  $\mathfrak{R}$  der Untermengen von  $X$  gehörigen Mengen ist. Das vierte Kapitel ist der Theorie der Mengenoperationen über Untermengen metrischer Räume gewidmet. Insbesondere werden die Borelschen, analytischen und projektiven Mengen und die Existenz- und Invarianzprobleme untersucht. R. Sikorski.

**Kozlova, Z. I.: über die Bedeckung von Mengen.** Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 19, Nr. 2, 125–132 (1955) [Russisch].



The paper contains a generalization of a Glivenko's imbedding theorem such as it was generalized by Ljapunov (this Zbl. 51, 291). The generalization consists (Th. 3, 5) to replace in the Ljapunov's wording the word „ $N$ -unicity“ by „ $N$ - $p$ -fold“, where  $p$  means „finitely“ or a positive integer. Denotations:  $N$  is a rigid basis of a  $\delta$ -operation. A point  $x$  is called a  $N$ - $p$ -fold point of a sequence  $E_n$  of sets provided there are just  $p$  chains of  $N$  each term of which contains  $x$ . Let  $N^*$  (resp.  $N^{**}$ ) be the set of all the chains of  $N$  each of which contains at least 2 (resp.  $\aleph_0$ ) distinct chains of  $N$ . Let  $\Phi_{[Np]^*}$  (resp.  $\Phi_{N^{**}}$ ) be the  $\delta$ -operation taking the points contained in  $\geq p$  (resp.  $\geq \aleph_0$ ) kernels of chains of  $N$ ; in particular, let  $\Phi_{N^*} = \Phi_{[N,1]^*}$ . Let  $N^n$  be the system of all the chains of  $N$  containing the integer  $n$ ; let  $K$  be the system of all intersections of a finite number of sets  $\in N^n$ . A set system  $S$  and a basis  $N$  are in totally regular correspondance, symbolically  $S \varrho N$ , provided that 1. the class  $\Phi_N(S)$  is invariant relative to enumerable unions and intersections, 2. for any  $M \in K$  one has  $\Phi_M(S) \leq \Phi_N(S)$ . If  $S \varrho N$ , then  $\Phi_{[Np]^*}(S) \leq \Phi_N(S)$  (Th. 1),  $\Phi_{[Np]^n}(S) \leq \Phi_N(S)$  (Th. 2),  $\Phi_{N^{**}}(S) \cup \Phi_{N^{**n}}(S) \leq \Phi_N(S)$  (Th. 4).

G. Kurepa.

Albuquerque, J.: Le successioni di insiemi. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 4, 201—224 (1955).

L'A. étudie les opérations  $ps$ ,  $sp$  que voici:  $E_n$  ( $n < \omega$ ) étant une suite d'ensembles, l'A. définit  $ps E_n$  comme l'intersection des ensembles  $E_{k_0}, E_{k_1}, \dots$ ; ici  $k_0, k_1, \dots$  parcourt le système de toutes les suites infinies d'entiers positifs deux à deux distincts. D'une façon duale, on définit  $sp E_n$ . On a  $C ps E_n = sp C E_n$  (Th. 7). L'égalité  $ps E_n = sp E_n$  a lieu si et seulement si la suite  $E_n$  est convergente au sens de la Vallée-Poussin (Th. 16); la même égalité est caractérisée par le système que voici:  $ps E_n \cap ps C E_n = 0$ ,  $ps E_n \cup ps C E_n = 1$  (Th. 14). La suite-réunion (la suite-intersection) d'une suite de suites pareilles est encore une suite pareille (Th. 19). Pour chaque suite  $E_n$  on a  $\lim E_n \leq sp E_n \leq ps E_n \leq \overline{\lim E_n}$  (Th. 20).

G. Kurepa.

Popruženko, J.: Sur une propriété des transformations des ensembles abstraits. Fundamenta math. 41, 163—167 (1955).

Soient  $\alpha$ ,  $X$  un ordinal et un ensemble tels que  $\alpha > 0$ ,  $|X| = \aleph_\alpha = m$ . Soit  $\mu^*(E)$ , ( $E \subseteq X$ ) une mesure extérieure abstraite  $\neq 0$  s'annulant sur chaque point de  $X$ . Soit  $m_0 = \aleph_\tau$  le plus petit cardinal tel que la condition ( $T_\tau$ ) que voici soit vérifiée: Il existe une famille de puissance  $m_0$  de sous-ensembles de  $X$  de  $\mu^*$ -mesure 0, alors que leur union soit un ensemble de  $\mu^*$ -mesure extérieure  $> 0$ . Soit  $\Phi$  une famille de puissance  $m_0$  de sous-ensembles  $A$  d'un ensemble  $Y$  tels que  $|Y| \geq |X|$ ,  $|A| > m_0$ ; soit  $\psi$  une famille de puissance  $m_0$  de transformations univoques  $f$  de  $X$  en  $Y$  telles que pour chaque  $y \in fX$  l'ensemble  $f^{-1}y$  soit  $\mu$ -mesurable. Alors si  $M \subseteq X$ ,  $\mu^*M > 0$ , il existe un  $N \subseteq M$  tel que  $|N| = m_0$ ,  $E \setminus f(N) \neq 0$  pour chaque  $E \in \Phi$  et chaque  $f \in \psi$ . — Si  $X = Y =$  continu linéaire, si  $\mu^* =$  mesure extérieure de Lebesgue et si  $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ , on a  $m_0 = \aleph_0$  et le théorème précédent reproduit un théorème de Sierpinski (ce Zbl. 5, 197).

G. Kurepa.

Popruženko, J.: Sur une décomposition des ensembles indénombrables. II. Fundamenta Math. 41, 272—277 (1955).

L'article fait suite à deux articles antérieures de l'A. (ce Zbl. 55, 281, 282); on se sert de la même terminologie. Proposition ( $K_2$ ):  $E$  étant un ensemble il existe une  $\omega$ -suite de partitions disjointes  $\{E_m^i\}$  ( $m < \omega$ ) telle que, quelles que soient les suites infinies d'entiers positifs  $\{i_s\}$ ,  $\{m_s\}$  dont la première est croissante l'on ait  $|\lim_{s \rightarrow \infty} E_1^{i_s} \cup \dots \cup E_{m_s}^{i_s}| < |E|$ . Soit  $\aleph$  un segment initial de la classe des alephs  $n$  de manière que dans tout ensemble de puissance  $n$  il existe une suite convergente de fonctions réelles qui n'est  $\sigma$ -uniformément convergente dans aucun sous-ensemble de  $E$  de puissance égale à celle de  $E$ . La classe  $\aleph$  n'est pas vide et contient par

exemple l'aleph de Rothberger. On a ceci: Pour qu'un ensemble  $E$  vérifie  $(K_2)$ , il faut et il suffit que  $|E| \in \mathfrak{R}$  (Th. I). L'A. en déduit encore un théorème concernant la mesure abstraite.

G. Kurepa.

Pesin, I. N.: Über die Länge einer total unzusammenhängenden Menge. Uspechi mat. Nauk **10**, Nr. 3 (65), 153 (1955) [Russisch].

### Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

• Natanson, I. P.: Theory of functions of real variable. New York: Ungar 1955. 277 p.

Bledsoe, W. E. and A. P. Morse: Product measures. Trans. Amer. math. Soc. **79**, 173—215 (1955).

Die Grundmenge, in der sich alles abspielt, sei  $S$  und  $\mathfrak{s}$  der (Voll-) Verband aller Teilmengen von  $S$ . Weiter sei  $f|\mathfrak{s}$  eine Maßfunktion (also eine reelle Funktion mit  $0 \leq f$  und  $f(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(B_n)$  für beliebige  $A, B_n \in \mathfrak{s}$  mit  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ).

Für ein beliebiges Teilsystem  $\mathfrak{h}$  von  $\mathfrak{s}$  sei  $f_{\mathfrak{h}}|\mathfrak{s}$  erklärt durch  $f_{\mathfrak{h}}(A) = \inf \left( \sum_{n=1}^{\infty} f(B_n) \right)$ ;

$B_n \in \mathfrak{h}$ ;  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  bzw.  $f_{\mathfrak{h}}(A) = +\infty$ , falls keine  $B_n \in \mathfrak{h}$  mit  $A \subset \bigcup B_n$  existieren. Es ist  $f_{\mathfrak{h}}|\mathfrak{s}$  eine Maßfunktion. — Weiter sei  $\mathfrak{f}$  ein die leere Menge enthaltender  $\delta$ -Verband ( $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{s}$ ) mit  $S = \bigcup_{F \in \mathfrak{f}} F$  und  $\mathfrak{g}$  der  $\sigma$ -Verband der Komplemente der  $F \in \mathfrak{f}$ .

Wir bezeichnen  $f$  als adaptiert an (die Pseudotopologie)  $\mathfrak{f}$ , wenn gilt: (a) Jedes  $F \in \mathfrak{f}$  ist  $f$ -meßbar (im Sinne von Carathéodory); (b) Zu jedem  $G \in \mathfrak{g}$  und jedem  $A \in \mathfrak{s}$  mit  $f(A) < +\infty$  sowie jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $F' = F'(A, G, \varepsilon) \in \mathfrak{f}$  mit  $F' \subset G$  und  $f(A \cap G - A \cap F') < \varepsilon$ . Es heiße  $C \in \mathfrak{s}$  absolut meßbar für  $\mathfrak{f}$ , wenn  $C \subset \bigcup_{F \in \mathfrak{f}} F$  und wenn  $C$   $f$ -meßbar ist für jedes an  $\mathfrak{f}$  adaptierte  $f$ .

Gezeigt wird in §§ 1—3 unter anderem: Unter den für  $\mathfrak{f}$  absolut meßbaren Mengen sind die über  $\mathfrak{f}$  Borelschen (und sogar analytischen) enthalten. Ist  $D$  absolut meßbar für  $\mathfrak{f}$  und ist  $f$  adaptiert an  $\mathfrak{f}$  mit  $f(D) < +\infty$ , so ist  $D$  von innen her beliebig  $f$ -approximierbar aus  $\mathfrak{f}$ , d. h. zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $F'' \in \mathfrak{f}$  mit  $F'' \subset D$  und  $f(D - F'') < \varepsilon$ . — § 4 beschäftigt sich mit  $f$ -integrierbaren Funktionen. Wieder sei  $f|\mathfrak{s}$  eine (beliebige) Maßfunktion. Die reelle (Punkt-) Funktion  $k|S$  heißt  $f$ -integrierbar, wenn erstens  $k \neq 0$  höchstens in einer bezüglich  $f$   $\sigma$ -endlichen Menge  $M \in \mathfrak{s}$  [d. h. zu  $M$  existieren  $M_n \in \mathfrak{s}$  mit  $M = \bigcup_n M_n$  und  $f(M_n) < +\infty$ ];

zweitens  $k$   $f$ -meßbar und drittens die  $f$ -(Unterteilungs-) Integrale  $\int k^{\pm} df = \int k^{\pm}(x) df(x)$  des Positiv- und des Negativteiles  $k^+$  bzw.  $k^-$  von  $k$  nicht beide unendlich sind. Nun sei  $\mathfrak{f}$  ein  $\delta$ -Verband mit  $f_{\mathfrak{f}} = f$ , dessen Mengen sämtlich  $f$ -meßbar und  $\sigma$ -endlich (bezüglich  $f$ ) sind; dann ist jedes  $f$ -integrierbare  $k$  Differenz zweier nicht-negativer  $\mathfrak{f}$ -Treppenfunktionen  $k', k''$  derart, daß  $k(x) = k'(x) - k''(x)$  für  $f$ -fast alle  $x$  und daß  $\int k df = \int k' df - \int k'' df$ . Dabei ist eine nicht-negative  $f$ -Treppenfunktion  $l|S$  so definiert: Es gibt eine reelle, nicht-negative (ev. unendliche) Funktion  $\lambda|\mathfrak{f}$  mit nur abzählbar vielen, von Null verschiedenen Werten derart, daß  $l(x) = \sum_{F \in \mathfrak{f}} \lambda(F) c(x; F)$ , wobei  $c(x; F)$  die charakteristische Funktion

von  $F$  [also  $c(x; F) = 1$  oder  $= 0$ , je nachdem  $x \in F$  oder  $x \in S - F$ ] ist. — In § 5 handelt es sich um den Fubinischen Satz. Es seien  $f'|\mathfrak{s}'$  und  $f''|\mathfrak{s}''$  Maßfunktionen in den Grundmengen  $S'$  und  $S''$ . Wir setzen  $S = S' \times S''$ . Es sei  $\mathfrak{s}$  der (Voll-)Verband aller Teilmengen von  $S$  und  $f|\mathfrak{s}$  eine Maßfunktion. Weiter sei  $\mathfrak{f}^* \subset \mathfrak{s}$  ein  $\delta$ -Verband von bezüglich  $f$  meßbaren und  $\sigma$ -endlichen Mengen mit  $f_{\mathfrak{f}^*} = f$  sowie  $S = \bigcup_{F \in \mathfrak{f}^*} F$  derart, daß  $f(F^*) = \int \left( \int c(x, y; F^*) df'(x) \right) df''(y) =$



$\int (\int c(x, y; F^*) df''(y)) df'(x)$  für jedes  $F^* \in \mathfrak{f}^*$ . Für solche  $f', f'', f$  und  $\mathfrak{f}^*$  gilt dann der Fubinisches Satz: Bei  $f$ -integrierbarem  $k$  ist  $\int (\int k(x, y) df'(x)) df''(y) = \int (\int k(x, y) df''(y)) df'(x) = \int k df$ . — Es gilt aber auch ein von einem  $\mathfrak{f}^*$  unabhängiger, also sozusagen pseudotopologiefreier Fubinischer Satz. Um diesen zu formulieren, wird zunächst erklärt:  $(f', f'')$ -Nilmengen, kurz Nilmengen, sind diejenigen Mengen  $N \in \mathfrak{s}$ , für die  $\int (\int c(x, y; N) df'(x)) df''(y) = \int (\int c(x, y; N) df''(y)) df'(x) = 0$ . Es sei  $\mathfrak{m}$  das System gebildet aus den Nilmengen sowie aus den Produkten  $A' \times A''$ , wobei  $A'$  bzw.  $A''$   $f'$ - bzw.  $f''$ -meßbar und von endlichem Maß ist. Für jedes  $M \in \mathfrak{m}$  gilt dann

$$\int (\int c(x, y; M) df'(x)) df''(y) = \int (\int c(x, y; M) df''(y)) df'(x).$$

Man bezeichne den gemeinsamen Wert dieser beiden Integrale mit  $g^0(M)$ . Es ist  $g^0|_{\mathfrak{m}}$  eine Maßfunktion (auf  $\mathfrak{m}$ ), die zu einer Maßfunktion  $g|_{\mathfrak{s}}$  auf  $\mathfrak{s}$  erweitert wird vermöge  $g = g^0_{\mathfrak{m}}(\text{topologiefreies Produktmaß})$ . Für  $f', f''$  und  $g$  gilt dann der Fubinisches Satz; überdies sind die Nilmengen enthalten unter den  $g$ -Nullmengen und die Produkte von  $f'$ -meßbaren Mengen  $A'$  mit  $f''$ -meßbaren Mengen  $A''$  sind  $g$ -meßbar mit  $g(A' \times A'') = f'(A') \cdot f''(A'')$ . — In § 6 werden „topologische Maße“ betrachtet: Es sei also  $S$  ein (allgemeiner) topologischer Raum und  $\mathfrak{f}$  der Verband der abgeschlossenen Mengen, mithin  $\mathfrak{g}$  der Verband der offenen Mengen. Als (allgemeines) topologisches Maß  $t|_{\mathfrak{s}}$  wird erklärt jede an (die Topologie)  $\mathfrak{f}$  adaptierte Maßfunktion derart, daß jede offene Überdeckung von  $S$  für jedes  $A \in \mathfrak{s}$  mit  $t(A) < +\infty$  ein abzählbares Teilsystem  $G_1, G_2, \dots$  enthält mit  $t(A - A \cap (\bigcup_n G_n)) = 0$ . (Man bemerke, daß wegen der Adaption von  $t$  an  $\mathfrak{f}$  eo ipso alle Borelschen Mengen  $t$ -meßbar sind.) Unter den für solche topologischen Maße bewiesenen Sätzen werde erwähnt: Es sei  $\mathfrak{h} \in \mathfrak{s}$  ein  $\sigma$ -System derart, daß mit  $H \in \mathfrak{h}$  und  $G \in \mathfrak{g}$  auch  $H \cap G \in \mathfrak{h}$ ; dann ist zugleich mit  $t$  auch  $t_{\mathfrak{h}}$  topologisch. Im Zusammenhang damit werden Untersuchungen über in  $A \in \mathfrak{s}$  lokale Nullmengen  $N$  angestellt; das sind solche  $N$ , für die jedes  $x \in N$  eine (offene) Umgebung  $U(x)$  besitzt mit  $t(A \cap U(x)) = 0$ . In einem separablen metrischen Raum sind die topologischen Maße gerade diejenigen Maßfunktionen  $f$ , für welche  $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ , wenn die Distanz von  $A$  und  $B$  positiv ist. — Schließlich behandelt der § 7 Produkte von topologischen Maßen. Als besonders bemerkenswert sei hervorgehoben, daß das topologiefreie Produkt zweier topologischer Maße wieder ein topologisches Maß (im Produktraum) ist (insbesondere sind also die Borelschen Mengen des Produktraumes meßbar für das Produktmaß). — Wegen weiterer Einzelheiten, etwa über „Radonmaße“, muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden, die übrigens, infolge der überaus zahlreichen, ungebräuchlichen Abkürzungen, für die Lektüre ungewöhnliche Schwierigkeiten bietet.

Otto Haupt.

**Srinivasan, T. P.:** On extensions of measures. J. Indian math. Soc., n. Ser. 19, 31—60 (1955).

Ein Maß  $r|_{\mathfrak{R}}$  heißt vollendlich (nach I. E. Segal „measure space“), wenn es endlich ist und aus  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{R}$  und  $\sum_{v=1}^{\infty} r(A_v) < +\infty$  folgt  $\bigcup_{v=1}^{\infty} A_v \in \mathfrak{R}$ . Neben der Vervollständigung  $r'|_{\mathfrak{R}'}$  von  $r|_{\mathfrak{R}}$  führt Verf. noch die spezielle Erweiterung  $\overline{r'}|_{\overline{\mathfrak{R}'}}$  von  $r'|_{\mathfrak{R}'}$  ein:  $\overline{\mathfrak{R}'}$  besteht aus allen Teilmengen  $E$  (der Grundmenge  $E_0$ ), deren Durchschnitt mit jeder Menge aus  $\mathfrak{R}'$  eine Menge aus  $\mathfrak{R}'$  ist, und  $\overline{r'}(E) = \sup \{r'(X) : E \supset X \in \mathfrak{R}'\}$ . Für die hier behandelte Maßtheorie ist ein vom Verf. kürzlich (dies. Zbl. 55, 285) bewiesener Satz von Bedeutung: Ist  $r|_{\mathfrak{R}}$  ein vollendliches Maß, so sind die Mengensysteme  $\mathfrak{R}_*$  bzw.  $\mathfrak{R}^*$  der bezüglich des inneren bzw. äußeren Maßes ( $r_*$  bzw.  $r^*$ ) (im Carathéodoryschen Sinne) meßbaren Mengen mit  $\overline{\mathfrak{R}'}$  identisch und es ist  $r_*|_{\mathfrak{R}_*} = \overline{r'}|_{\overline{\mathfrak{R}'}}$ . Das innere Maß  $r_*$  tritt damit in den Vordergrund; diese

Tendenz verfolgt auch die vorliegende Arbeit, welche nicht-vollendliche Maße zum Gegenstand hat. Das endliche Maß  $r|\mathfrak{R}$  wird zunächst in bekannter Weise erweitert zu  $r_\sigma|\mathfrak{R}_\sigma$  bzw.  $r_\delta|\mathfrak{R}_\delta$  [vgl. Haupt - Pauc, dies. Zbl. 36, 314, oder Haupt - Aumann - Pauc, Diff. u. Integr. Rechnung, Bd. III (dies. Zbl. 64, 48), 3. 1.]. Dann wird ein inneres bzw. äußeres Maß  $r_*$  bzw.  $r^*$  gebildet vermöge  $r_*(A) = \sup \{r_\delta(X) : A \supset X \in \mathfrak{R}_\delta\}$  und  $r^*(A) = \inf \{r_\sigma(Y) : A \subset Y \in \mathfrak{R}_\sigma\}$ , bzw.  $= +\infty$ , falls die Konkurrenzmenge leer ist,  $A \subset E_0$ . Es zeigt sich, daß das System  $\mathfrak{R}_*$  der  $r_*$ -meßbaren Mengen identisch ist mit dem System  $\mathfrak{R}^*$  der  $r^*$ -meßbaren Mengen; jedoch sind die Maße  $r_*|\mathfrak{R}_*$  und  $r^*|\mathfrak{R}^*$  nicht notwendig gleich. Im übrigen aber besitzt  $r_*|\mathfrak{R}_*$  die folgenden Vorzüge gegenüber  $r^*|\mathfrak{R}^*$ : 1.  $r_*|\mathfrak{R}_*$  besitzt mindestens ebenso viele Nullmengen und mindestens ebenso viele Mengen endlichen Maßes und damit auch mindestens ebenso viele summierbare Funktionen wie  $r^*|\mathfrak{R}^*$ ; 2. alle Werte von  $r_*$  sind in natürlicher Weise an die Werte von  $r$  angeschlossen. Dies alles wird bewiesen durch Anwendung des oben genannten Satzes auf ein dem endlichen Maß  $r|\mathfrak{R}$  zugeordnetes vollständiges vollendliches Maß  $\check{r}|\check{\mathfrak{R}}$ , für das zwei Konstruktionen angegeben werden: 1. Man quasimetrisiert in bekannter Weise  $\mathfrak{P}(E_0)$  mittels  $r^*$ , bildet die abgeschlossene Hülle  $\check{\mathfrak{R}}$  von  $\mathfrak{R}$ , oder man setzt  $\check{\mathfrak{R}} = \{E : r_*(E) = r^*(E)\}$ , und definiert beide Maße  $\check{r}|\check{\mathfrak{R}} = r^*|\check{\mathfrak{R}}$ . Zum Schluß wird im Falle, daß  $E_0$  ein lokal-bikompakter Hausdorffscher Raum ist, die Konstruktion eines regulären Inhalts  $k_0|\mathfrak{R}$  aus einem beliebigen Inhalt  $k|\mathfrak{R}$  ( $\mathfrak{R}$  ist das System der bikompakten Teilmengen von  $E_0$ ,  $k$  ist nicht-negativ, endlich monoton, additiv und endlich-vereinigungsbeschränkt) und die Erweiterung von  $k|\mathfrak{R}$  zu einem regulären Borelschen Maß nach ähnlichen Methoden behandelt. *G. Aumann.*

**Marczewski, E.: Remarks on the convergence of measurable sets and measurable functions.** Colloquium math. 3, 118—124 (1955).

$\mu$  sei ein endliches Maß auf einer Booleschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathbf{M}$  mit der Einheit  $X$ . Dann und nur dann ist  $\mu$  rein atomistisch, wenn jede dem Maße nach konvergente Folge  $\mathbf{M}$ -meßbarer reeller Funktionen fast überall konvergiert. Dann und nur dann ist  $\mu$  strikt positiv, wenn aus der Konvergenz fast überall Konvergenz folgt. In beiden Fällen ist bereits die nur mit charakteristischen Funktionen formulierte Konvergenzaussage hinreichend. Bildet  $\mathbf{M}$  eine Boolesche  $\sigma$ -Mengenalgebra, so ist jedes strikt positive Maß auch rein atomistisch. - Es sei  $\mu(X) = 1$ ,  $(p_n)$  eine Zahlenfolge,  $0 \leq p_n \leq 1$  und  $p_{n*} = \min(p_n, 1 - p_n)$ . Zur Existenz stochastisch unabhängiger  $E_n$  mit  $\mu(E_n) = p_n$  reicht hin, daß  $\mu$  atomfrei ist; diese Bedingung ist auch notwendig im Fall  $(*) \sum_n p_{n*} = +\infty$ . Dann und nur dann gibt es zu ge-

gebenen  $p_n$  eine Boolesche  $\sigma$ -Algebra  $\mathbf{M}$ , ein rein atomistisches Maß  $\mu$  und stochastisch unabhängige  $E_n$  mit  $\mu(E_n) = p_n$ , wenn  $(*)$  nicht gilt. *K. Krickeberg.*

**McShane, E. J.: A dominated-convergence theorem.** Duke math. J. 22, 325—331 (1955).

In des Verf. ordnungstheoretischer Theorie der Integration, in der das Integral als Abbildung  $I$  aus einer teilweise geordneten Menge  $F$  in eine andere,  $G$ , erscheint (dies. Zbl. 51, 293), wurden die üblichen Sätze über die Vertauschung von Integration und Grenzübergang, bei monotonen oder majorisierten Folgen von Integranden, nur unter den zusätzlichen Annahmen abgeleitet,  $G$  bilde zugleich eine (additive) Gruppe und sei in seiner Ordnungsstruktur schon durch das System aller reellen Funktionen über  $G$  bestimmt; die letzte Forderung impliziert das Hausdorffsche Trennungsaxiom für die Ordnungstopologie in  $G$ . Hier wird nun die erste, algebraische Voraussetzung durch eine rein ordnungstheoretische über  $I$ ,  $E$  und  $F$  und die zweite durch eine Abschwächung des Hausdorffschen Trennungsaxioms ersetzt. *K. Krickeberg.*

**Vikraman, V.: An approach to the Radon-Nikodym theorem.** Math. Student 23, 1—26 (1955).

$B$ : Boolean  $\sigma$ -algebra of subsets  $X$  of an abstract set  $\Omega$  (containing  $\Omega$ ),  $(\mu)$ : class of all bounded signed measures on  $B$  with the usual definition of partial ordering.



The main purpose of this expository paper is a lattice-theoretic approach to decomposition theorems for measures  $\mu$ . As the most far-reaching and up-to-date memoir in that line the reader may consult H. Bauer [J. reine angew. Math. **194**, 141–179 (1955)], which includes as special cases the principal results of the paper under review. A few results involving  $B$ -partitions seem worth being reported in what follows. If  $\{\mu_\alpha\}$  is any subset of  $(\mu)$ , bounded above by some  $\mu_0 \in (\mu)$ , the l. u. b.  $\kappa$  of  $\{\mu_\alpha\}$  is defined by  $k(X) = \text{l. u. b. } \sum \mu_i(X_i)$  for all sequences of measures  $\mu_i \in \{\mu_\alpha\}$  and all enumerable  $B$ -partitions  $X = \bigcup X_i$  of  $X$ . When  $\alpha = 1, 2, \dots, n_0$ , there exist maximal  $B$ -partitions  $\Omega = \bigcup C_\alpha$ , and  $k(X) = \sum \mu_\alpha(X \cap C_\alpha)$ . [Reviewer's note. The author's conjecture concerning the existence of a maximal  $B$ -partition of  $\Omega$  in the enumerable case  $\alpha = 1, 2, \dots$ , is invalidated by the following counterexample:  $\Omega = [0, 1]$ .  $B =$  family of the Borel subsets of  $\Omega$ .  $\mu =$  Borel measure.  $\{r_\alpha\} =$  set of the rational numbers between 0 and 1.  $f_\alpha(0) = f_\alpha(1) = 0$ ,  $f_\alpha(r_\alpha) = 1$ ,  $f_\alpha$  is linear between 0 and  $r_\alpha$ , and between  $r_\alpha$  and 1.  $\mu_\alpha(X) =$  Lebesgue integral of  $f_\alpha$  over  $X$ .  $\mu_0 = \mu = \text{l. u. b. } \{\mu_\alpha\}$ . Two measures  $\mu$  and  $\nu$  are said to be „mutually singular“ if  $|\mu| \wedge |\nu| = 0$ .  $\nu$  is said to be „absolutely continuous with respect to  $\mu$ “, written  $\nu \ll \mu$ , if the only non-negative  $\mu$ -singular measure  $\ll |\nu|$  is 0. If  $\mu, \nu \geq 0$ , the  $\mu$ -singular part  $\nu_1$  of  $\nu$  is the greatest  $\mu$ -singular measure  $\ll \nu$ ; for  $n = 1, 2, \dots$ ,  $n\mu \wedge \nu$  converges in norm to  $\nu - \nu_1$ . If  $\mu, \nu \geq 0$ ,  $\nu \ll \mu$ ,  $\varepsilon > 0$ , there exists a monotone sequence of finite  $B$ -partitions  $P_j$  of  $\Omega$  and to each  $P_j$  an adapted  $B$ -measurable step function  $f_j$  such that  $|\nu(X) - \int_X f_j(x) d\mu| < \varepsilon/2^j$  for any  $X \in B$ ; any sequence of functions  $f_j$  of the type just described converges a. e. on  $\Omega$  and also in the mean to a function  $f$ ,  $\nu(X) = \int_X f(x) d\mu$  for any  $X \in B$ .

Chr. Pauc.

Kudrjavcev, L. D.: Über die  $p$ -Variation und die Summierbarkeit der Potenzen der Ableitung von Radon-Nikodym. Uspechi mat. Nauk **10**, Nr. 2 (64), 167–174 (1955) [Russisch].

Let  $\mu$  be a  $\sigma$ -finite measure on a  $\sigma$ -field  $\mathfrak{M}$  of subsets of a set  $X$ . If  $\nu$  is another set function on  $\mathfrak{M}$ , and  $E \in \mathfrak{M}$ ,  $p \geq 1$ , then  $S_p(\nu, E) = \sup \sum_{i=1}^n \nu^n(E_i) / \mu^{p-1}(E_i)$  where  $E_i$  is any finite sequence of disjoint sets  $\in \mathfrak{M}$ ,  $E = E_1 + \dots + E_n$  (we assume here  $0/0 = 0$ ). If  $\nu(E) = \int_E g d\mu$  for  $E \in \mathfrak{M}$  ( $g \geq 0$ ), then  $S_p(\nu, E) = \int_E g^p d\mu$ . In order that a  $\sigma$ -additive set function  $\nu$  on  $\mathfrak{M}$  be of the form  $\nu(E) = \int_E g d\mu$  where  $\int_X |g|^p d\mu < \infty$  ( $p > 1$ ), it is necessary and sufficient that  $S_p(|\nu|, X) < \infty$ . — Let  $\lambda$  be another  $\sigma$ -finite measure on a  $\sigma$ -field  $\mathfrak{N}$  of subsets of a set  $Y$ . Let  $f$  be a mapping of  $X$  into  $Y$  such that  $f(E) \in \mathfrak{N}$  and  $\lambda(f(E)) = \int_E g d\mu$  for  $E \in \mathfrak{M}$  where  $g \geq 0$  is a measurable function. The  $p$ -variation of  $f$  on a set  $E \in \mathfrak{M}$  is the number  $\bigvee_E^p f = S_p(\kappa, E)$  where  $\kappa(A) = \lambda(f(A))$  for  $A \in \mathfrak{M}$ . It is proved that  $\bigvee_E^p f = \int_E g^p d\mu$  under some conditions about  $f$ . — The paper contains also a theorem on the integration by substitution (for abstract spaces), and some applications to differentiable mappings of Euclidean spaces into itself.

R. Sikorski.

Goffman, Casper: Convergence in area of integral means. Amer. J. Math. **77**, 563–574 (1955).

Let  $z = f(x, y)$  be any non-parametric not necessarily continuous surface. The rev. (this Zbl. **14**, 296) and the author (this Zbl. **52**, 286) have introduced, in different ways, generalized Lebesgue areas,  $\Phi_c(f)$  and  $\Phi(f)$ , which were proved by the author (loc. cit.) to coincide for every summable  $f$ , and to coincide with ordinary

Lebesgue area  $A(f)$  if  $f$  is continuous. Let  $f_n(x, y)$  be the mean value integrals  $f_n(x, y) = n^2 \int_0^{1/n} \int_0^{1/n} f(x+u, y+v) du dv$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , which are continuous functions. Thus the Lebesgue areas  $A(f_n)$  of the surfaces  $z = f_n(x, y)$  exists,  $n = 1, 2, \dots$ . The author proves that for every summable  $f$  the following limit (finite or  $+\infty$ ) exists and  $\Phi_c(f) = \Phi(f) = \lim A(f_n)$ . In other words, the generalized Lebesgue area can be obtained by a regular limit process. This result extends to discontinuous surfaces the analogous result given by T. Radó for continuous surfaces [Fundamenta Math. 10, 197—210 (1927)]. L. Cesari.

**Pchakadze, S. S.:** Nichtmeßbare, absolut nulldimensionale Mengen, ihre abzählbaren Summen und eigentlich fast-invariante Mengen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 16, 343—350 (1955) [Russisch].

Sequel of a previous paper; we use the same notations as in this Zbl. 56, 278. Several definitions and 9 theorems are announced without proof. The problems  $I_1, II_4$  are answered by positive and by negative, respectively. Let  $m$  be a cardinal number (the author uses integers and initial ordinals instead of cardinals); then a set  $X'$  is of the  $m$ -configuration of a set  $X$  if  $X'$  is the union of  $m$  sets each of which is congruent with a subset of  $X$ . Let  $M$  be a class of sets of  $R^n$ ; a set  $S$  of  $R^n$  is  $m$ -exhausting ( $m$ -non exhausting) neglecting  $M$ , provided there exists a (no)  $m$ -configuration  $S'$  of  $S$  so that  $CS' \in M$ ; the complement of such a  $S$  is called  $m$ -vanishing ( $m$ -non vanishing) neglecting  $M$ .  $S$  is strongly a. z. m. provided every  $\aleph_0$ -configuration of  $S$  is 2-vanishing neglecting  $\{A\}$ ,  $A$  being the void set. Let  $M$  be a resolvable class of  $R^n$ ; a set  $S$  is  $\mu$ -massive, provided  $\mu(CS) = 0$ ; here  $\mu$  denotes the inner measure induced by  $\mu$ . For a system  $F$  of one-to-one mappings of  $R^n$ , a set  $E \subseteq R^n$  is almost  $F$ -invariant (a.  $F$ -i.) provided 1.  $|fE \triangle E| < \aleph$  ( $f \in F$ );  $fE \triangle E$  denotes the symmetrical difference of  $fE, E$ ; 2. if  $|B| < \aleph$ , then  $l(E \setminus B) > 0$ ;  $lX$  denotes the inner  $L$ -measure of  $X$ . An a.  $F$ -i. set is properly a.  $F$ -i. provided its complement too is a.  $F$ -i.  $I^n$  denotes the system of all isometrical mappings of  $R^n$ .  $\varphi$  denotes the initial ordinal of the power  $\aleph$ . There exists a partition of  $R^n$  into a disjointed system of properly a.  $I^n$ -i. sets (cor. 1). Let  $G$  be a subgroup of the group  $R^1 = (R^1; +)$ ; if  $|R^1/G| = \aleph$ , there exists a non measurable strongly a. z. m. set  $A$  intersecting every element of  $R^1/G$  in at most one point and being decomposable into a  $\varphi$ -sequence of pairwise disjoint  $l$ -massive sets (Th. 3). In the space  $R^1$  there exists a resolvable class  $M$  with the measure  $\mu$  and a  $\omega_1$ -sequence  $M_\alpha$  of sets of  $\mu$ -measure 0 so that the union of all the  $M_\alpha$ 's be  $R^1$  (Th. 8). The theorems 3—9 are dealing with  $R^1$ ; the author remarks that he succeeded to prove them for the space  $R^2$  too.

G. Kurepa.

**Bauer, Heinz:** Zur Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1955, 187—208 (1955).

1. Teil. Riemann-Integrierbarkeit bezüglich eines linearen Funktional. § 1. Abstrakter Fall. Der Rahmen und die meisten Resultate in diesem Abschnitt sind aus einer Arbeit von L. H. Loomis (dies. Zbl. 55, 101) entlehnt.  $E$ : nicht leere Menge von Elementen  $p, q, \dots$   $\chi_A$ : charakteristische Funktion von  $A \subseteq E$ .  $\mathcal{Q}$ : Vektorverband von reellen, endlichen Funktionen  $g|E$ , der mit  $g$  auch  $\min(1, g)$  enthält.  $I|\mathcal{Q}$ : reelles, positives lineares Funktional.  $I|\mathcal{Q} = \mathfrak{B}(I|\mathcal{Q})$ : zweiseitige Vervollständigung von  $I|\mathcal{Q}$ .  $\mu|\mathfrak{F} = \mu_I|\mathfrak{F}_I$ : vollständiger Inhalt  $\mu(A) = I(\chi_A)$ , wobei  $\chi_A \in \mathcal{Q}$ .  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_I$ : System der bezüglich  $\mu$  Riemann-integrierbaren Funktionen.  $\int f d\mu$ : Riemann-Integral (über  $E$ ) von  $f \in \mathfrak{S}$ .  $\int^{(u)} f d\mu$ : uneigentliches Riemann-Integral (falls es existiert). Sätze: Es gilt  $\mathfrak{S} \subset \bar{\mathfrak{Q}}$ ,  $\bar{I}(f) = \int f d\mu$  für  $f \in \mathfrak{S}$ . Notwendig und hinreichend für die Riemann-Integrierbarkeit jeder beschränkten Funktion aus  $\mathcal{Q}$  ist folgende von  $I$  unabhängige Bedingung: Zu jeder Funktion  $g \in \mathcal{Q}$  existiert eine Funktion  $h \in \mathcal{Q}$  derart, daß  $g(x) = 0$  ist für jedes  $x \in E$  mit



$h(x) < 1$ . Jede Funktion  $f$  aus  $\mathfrak{L}$  ist uneigentlich Riemann-integrierbar und es gilt  $^{(u)}\int f d\mu \leq I(f)$ . § 2. Zerlegungssätze. Hier werden Zerlegungssätze von K. Yosida und E. Hewitt (dies. Zbl. 46, 54) und von Verf. (dies. Zbl. 52, 265) herangezogen. Bezeichnungen und Sätze:  $I = I_c + I_r$ .  $\bar{I}_c|\bar{\mathfrak{L}}_c = \mathfrak{B}(I_c|\mathfrak{L})$ .  $\bar{I}_r|\bar{\mathfrak{L}}_r = \mathfrak{B}(I_r|\mathfrak{L})$ . Es gilt  $\bar{\mathfrak{L}} = \bar{\mathfrak{L}}_c \cap \bar{\mathfrak{L}}_r$ .  $\bar{\mathfrak{F}} = \bar{\mathfrak{F}}_{I_c} \cap \bar{\mathfrak{F}}_{I_r}$ .  $\bar{\mathfrak{S}} = \bar{\mathfrak{S}}_{I_c} \cap \bar{\mathfrak{S}}_{I_r}$ . Satz 1. Es ist  $I_c|\bar{\mathfrak{L}}$  der stetige und  $\bar{I}_r|\mathfrak{L}$  der rein-unstetige Teil des Funktional  $\bar{I}|\bar{\mathfrak{L}}$ .  $\mu_{I_c}|\bar{\mathfrak{F}}$  ist der  $\sigma$ -additive Teil  $\mu_c|\bar{\mathfrak{F}}$  und  $\mu_{I_r}|\bar{\mathfrak{F}}$  der rein-endlich-additive Teil  $\mu_r|\bar{\mathfrak{F}}$  des Inhalts  $\mu|\bar{\mathfrak{F}}$ . Auf  $\bar{\mathfrak{S}}$  ist  $I_c(f) = \int f d\mu_c$  der stetige und  $\bar{I}_r(f) = \int f d\mu_r$  der rein-unstetige Teil von  $I(f) = \int f d\mu$ . Satz 2 drückt den Zerlegungsparallelismus für  $^{(u)}\int f d\mu|\mathfrak{L}$  aus. In Satz 3 werden die Funktional  $I|\mathfrak{L}$  und  $^{(u)}\int f d\mu|\mathfrak{L}$  bezüglich der durch sie erzeugten Riemann-Integrale verglichen. § 3. Konkreter Fall.  $E$ : lokal kompakter (in der älteren Terminologie „lokal bikompakter und Hausdorffscher“) Raum.  $\mathfrak{R}(E)$ : Menge der stetigen, reellen Funktionen  $g|E$  mit kompaktem Träger. Die Funktionen aus  $\mathfrak{L}$  sind reelle, stetige Funktionen  $g|E$ , welche im Unendlichen verschwinden (d. h. für jede reelle Zahl  $\alpha > 0$ , ist die Urbildmenge  $[|g| \geq \alpha]$  kompakt. Trennbarkeitsforderungen: (T1) Zu jedem Punkt  $p \in E$  existiert eine Funktion  $g \in \mathfrak{L}$  mit  $g(p) \neq 0$ . (T2) Zu je zwei verschiedenen Punkten  $p, q \in E$  existiert eine Funktion  $h \in \mathfrak{L}$  mit  $h(p) \neq h(q)$ . Satz 4. Der Inhalt  $\mu|\bar{\mathfrak{F}}$  ist im Sinne von O. Haupt und Ref. [Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abh. math.-naturw. Kl. 1955, Nr. 7, 189—219 (1955)] an die Topologie von  $E$  adaptiert. Satz 5. Jede Funktion  $f \in \mathfrak{R}(E)$  ist Riemann-integrierbar bezüglich  $\mu$ . Das Integral  $\int f d\mu$ , aufgefaßt als lineares Funktional  $\mathfrak{R}(E)$ , ist das einzige positive Radonsche Maß  $\varrho$  auf  $E$  (im Sinne von N. Bourbaki), in bezug auf welches jede Menge  $A \in \bar{\mathfrak{F}}$   $\varrho$ -integrierbar ist mit  $\varrho(A) = \mu(A)$ . Satz 6. Es ist  $\bar{\mathfrak{F}}$  das System aller  $\varrho$ -quadrierbaren Teilmengen von  $E$ . Satz 7. Es ist  $\bar{\mathfrak{S}}$  das System aller beschränkten,  $\varrho$ -fast überall stetigen Funktionen  $f|E$ . Ferner ist  $\bar{\mathfrak{S}}$  die zweiseitige Vervollständigung von  $\mathfrak{R}(E)$  bezüglich  $\varrho$ . Jede Funktion  $f \in \bar{\mathfrak{S}}$  ist  $\varrho$ -integrierbar mit  $\int f d\varrho = \int f d\mu$ . Sätze 8 und 9 befassen sich mit den Zerlegungseigenschaften von  $I$  und  $\mu$ . Hier sei erwähnt:  $\mu_c = \mu$ .  $\bar{\mathfrak{F}} = \bar{\mathfrak{F}}_c$ .  $\bar{\mathfrak{S}} = \bar{\mathfrak{S}}_c$ .  $\bar{\mathfrak{F}}_r$  ist das System aller beschränkten Teilmengen von  $E$  und  $\bar{\mathfrak{S}}_r$  das System aller beschränkten Funktionen  $f|E$  mit kompaktem Träger. § 4. Zurückführung des abstrakten Falles auf den konkreten. Es liegt wieder der abstrakte Rahmen von § 1 vor. O. B. d. A. wird die Beschränktheit der Funktionen aus  $\mathfrak{L}$  angenommen. Außerdem setzt man (T1) und (T2) voraus. Es gilt folgender Darstellungssatz (aus Sätzen 10 und 11): Es existiert ein bis auf Homöomorphismen eindeutig bestimmter, lokal kompakter Raum  $E'_\mathfrak{L}$  derart, daß  $E$  in  $E'_\mathfrak{L}$  dicht liegt und jede Funktion  $g \in \mathfrak{L}$  zu einer auf  $E'_\mathfrak{L}$  stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktion  $g'$  fortgesetzt werden kann. Aus dem übertragenen Funktional  $I'(g') = I(g)$  wird ein an  $E'_\mathfrak{L}$  adaptierter Inhalt  $\mu'$  gewonnen und daraus ein Radonsches Maß  $\varrho'$ . Dann sind die auf  $E$  im Sinne von § 1 bezüglich  $\mu$  Riemann-integrierbaren Funktionen genau die Verengerungen der bezüglich  $\mu'$  im Sinne von Haupt und Ref. auf  $E'_\mathfrak{L}$  Riemann-integrierbaren Funktionen. Satz 12 bringt ein funktionales Gegenstück zur topologischen Interpretation von  $\mu_c$  in einer früheren Note des Verf. (dies. Zbl. 56, 54), nämlich eine Interpretation von  $I_c(f)$  als  $\varrho'$ -Oberintegral, falls  $f \geq 0$  ist. 2. Teil. Vage Konvergenz von Filtern linearer Funktional. § 5. Abstrakter Fall. Der Loomissche Rahmen von § 1 wird zugrunde gelegt.  $\mathfrak{F}_+(\mathfrak{L})$ : Menge der auf  $\mathfrak{L}$  erklärten, positiven, linearen Funktional. Ein Filter  $\Phi$  in  $\mathfrak{F}_+(\mathfrak{L})$  konvergiert vag gegen  $I_0 \in \mathfrak{F}_+(\mathfrak{L})$  wenn  $\lim_{\Phi} I(g) = I_0(g)$  für jede Funktion  $g \in \mathfrak{L}$ . Satz 14. Notwendig und hinreichend für die vage Konvergenz der Folge  $I_1, I_2, \dots$  gegen  $I_0$  ist die Gültigkeit der Gleichung  $\lim \mu_n(Q) = \mu_0(Q)$  für jede Menge  $Q \in \bar{\mathfrak{F}}_n$ . § 6. Konkreter Fall.  $E, \mathfrak{R}(E)$  wie in § 3.  $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}(E)$ .  $\mathfrak{M}_+(E)$ : Menge der positiven Radonschen Maße auf  $E$ . Satz 16. Der Filter  $\bar{\mathfrak{F}}$  in  $\mathfrak{M}_+(E)$  konvergiert dann und

nur dann vag gegen  $\varrho_0$ , wenn  $\lim \varrho(Q) = \varrho_0(Q)$  ist für jede  $\varrho_0$ -quadrirbare, kompakte (oder jede  $\varrho_0$ -quadrirbare offene oder jede  $\varrho_0$ -quadrirbare Borelsche) Menge  $Q$ . Satz 17 gibt Kriterien, die alle kompakte Mengen  $K$  und alle beschränkte, offene Mengen  $G$  heranziehen. Der spezielle Fall, wenn  $E$  kompakt ist, wird berücksichtigt. Die reichhaltige und bedeutende Note enthält keine Beweise; diese sind einer baldigen Publikation (voraussichtlich in der Math. Z.) vorbehalten. Die Note weist folgende Merkmale auf: Es werden gleichzeitig funktionale und mengentheoretische (somatische) Zusammenhänge untersucht mit Klarlegung der wechselseitigen Beziehungen, sowie der abstrakte (atopologische) und der konkrete (topologische) Fall mit eventueller Zurückführung des ersteren auf den letzteren.  $\sigma$ -Additivitäts- und Stetigkeitseffekte werden „bemessen“ und topologisch (mittels Kompaktifizierung) interpretiert.

*Chr. Pawc.*

**Viola, Tullio:** *Sulle funzioni quasi continue composte.* Rend. Mat. e Appl. **14**, 411—421 (1955).

Unter Bezugnahme auf die in Picone-Viola (Lezioni sulla Teoria Moderna dell'Integrazione, dies. Zbl. **46**, 281) gegebenen Definitionen beweist Verf. folgendes Theorem: Gegeben sei die in  $J$  definierte und daselbst in bezug auf die Elementarmasse  $\alpha(T)$  faststetige Funktion  $Q = f(P)$ . Damit für jede im Wertebereich  $\bar{J}$  definierte und in bezug auf die Elementarmasse  $\beta(T)$  faststetige Funktion  $\varphi(Q)$  die zusammengesetzte Funktion  $\varphi[f(P)]$  in  $J$  faststetig ausfällt, ist notwendig und hinreichend, daß zu jeder Lebesgueschen Menge mit der Masse  $m_\alpha E > 0$  ein Wertebereich  $\bar{E}$  mit  $m_\beta \bar{E} > 0$  gehört.

*M. J. De Schwarz.*

**Viola, Tullio:** *Funzioni quasi continue in spazi astratti.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **18**, 145—147 (1955).

Vengono annunciati alcuni risultati relativi ad un concetto di funzione  $Q = f(P)$  quasi continua rispetto ad una misura  $\mu$ , dato nella ipotesi che  $P$  e  $Q$  siano punti di spazi topologici e i „valori“ di  $\mu$  siano punti di uno spazio additivo di Fréchet.

*G. Fichera.*

**Nevanlinna, Rolf:** *Über die Umkehrung differenzierbarer Abbildungen.* Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **185**, 12 S. (1955).

$L_x$  und  $L_y$  seien zwei lineare Räume von gleicher, endlicher Dimension, die durch zwei positiv definite Bilinearformen metrisiert sind.  $y = y(x)$  sei eine eindeutige Abbildung der Kugel  $|x| < R_x$  in den Raum  $L_y$  mit  $y(0) = 0$ , wobei folgende Bedingungen gelten sollen: A:  $y(x)$  ist für  $|x| < R_x$  differenzierbar. B: Der Ableitungsoperator  $y'(x)$  ist für  $x = 0$  stetig. C: Der Operator  $y'(0)$  ist  $\neq 0$ . Dann gilt der Umkehrsatz: Es gibt zwei positive Zahlen  $\varrho_x$  und  $\varrho_y$ , so daß die Kugel  $|x| < \varrho_x$  durch  $y = y(x)$  schlicht abgebildet wird, wobei die Bildpunkte  $y$  die Kugel  $|y| < \varrho_y$  voll überdecken. — Wenn  $y'(x)$  in  $x = 0$  nicht nur stetig ist, sondern einer Lipschitzbedingung genügt, so lassen sich für  $\varrho_x$  und  $\varrho_y$  bestimmte Werte angeben. — Die Sätze lassen sich unter naturgemäßen Modifikationen auf den Fall erweitern, daß die Dimensionszahl von  $L_y$  größer als die von  $L_x$  ist. — Vermittels des Umkehrsatzes kann man die Auflösung von impliziten Funktionen bewerkstelligen. — Die Sätze lassen sich auf Räume unendlicher Dimension verallgemeinern, wenn sie eine vollständige Hilbertsche Metrik besitzen.

*G. Doetsch.*

**Łojasiewicz, S.:** *Sur la formule de Green-Gauss-Ostrogradsky.* Ann. Polon. Math. **1**, 306—325 (1955).

Grundbereich ist der  $n$ -dimensionale euklidische Raum  $E_n$  der  $X = (x_i) = (x_1, \dots, x_n)$ . Es sei  $G$  eine beschränkte offene Menge derart, daß die Begrenzung  $S = \bar{G} - G$  von  $G$  mit derjenigen von  $E_n - \bar{G}$  übereinstimmt. Es sei  $S = C \cup \bigcup_r S_r$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , wobei für die paarweise fremden  $C, S_r$  gilt:  $C$  ist abgeschlossen und vom  $(n-1)$ -dimensionalen Hausdorffschen Maß Null, ferner  $S_r$  offen in  $S$  und homöo-



morphes Bild vermöge  $X = X^r(U) = (x_1^r(U), \dots, x_n^r(U))$  eines  $(n-1)$ -dimens. Gebietes  $D^r$  im Raum der  $U = (u_j) = (u_1, \dots, u_{n-1})$ ; dabei seien die  $x_i^r(U)$  von der Klasse  $C^1$  (d. h. stetig differenzierbar) und die Funktionalmatrizen  $||\partial x_i^r / \partial u_j||$  vom (maximalen) Rang  $n-1$ . Der Normalenvektor  $A^r(U) = (a_i^r(U))$  von  $S^r$  sei ins Äußere von  $G$  gerichtet. Die Komponenten  $f_i$  von  $F(X) = (f_i(X))$  seien in einer offenen Obermenge von  $\bar{G}$  erklärt und von der Klasse  $C^1$ . — Beh. Ist  $|F(X^r(U))| \cdot |A^r(U)|$  summierbar über  $D^r$  und gilt (B)  $\sum_r \int_{D^r} |F(X^r)| \cdot |A^r| dU < +\infty$ , so gilt auch  $\int_G \operatorname{div} F dX = \sum_r \int_{D^r} F(X^r) A^r dU$ . Die letzte Gleichung ist auch dann richtig, wenn die  $f_i$  von der Klasse  $C^1$  und beschränkt in  $G$ , ferner stetig in  $G \cup \bigcup S^r$  sind und wenn  $\operatorname{div} F$  summierbar in  $G$  sowie (B) erfüllt ist. Otto Haupt.

**Ravetz, J. R.:** A descriptive analysis of continuous functions of two real variables. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 6, 9–26 (1955).

Es sei  $f(z)$  eine in der offenen Menge  $R$  stetige reelle Funktion der komplexen Veränderlichen  $z = x + iy$ . Man setze für  $z_0 \in R$  und für beliebiges reelles  $\mu$

$$\partial^\mu f(z_0) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \sup_{0 < r < \varrho} r^{-1} [f(z_0 + r e^{i\mu}) - f(z_0)]$$

und

$$D^\mu f(z_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \sup_{h \in S_{\mu}(\varrho, \eta)} |h|^{-1} [f(z_0 + h) - f(z_0)],$$

wo  $S_\mu(\varrho, \eta)$  die Menge der Punkte  $z = r e^{i\vartheta}$  mit  $0 < r < \varrho$ ,  $\mu - \eta < \vartheta < \mu + \eta$  bedeutet. Analog werden  $\partial_\mu f(z_0)$  und  $D_\mu f(z_0)$  definiert. Es wird bewiesen als Verallgemeinerung eines Satzes von W. H. Young [Proc. London math. Soc., II. Ser. 6, 298–320 (1908)], daß für konstantes  $\mu$  die Menge der Punkte  $z$  mit  $\partial^\mu f(z) \neq \partial_{\mu+\pi} f(z)$  von erster Kategorie in  $R$  ist. Beispiel einer dehnungsbeschränkten Funktion  $f(z)$  von der Art, daß auf einer Residualmenge  $D^0 f(z) = 1$ ,  $D_0 f(z) = 0$  gilt. Der Beweis folgender Behauptungen enthält wesentliche Lücken, die zu ergänzen dem Ref. nicht gelungen ist: Es gibt zwei offene Teilmengen  $U$  und  $V$  von  $R$  mit der Eigenschaft, daß  $U + V$  in  $R$  dicht ist, für  $z \in V$  und für beliebiges  $\vartheta$   $D^\vartheta f(z) = \partial^\vartheta f(z)$  und  $D_\vartheta f(z) = \partial_\vartheta f(z)$  stetige und beschränkte Funktionen von  $\vartheta$  sind, und für die Punkte  $z$  einer Residualmenge in  $U$  die Menge der  $\vartheta$  mit  $D^\vartheta f(z) = -D_{\vartheta+\pi} f(z) = +\infty$  ein abgeschlossenes Intervall von der Länge  $\pi$  enthält. Bei gegebenem  $\mu$  gibt es zwei offene Teilmengen  $H$  und  $J$  von  $R$  von der Art, daß  $H + J$  dicht in  $R$  ist, für  $z \in H$   $D^\mu f(z) = \partial^\mu f(z)$  und  $D_{\mu+\pi} f(z) = \partial_{\mu+\pi} f(z)$  gilt, und für die Punkte  $z$  einer Residualmenge in  $J$   $D^\mu f(z) = D^{\mu+\pi} f(z) = +\infty$ ,  $D_\mu f(z) = D_{\mu+\pi} f(z) = -\infty$  gilt; unter denselben Voraussetzungen ist die Menge der  $z$  mit  $D^\mu f(z) \neq -D_{\mu+\pi} f(z)$  von erster Kategorie in  $R$ . Á. Czászár.

**Backes, F.:** Sur une formule de Dirichlet et le reste de Laplace. Mathesis 64, 5–8 (1955).

Existiert  $f(x, y)$  und seine partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $n$ , so liefert die Umformung von Doppelintegralen auf naheliegende Weise

$$(n-1)! \left\{ f(x, y) - \sum_{0 \leq h, k}^{h+k \leq n-1} \frac{x^h}{h!} \frac{y^k}{k!} \left[ \frac{\partial^{h+k} f}{\partial x^h \partial y^k} \right]_{0,0} \right\} = \int_0^1 dt (1-t)^{n-1} \frac{d^n f(tx, ty)}{dt^n}.$$

Eine Beurteilung des Restbetrages wird nicht gegeben. W. Maier.

**Fan, Ky, Olga Taussky und John Todd:** Discrete analogs of inequalities of Wirtinger. Monatsh. Math. 59, 73–90 (1955).

Für Funktionen  $x(t)$  mit  $x' \in L^2$  und  $x(0) = 0$  gilt  $\int_0^{\pi/2} x^2 dt < \int_0^{\pi/2} x'^2 dt$ , außer wenn  $x$  die Gestalt  $A \sin t$  hat. Diesem Satz entspricht die finite Aussage: Für  $n$  reelle oder komplexe Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  mit  $x_1 = 0$  gilt

$$4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n-1)} \sum_{i=1}^n |x_i|^2 < \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta x_i|^2 \quad \text{mit} \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i,$$

außer wenn  $x_i = A y_i$  mit  $y_i = \sin((i-1)\pi/(2n-1))$  ist. Für  $n \rightarrow \infty$  geht die finite Aussage in die erstgenannte Ungleichung, aber mit Einschluß des Gleichheitszeichens über. Entsprechende Formeln ergeben sich, falls  $x(t)$  an beiden Intervallenden verschwindet oder periodisch ist. Die Ungleichung

$$16 \sin^4 \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{i=0}^n x_i^2 < \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta^2 x_i)^2$$

mit  $x_0 = x_{n+1} = 0$  [und  $x_i$  nicht  $= A \cdot (\sin i\pi/(n+1))$ ] entspricht dem Satz  $\int_0^\pi x^2 dt < \int_0^\pi x'^2 dt$  bei  $x(0) = x(\pi) = 0$  mit  $x \neq A \sin t$ . Ein ähnlicher Satz

gilt für die Bedingungen  $x_0 = x_1$ ,  $x_n = x_{n+1}$ ,  $\sigma = \sum_{i=1}^n x_i = 0$  an Stelle von  $x_0 = x_{n+1} = 0$ . Für  $x_0 = x_n$ ,  $x_1 = x_{n+1}$ ,  $\sigma = 0$  ( $r > 0$  ganz) gilt:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n |x_i|^r \leq [(n-1)/2]^r \sum_{i=1}^n |\Delta x_i|^r \quad \text{und} \quad \Phi \leq [(n^2-1)/12]^r \sum_{i=1}^n |\Delta^2 x_{i-1}|^r$$

und für  $x_1 = x_{n+1}$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\text{Max}_i |x_i| = 1$ ,  $\mu = \text{Max}_i |\Delta x_i|$  ist das Minimum von  $\mu$  gleich  $4/n$  für gerades  $n$  und  $4n/(n^2-1)$  für ungerades  $n$ . Auch diese Aussagen entsprechen Ungleichungen für Funktionen  $x(t)$ . L. Collatz.

**Brachman, Malcolm K.:** Note on an integral of Ramanujan. J. Math. Physics **33**, 374—375 (1955).

Es werden Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  angegeben, für die sich das Integral

$$J(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech } \pi x \cos \alpha x e^{-\beta x^2} dx$$

explizit ausrechnen läßt.

G. Doetsch.

**Pastides, Nicolas:** On the classes  $C\{M_n\}$  of infinitely differentiable real functions. J. London math. Soc. **30**, 212—220 (1955).

$\{M_n\}$  being a sequence of positive numbers, let  $C\{M_n\}$  denote the class of all infinitely differentiable  $f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) such that  $|f^{(n)}(x)| \leq k^n M_n$  for  $a \leq x \leq b$ ,  $n = 1, 2, \dots$  and some  $k \geq 0$ . Let the sequence  $f_p(x) \in C\{M_n\}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) converge to  $F(x)$ . Put  $k_{p,n} = \max_{q \leq n} \{ \max_{a \leq x \leq b} (|f_p^{(q)}(x)|/M_q)^{1/q} \}$  and  $\mu_n = \limsup_{p \rightarrow \infty} k_{p,n}$ .

— 1. If every  $\mu_n$  is finite (i. e. if for every  $n$  the sequence  $\{k_{p,n}\}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) is bounded) and  $F(x) \in C\{M_n\}$ , then the sequence  $\{\mu_n\}$  is bounded. 2. If the sequence  $\{\mu_n\}$  is bounded, then  $F(x) \in C\{M_n\}$ . — An example is given where  $F(x) \in C\{M_n\}$  but  $\mu_n = \infty$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). The special case  $M_n = n!$ , when  $C\{n!\}$  becomes the class of analytic functions in  $[a, b]$ , is also considered. (Page 216, line 14 from bottom, instead of  $|f^{(n)}(x)|$ , read  $|f_p^{(n)}(x)|$ .) J. Horváth.

**Salzmann, Helmut und Karl Zeller:** Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen. Math. Z. **62**, 354—367 (1955).

Für in einem Intervall unendlich oft differenzierbare Funktionen wird die Struktur deren singulärer Punkte untersucht; dabei heißt ein Punkt regulär, falls die Funktion durch ihre Taylorreihe um ihn in einer Umgebung dargestellt wird; wenn nicht (singulärer Punkt), wird noch zwischen Divergenzpunkten (Konvergenzradius der Taylorreihe gleich Null) und Fehlkonvergenzpunkten (Konvergenz der Taylorreihe in einer Umgebung, aber nicht gegen die Funktion) unterschieden. Es werden die zwei Methoden angegeben, Funktionen mit singulären Punkten zu gewinnen: durch Addition von regulären Funktionen, deren Ableitungen gewissen Wachstumsbedingungen genügen; durch Benutzung der Cauchyschen Funktion  $\exp(-x^2)$ . Neu bewiesen wird das Hauptergebnis von Zahorski [C. r. Acad. Sci. Paris **223**, 449—451 (1946); dies. Zbl. **33**, 255]: Die regulären Punkte bilden eine offene Menge, die Fehlkonvergenzpunkte eine magere  $F_\sigma$ -Menge und die Divergenzpunkte eine  $G_\sigma$ -Menge. Und zu jedem solchen disjunkten Mengentripel gehören unendlich oft differenzier-



bare Funktionen. Wegen der Durchführung und wegen der umfassenden Literaturangaben muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *D. Morgenstern.*

**Malliavin, Paul:** La quasi-analyticité généralisée sur un intervalle borné. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. **72**, 93—101 (1955).

Démonstrations détaillées des résultats énoncés dans une note antérieure (ce Zbl. **64**, 54). *J. Horvath.*

**Scorza Toso, Annamaria:** Sugli estremi parziali di una funzione di due variabili e la nozione di semicontinuità in una famiglia di insiemi. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **24**, 93—102 (1955).

La funzione  $f(x, y)$  sia data nell'insieme  $I$  del piano  $(x, y)$ ;  $I_y$  sia la proiezione di  $I$  sull'asse  $y$  secondo la direzione dell'asse  $x$ ;  $S(y)$  sia la sezione di  $I$  con l'orizzontale di ordinata  $y$ , per  $y$  contenuto in  $I_y$ , e si ponga  $e'(y) = \text{extr inf}_{(x, y) \in S(y)} f(x, y)$

ed  $e''(y) = \text{extr sup}_{(x, y) \in S(y)} f(x, y)$ . L'A., completando e perfezionando alcuni teoremi di

Scorza Dragoni [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. Ser. **5**, 579—583 (1927); **11**, 865—872 (1930)] e di Bonnesen (Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes, Paris 1929, 12), dimostra che: Se  $S(y)$  è inferiormente semicontinua in  $I_y$ ,  $e''(y)$  è inferiormente [ $e'(y)$  è superiormente] semicontinua in  $I_y$ , se  $f(x, y)$  è inferiormente (superiormente) semicontinua in  $I$ . Se l'insieme  $I$  è limitato nell'intorno di ogni sua sezione  $S(y)$  e se  $S(y)$  è superiormente semicontinua in  $I_y$ ,  $e'(y)$  è inferiormente [ $e''(y)$  è superiormente] semicontinua in  $I_y$ , se  $f(x, y)$  è inferiormente (superiormente) semicontinua in  $I$ . In particolare, se l'insieme  $I$  è limitato ed  $S(y)$  è continua in  $I_y$ , il che implica la chiusura di  $S(y)$ ,  $e'(y)$  ed  $e''(y)$  son continue in  $I_y$ , se  $f(x, y)$  è tale in  $I$ . *G. Scorza Dragoni.*

**Rosenthal, Arthur:** On the continuity of functions of several variables. Math. Z. **63**, 31—38 (1955).

1. Es sei  $p_0 = (x_0, y_0)$  ein Punkt in der (reellen)  $(x, y)$ -Ebene  $R_2$ . Ein den Punkt  $p_0$  enthaltender (einfacher) Bogen mit stetiger Tangente heiße  $p_0$ -Bogen (in  $R_2$ ). Verf. zeigt: Damit die reelle, eindeutige in einer Umgebung von  $p_0$  erklärte Funktion  $f(p) = f(x, y)$  stetig sei in  $p_0$  als Funktion von  $p$  ist (a) hinreichend bzw. (b) nicht hinreichend (wenigstens im allgemeinen), daß  $f(x, y)$  stetig sei in  $p_0$  auf (a) jedem konvexen bzw. (b) auf jedem (mindestens in  $p_0$ ) zweimal differenzierbaren  $p_0$ -Bogen. — (2) Die Beh. (a) in Ziff. 1. gilt für eindeutige reelle Funktionen  $f(p) = f(x_1, \dots, x_n)$  mit  $n \geq 3$ , wenn man in der Beh. ersetzt: „konvexer  $p_0$ -Bogen“ durch „primitiver  $p_0$ -Bogen  $S_n$  im  $R_n$ “, wobei  $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Ein solcher ist vermöge vollständiger Induktion so definiert: Die primitiven  $C_2$  sind identisch mit den konvexen  $p_0$ -Bogen. Für  $n \geq 3$  sei  $S_n$  primitiver  $p_0$ -Bogen, wenn  $S_n$  stetige Tangente besitzt,  $p_0$  enthält und entweder eine Strecke ist oder sich in die zur Tangente  $t_n$  in  $p_0$  an  $C_n$  orthogonale Hyperebene  $P_{n-1}$  orthogonal als ein primitiver  $p_0$ -Bogen  $C_{n-1}$  projiziert, dessen Tangente  $t_{n-1}$  in  $p_0$  mit  $t_n$  eine 2-dimensionale Ebene aufspannt, in die sich  $C_n$  orthogonal als Konvexbogen projiziert. — (3) Zum Beweise des Satzes in Ziff. 1. wird folgender Hilfssatz herangezogen, der dann auch für den  $R_n$  entsprechend verallgemeinert wird: Jede beschränkte, unendliche Punktmenge  $M$  in  $R_2$  enthält eine unendliche Teilmenge  $M'$ , welche auf einem geeignet gewählten Konvexbogen mit stetiger Tangente liegt. Dagegen gibt es  $M$  in  $R_2$  ohne unendliche Teilmengen, die auf in  $p_0$  zweimaldifferenzierbaren Bogen liegen. *Otto Haupt.*

**Wagner, Hans:** Über eine unstetige Funktion  $f(x, y)$ . Elemente Math. **10**, 109—111 (1955).

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

**Surányi, J. and P. Turán:** Notes on interpolation. I. (On some interpolational properties of the ultraspherical polynomials.) Acta math. Acad. Sci. Hungar. **6**, 67—79 und russische Zusammenfassg. 80 (1955).

Verff. untersuchen die Existenz und eindeutige Bestimmtheit eines Polynoms  $f(x)$  vom Grade  $\leq 2n-1$ , das an den Stellen  $x_v, v=1, 2, \dots, n$ , die Werte  $f(x_v) = y_v, f''(x_v) = y_v^*$  annimmt. Als Interpolationsstellen  $x_v$  werden entweder die Nullstellen  $\xi_v$  des Polynoms  $\Pi_n(x) = (1-x^2)P'_{n-1}(x)$  benutzt, wo  $P_{n-1}(x)$  das  $(n-1)$ -te Legendresche Polynom ist, oder allgemeiner die Nullstellen  $\eta_v$  des ultrasphärischen  $P_n^{(\lambda)}(x)$  mit  $\lambda \geq -\frac{1}{2}$ . Zunächst zeigen Verff. allgemein, daß bei ungeradem  $n = 2k+1$  es entweder keine oder aber unendlich viele Polynome der gewünschten Art gibt, die sich in der Form  $f(x) = f_0(x) + c \cdot f_1(x)$  mit bestimmten  $f_0(x)$  und  $f_1(x)$  vom Grade  $\leq 2n-1$  darstellen lassen. Dagegen gibt es im Falle  $n = 2k$  stets ein eindeutig bestimmtes  $f(x)$ , das an den Stellen  $\xi_v$  die gegebenen  $y_v$  und  $y_v^*$  annimmt. Auch bei Benutzung der  $\eta_v$  als Interpolationsstellen ist das Problem i. a. eindeutig bestimmt, so daß mit  $y_v = y_v^* = 0$  i. a.  $f(x) = 0$  die einzige Lösung ist. Aber im Sonderfall  $\lambda + \frac{3}{2} = \text{ganze, ungerade Zahl, } n \geq \lambda + \frac{5}{2}$ , d. i. wenn die Stellen  $\eta_v$  die Nullstellen einer ungeraden Ableitung der Legendreschen Polynome sind, gibt es ein eindeutig bestimmtes, nichttriviales  $f_0(x)$  vom Grade  $(n + \lambda + \frac{1}{2})$ , so daß für alle  $f_1(x) = c \cdot f_0(x)$  und nur für diese  $f_1(\eta_v) = f_1'(\eta_v) = 0$  ist. Die ultrasphärischen Polynome haben dann also die Eigenschaft, daß es nichttriviale  $f(x)$  vom Grade  $(n + \lambda + \frac{1}{2})$  gibt, welche die Stellen  $\eta_v, v=1, 2, \dots, n$ , zugleich zu Null- und Inflexionsstellen haben. Der Arbeit, die Herrn G. Szegő zum 60. Geburtstag gewidmet ist, soll eine weitere folgen, in der das Konvergenzverhalten der hier behandelten Interpolationspolynome untersucht wird, wenn sie zu einer in  $[-1, 1]$  stetigen Funktion gehören.

P. Heuser.

**Erdős, P. and P. Turán:** On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 6, 47—65 und russische Zusammenfassg. 65—66 (1955).

Unter den Dreiecksmatrizen  $A$  mit der  $n$ -ten Reihe  $1 \geq x_{1n} > x_{2n} > \dots > x_{nn} \geq -1$  gibt es bekanntlich keine mit der Eigenschaft, daß die Lagrange-schen Interpolationspolynome  $L_n(f, A) = \sum_{v=1}^n f(x_{vn}) l_{vn}(x, A)$  für jedes in  $[-1, 1]$  stetige  $f(x)$  dort gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergieren. Der Grund liegt im Verhalten der Konstanten  $M_n(A) \equiv \max_{-1 \leq x \leq 1} \lambda_n(x, A) = \max_{-1 \leq x \leq 1} \sum_{v=1}^n |l_{vn}(x, A)|$ ; es ist

nämlich für alle  $A$  stets  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(A) = +\infty$  (G. Faber). Andererseits spielen die Funktionen  $\lambda_n(x, A)$  auch bei der Konvergenztheorie der  $L$ -Interpolation eine wesentliche Rolle, denn für  $M_n(A) < c_1 \cdot n^\beta, 0 < \beta < 1$ , und  $f(x) \in \text{Lip } \gamma, \gamma > \beta$ , konvergieren die  $L_n(f, A)$  in  $-1 \leq x \leq 1$  gleichmäßig gegen  $f(x)$ . Verff. zeigen nun, daß eine vollständige Konvergenz-Divergenztheorie der  $L$ -Interpolation auf der Untersuchung der Zahlen  $M_n(A)$  allein nicht aufgebaut werden kann. Ist  $A(\beta)$  die Klasse aller  $A$ -Matrizen, für die mit beliebig kleinem, positivem  $\varepsilon$  gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(A) \cdot n^{-\beta-\varepsilon} < c_2(\varepsilon), \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(A) n^{-\beta+\varepsilon} > c_3(\varepsilon)$ , wachsen also grob gesagt die  $M_n(A)$  wie  $n^\beta$ , so nennen Verff. für ein festes  $\beta$  die Klasse  $\text{Lip } \gamma$  bezüglich der Matrizen  $A(\beta)$  „gut“, wenn für alle  $A \in A(\beta)$  und  $f \in \text{Lip } \gamma$  die  $L_n(f, A)$  in  $[-1, 1]$  gleichmäßig gegen  $f(x)$  gehen, und „schlecht“, wenn es für alle  $A \in A(\beta)$  ein  $f_1 \in \text{Lip } \gamma$  gibt, so daß die  $L_n(f_1, A)$  für  $n \rightarrow \infty$  in  $[-1, 1]$  nicht beschränkt sind. Für ein festes  $\beta, 0 < \beta < 1$ , sind alle  $\text{Lip } \gamma$ -Klassen mit  $\gamma < \beta/(\beta+2)$  schlechte Klassen für die Matrizen  $A(\beta)$ , alle  $\text{Lip } \gamma$ -Klassen mit  $\gamma > \beta$  sind gute Klassen. In beiden Fällen genügt die „grobe“ Theorie, die sich auf die Betrachtung der  $M_n(A)$  stützt. Entscheidend ist nun, daß genau im Falle  $\beta/(\beta+2) < \gamma < \beta$  die  $\text{Lip } \gamma$ -Klasse bezüglich  $A(\beta)$  weder gut noch schlecht ist, so daß eine „feinere“ Theorie benutzt werden muß, die über das Verhalten der  $M_n(A)$  hinaus noch die weiteren

Eigenschaften der Matrix  $A$  berücksichtigt. Die für die Theorie der  $L$ -Interpolation wichtige Arbeit ist Herrn L. Féjér zum 75. Geburtstag gewidmet. *P. Heuser.*

**Maak, Wilhelm:** Eine Verallgemeinerung des Weierstraßschen Approximationssatzes. Arch. der Math. **6**, 188—193 (1955).

Verf. beweist folgenden allgemeinen Approximationssatz, welcher einerseits die Approximationssätze von Weierstraß und Weierstraß-Stone, andererseits die Approximationssätze der Theorie der periodischen und fastperiodischen Funktionen umfaßt. Es sei  $M$  eine Menge von Elementen  $x, y, \dots$ . Wir betrachten komplexwertige Funktionen auf  $M$ . Gegeben seien eine Funktion  $f$ , endlich viele beschränkte Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  und zwei positive Zahlen  $\varepsilon, \delta$  derart, daß aus  $|\varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(y)| < \delta$  für alle  $\nu = 1, \dots, n$  folgt  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Zu jedem positiven  $\eta$  existiert dann ein Polynom  $P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$  mit komplexen Koeffizienten derart, daß für alle  $x$  aus  $M$  gilt  $|f(x) - P(\varphi_1(x), \overline{\varphi_1(x)}, \dots, \varphi_n(x), \overline{\varphi_n(x)})| < \varepsilon + \eta$ . *G. Nöbeling.*

**Remez, E. R.:** Über die graphisch-analytische Lösung einiger Aufgaben der Čebyševschen Approximation. Doklady Akad. Nauk SSSR **101**, 409—412 (1955) [Russisch].

Let  $G$  be a closed bounded 2-dimensional set in the euclidean  $(x, y)$ -plane. The author treats the problem of finding the values of  $(a, b)$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda^*$  respectively such that

$$(i) \quad \max |y - ax - b| = L(a, b), \quad (ii) \quad \max |y - \lambda x| = L_1(\lambda), \\ (iii) \quad \max |1 - \lambda^* x/y| = L_2(\lambda^*), \quad (x, y) \in G$$

is a minimum. In the third case  $G$  must be such that  $0 < \min x/y < \max x/y < \infty$ . The methods are graphical and the proofs make use of the author's monograph (this Zbl. **13**, 255). Substantially (i) is the problem of finding the minimum breadth of the convex cover of  $G$ ; (ii) reduces to (i) on replacing  $G$  by  $G \cup -G$  where  $-G$  is the image of  $G$  in the origin and (iii) reduces to (ii) on considering the set of  $(X, Y)$  where  $Y = 1$  and  $X = x/y$ ,  $(x, y) \in G$ . But, as the author remarks, there is a trivial explicit best value for  $\lambda^*$  in terms of  $\min x/y$ ,  $\max x/y$ . *J. W. S. Cassels.*

**Andreoli, Giulio:** Sistemi ortogonali di Walsh; matrici di Hadamard, trasformazioni di sistemi ortogonali. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. **6**, Nr. 1, 3—17 (1955).

L'A., partendo dalle così dette matrici di Hadamard, cioè de quelle matrici quadrate i cui elementi non superino in modulo un numero positivo  $\alpha$ , e il cui determinante abbia il valore  $\alpha^n n^{n/2}$  e prendendo le mosse da una sua precedente ricerca (questo Zbl. **55**, 294) con un opportuno procedimento iterativo costruisce dei sistemi ortogonali che comprendono quelli di Walsh come caso particolare. *G. Sansone.*

**Alexits, G.:** Über die Konvergenz der Orthogonalpolynomentwicklungen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **6**, 1—4 (1955).

Let  $w(x) \in L$  on  $\langle -1, 1 \rangle$  and  $0 < w(x) = O(1 - x^2)^{-1/2}$ ; and let  $\{p_n(x)\}$  be the sequence of orthonormal polynomials with respect to the weight  $w$ . The following theorem is proved: Suppose that  $f \in L^2$  (with respect to  $w$ ), and that

$$\omega(\delta, f; a, b) = \sup_{\substack{|h| \leq \delta \\ a \leq x \leq b}} |f(x+h) - f(x)| = O \lambda^{-1/2}(1/\delta),$$

where  $\langle a, b \rangle$  is some closed sub-interval of  $\langle -1, 1 \rangle$ ,  $\lambda(t) \uparrow$ , and  $\int_1^\infty \frac{dt}{t \lambda(t)} < \infty$ .

Then the Fourier series of  $f$  (with respect to the  $p_n$ ) converges almost everywhere in  $\langle a, b \rangle$ . The condition on  $w$  is satisfied for all  $\langle a, b \rangle$  in the classical cases (cf. Alexits, this Zbl. **51**, 302).

*W. W. Rogosinski.*

**Freud, G.:** Über das gliedweise Differenzieren einer orthogonalen Polynomreihe. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **6**, 221—226 und russische Zusammenfassg. 226 (1955).



Es sei  $\{p_n(x)\}$  die Folge der normierten Orthogonalpolynome in  $(-1, 1)$  mit der nichtnegativen Gewichtsfunktion  $w(x) \in L$ . Verf. behandelt die Frage der absoluten Konvergenz der aus einer Reihe  $f(x) \sim \sum c_\nu p_\nu(x)$  durch ein- oder mehrmalige Differentiation hervorgehenden Reihe  $\sum c_\nu p_\nu^{(k)}(x)$ , die i. a. nicht wieder eine Orthogonalreihe ist. Trotzdem lassen sich im wesentlichen die gleichen Methoden verwenden, die Verf. schon früher (dies. Zbl. 52, 60) zur Untersuchung der absoluten Konvergenz von orthogonalen Polynomreihen verwandt hat. Es ergibt sich: 1. Ist die Gewichtsfunktion  $w(x)$  für  $x \in (a, b) \subset [-1, 1]$  stets  $\geq m > 0$ , ist  $f(x)$  in  $[-1, 1]$   $k$ -mal stetig differenzierbar, gilt ferner für den Stetigkeitsmodul  $\omega(\delta, f^{(k)})$

von  $f^{(k)}$  die Beziehung (A):  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(1/n, f^{(k)})}{\sqrt{n}} < \infty$ , so ist  $\sum c_\nu p_\nu^{(k)}(x)$  gleichmäßig in jedem inneren Teilintervall von  $(a, b)$  absolut konvergent und stellt dort  $f^{(k)}(x)$  dar. 2. Ist  $w(x) \leq W(1-x^2)^{-1/2}$ , setzt man  $f(\cos \vartheta) = g(\vartheta)$ , gilt für den Stetigkeitsmodul  $\left\{ \max_{|h| \leq \delta} \int_0^\pi [g^{(k)}(\vartheta + h) - g^{(k)}(\vartheta)]^2 d\vartheta \right\}^{1/2}$  von  $\frac{dg^{(k)}}{d\vartheta^k}$  bezüglich der Metrik  $L^2$  die Beziehung (A), so ist  $\sum c_\nu p_\nu^{(k)}(x)$  gleichmäßig in jedem inneren Teilintervall von  $(a, b)$  absolut konvergent zur Summe  $f^{(k)}(x)$ . Wie Verf. bemerkt, ist (A) für  $f^{(k)} \in \text{Lip } \alpha$ , mit  $\alpha > \frac{1}{2}$  bestimmt erfüllt. P. Heuser.

**Timan, A. F.:** Über lineare Prozesse der Approximation durch algebraische Polynome, über Lebesguesche Funktionen und einige Anwendungen auf Fourierreihen. Doklady Akad. Nauk SSSR 101, 221–224 (1955) [Russisch].

Es sei  $l = (l_k^{(n)})$  ( $n = 0, 1, \dots$ ;  $k = 0, 1, \dots, n+1$ ;  $l_0^{(n)} = 1$ ,  $l_{n+1}^{(n)} = 0$ ) eine Dreiecksmatrix von Zahlen. Jeder Funktion  $f(x)$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) mit der Entwicklung nach Tschebyscheffschen Polynomen  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x)$  seien die Polynome

$$U_n(f; x; l) = \sum_{k=0}^n l_k^{(n)} c_k T_k(x) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

zugeordnet. Das Problem ist zu untersuchen, ob  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f; x; l) = f(x)$  für jede stetige Funktion  $f(x)$  gilt. Zu diesem Zweck werden die Lebesgueschen Funktionen  $M_n(x) = \sup |U_n(f; x; l)|$  betrachtet, wobei „sup“ für alle meßbaren  $f$  mit  $|f| \leq 1$  zu nehmen ist. Satz 1: Sind die Reihen von  $l$  von gleichmäßig beschränkter Schwankung, d. h.  $\sum_{k=0}^n |\Delta l_k^{(n)}| = O(1)$ , so gilt

$$(*) \quad M_n(x) \geq 4\pi^{-2} |L_n(1) - [1 - T_n(|x|)] L_n(|x|)| + O(1)$$

mit  $L_n(x) = \sum_{k=1}^n k^{-1} l_{n-k}^{(n)} T_k(x)$ , wobei das Glied  $O(1)$  gleichmäßig in  $x$  und  $n$  beschränkt ist. Satz 2. Sind die  $l_k^{(n)}$  beschränkt und ist jede Reihe von  $l$  entweder konvex oder konkav, so gilt (\*) sogar mit dem Gleichheitszeichen. — Mit Hilfe dieses Satzes wird ein Satz von S. M. Nikol'skij (dies. Zbl. 30, 28) über die Konvergenz der trigonometrischen Polynome

$$\tilde{U}_n(f; x; l) = a_0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

gegen die stetige Funktion  $f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  verallgemeinert, und zwar auf den Fall  $\lambda_k^{(n)} = l_k^{(n)} \cos k\alpha_n$  mit  $l_k^{(n)}$  von der in Satz 2 betrachteten Art und mit  $|\alpha_n| \leq \pi/2$ . (Der Satz von Nikol'skij entspricht dem Fall  $\alpha_n \equiv 0$ .) B. Sz. Nagy.

**Džvaršejšvili, A. G.:** Die Ungleichung von S. N. Bernštejn im Raume ( $D^*$ ) der integrierbaren Funktionen und ihre Anwendungen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskij SSR 16, 257–262 (1955) [Russisch].

Es sei  $D_{2\pi}$  der Raum von Funktionen, die nach  $2\pi$  periodisch und im Denjoy-Perronschen Sinne integrierbar sind, und  $\varphi \in V_1$  bedeute, daß die Funktion  $\varphi$  nach  $2\pi$  periodisch und von endlicher Variation ist, ferner  $|\varphi(x)| \leq 1$ ,  $V_0^{2\pi}[\varphi] \leq 1$ .

Im Raume  $D_{2\pi}$  wird die Norm  $\|f(x)\| = \sup_{\varphi \in V_1} \left| \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) dx \right|$  eingeführt. Verf. beweist, daß die Ungleichung von Bernštejn, der Approximationssatz von Jackson und ihre Bernštejnsche Umkehrung, endlich der Approximationssatz von Zygm und auch im metrischen Raum  $D_{2\pi}$  gültig bleiben.

**Stečkin, S. B.: Einige Bemerkungen über trigonometrische Polynome.** Uspechi mat. Nauk **10**, Nr. 1 (63), 159–166 (1955) [Russisch].

Verf. zeigt für die Koeffizienten eines Cosinuspolynoms  $K_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx$  als Verschärfung zweier Sätze von S. Sidon (dies. Zbl. **19**, 162),

daß die folgenden Abschätzungen gelten: 1.  $\left| \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+1} \right| < \text{Si } \pi \int_0^{2\pi} |K_n(x)| dx$ ,

wo  $\text{Si } \pi = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$  bedeutet; 2.  $\sum_{k=0}^n \frac{|a_k|}{n-k+1/2} < 2 \int_0^{\pi} |K_n(x)| dx$ ; 3. sind

die  $a_k$  positiv, so kann man in 2. die Konstante 2 durch  $\pi/2$  ersetzen und diese ist die bestmögliche.

**Salem, R.: On a problem of Littlewood.** Amer. J. Math. **77**, 535–540 (1955).

Littlewood warf die Frage auf, ob es einen solchen allgemein gültigen Festwert  $A$  gibt, daß  $\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^n \exp m_k i x \right| dx > A \log n$  ist, wenn nur die  $m_k$  paar-

weise verschiedene Zahlen sind. Verf. beantwortet sie zwar nicht abschließend, erzielt aber in ihrer Richtung folgendes Ergebnis: Es sei  $m_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  eine wachsende Folge natürlicher Zahlen der Art, daß  $\log m_n = O(\log n)$ . Wenn dann

$n \rightarrow \infty$ , so gilt  $\limsup \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^n \cos m_k x \right| dx / (\log n)^{1/2} > 0$ . Verf. gründet den

recht mittelbaren Beweis dieser Aussage auf drei Hilfssätze, deren erster die Unmöglichkeit einer Verschärfung des Satzes von Menchoff ausspricht. Ohne Wiedergabe der beiden andern sei der Vermerk des Verf. erwähnt, daß der dritte auch sonst nützlich sein kann; hier bedient sich Verf. seiner zum Beweise der Verallgemeinerung eines von ihm früher (dies. Zbl. **25**, 316) gefundenen Satzes: Es sei  $\theta_k(t)$  in  $(0, 1)$  eine Gesamtheit orthonormer, gleichmäßig beschränkter Funktionen, und

$\sum_{k=1}^m c_k \theta_k = s_m$ . Wenn dann  $|c_{m_j}| \log j \rightarrow \infty$ , so kann  $\sup_j |s_{m_j}(t)|$  nicht zu  $L$  gehören.

*L. Koschmieder.*

**Raisbeck, Gordon: The order of magnitude of the Fourier coefficients in functions having isolated singularities.** Amer. math. Monthly **62**, 149–154 (1955).

Wenn  $f(x)$  für  $x \rightarrow +0$  sich „wie eine Potenz  $x^\alpha$  ( $0 > \alpha > -2$ ) verhält“, sonst „hinlänglich glatt“ ist, darf man für die Koeffizienten  $b_n$  der zugehörigen Fourier-Sinus-Reihe die Größenordnung  $n^{-1-\alpha}$  erwarten. Diese Plausibilitätsbetrachtung wird zu folgendem Satz präzisiert:  $f(x)$  sei in  $(0, \pi)$  nicht konstant,  $> 0$ , nicht zunehmend und konvex, und  $x f(x)$  sei dort integrierbar. Dann gilt mit einer passenden Konstanten  $c$  die Abschätzung

$$c \int_0^{\pi/2n} x f(x) dx < \frac{b_n}{n} < \int_0^{\pi/n} x f(x) dx.$$

Es wird darauf hingewiesen, daß ohne weitere Voraussetzungen die Doppelungleichung nicht etwa in eine asymptotische Gleichheit verwandelt werden kann; auf Formulierung derartiger Sätze, wie sie bei spezielleren Annahmen über die Approxi-

mation von  $f(x)$  durch  $x^*$  in der Nähe von 0 gelten, wird bewußt verzichtet. Zum Schluß als Beispiel die Zykloide  $x = \theta - \sin \theta$ ,  $f(x) = 1 - \cos \theta$ ; die Kosinuskoeffizienten  $a_n$  werden asymptotisch proportional  $n^{-5/3}$ . Hermann Schmidt (Würzburg).

Alexits, G.: Sur la caractérisation de certaines classes de fonctions au sens de la théorie constructive des fonctions. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 6, 41—45 und russische Zusammenfass. 45—46 (1955).

Soit  $\sigma_n^\alpha(x)$  la  $n$ -ième moyenne  $(C, \alpha)$  de la série de Fourier d'une fonction intégrable  $f(x)$ , et soient  $\tilde{f}(x)$  et  $\tilde{\sigma}_n^\alpha(x)$  les fonctions conjuguées. Th. 1.: Pour qu'on ait  $f(x) \in \text{Lip}(1, p)$  où  $p \geq 1$ , il faut qu'il existe, pour tout  $\alpha > 0$ , une fonction  $F_\alpha(x) \in L^p$  telle que

$$|f(x) - \sigma_n^\alpha(x)| \leq F_\alpha(x)/n, \quad |\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n^\alpha(x)| \leq F_\alpha(x)/n,$$

et il suffit qu'une au moins de ces inégalités soit satisfaite pour un  $\alpha > 0$  arbitrairement fixé. Dans la démonstration on fait usage, entre autres, du lemme suivant (cf. G. Alexits, ce Zbl. 26, 310, 47, 69): Si, pour un  $\alpha > 0$ , on a en un point  $x$   $|\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n^\alpha(x)| \leq K/n$ , alors  $|\sigma_n^{\alpha'}(x)| \leq C_\alpha K$ , et, inversement, si  $|\sigma_n^{\alpha'}(x)| \leq K$ , alors  $|\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n^\alpha(x)| \leq D_\alpha K/n$ , avec des constantes  $C_\alpha, D_\alpha$  ne dépendant que de  $\alpha$ . — La condition  $f(x) \in \text{Lip}(1, p)$  veut dire essentiellement que  $f'(x) \in L^p(0, 2\pi)$ . Les théorèmes suivants concernent des cas où on ne suppose pas que  $f'(x)$  soit intégrable dans  $(0, 2\pi)$ . Th. 2.: Si  $f'(x)$  existe en un point  $x_0$ , on a pour tout  $\alpha > 1$ :  $\tilde{f}(x_0) - \tilde{\sigma}_n^\alpha(x_0) = O(1/n)$ . Th. 3.: Si  $f(x) \in \text{Lip}(1, p)$  dans  $a < x < b$  ( $p > 1$ ), on a pour tout  $\varepsilon > 0$  une fonction  $F_\varepsilon(x) \in L^p$  telle que  $|\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n^\alpha(x)| \leq F_\varepsilon(x)/n$  pour  $a + \varepsilon < x < b - \varepsilon$ . B. Sz.-Nagy.

Matsuyama, Noboru and Shigeru Takahashi: On the convergence of some gap series. Proc. Japan Acad. 31, 111—115 (1955).

Bezeichne  $f(x)$  eine integrierbare Funktion mit der Periode 1, deren Integral in  $(0, 1)$  verschwindet und die das Quadratintegral 1 hat (Normierung). Es handelt sich um Reihen der Form (1)  $\sum a_k f(kx)$ . Setzt man  $\omega(n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ , wo  $\alpha_k, \beta_k$  die Fourierkoeffizienten von  $f(x)$  bedeuten, so folgt die Konvergenz fast überall der Reihe (1) unter folgenden Bedingungen: 1°  $(C, 1)$ -Summierbarkeit fast überall, 2°  $\omega(n) = O(\log^\alpha n)$  mit  $\alpha > 1$ , 3°  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k^2 < \infty$ , wo  $\lambda(n)$  die Anzahl der Indizes zwischen  $2^n$  und  $2^{n+1}$  bedeutet, für welche  $a_k \neq 0$  ist. Die Bedingung 1° kann man fallen lassen, dann wird aber  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \log n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k^2 < \infty$  statt 3° gefordert. G. Alexits.

Satô, Masako: Uniform convergence of Fourier series. IV. Proc. Japan Acad. 31, 261—263 (1955).

Während der Autor in zwei früheren Arbeiten (Teil I und II, s. dies. Zbl. 56, 287) die Differenzen zwischen einer Funktion  $f(x)$  und den Teilsommen bzw.  $(C, -\alpha)$ -Mitteln ihrer Fourierreihe für den Fall abgeschätzt hat, daß  $f(x)$  zur Klasse  $\Phi(n)$  gehört und den Stetigkeitsmodul  $\omega(\delta)$  hat, gibt er hier Formeln, in denen  $\Phi(n)$  nicht mehr vorkommt, aber außer dem Stetigkeitsmodul noch der Integralstetigkeitsmodul auftritt, und leitet daraus eine ganze Reihe spezieller Kriterien für gleichmäßige Konvergenz bzw.  $(C, -\alpha)$ -Summierbarkeit her.

G. Lochs.

Chow, Hung Ching: Some new criteria for the absolute summability of a Fourier series and its conjugate series. J. London math. Soc. 30, 439—448 (1955).

Sei  $f(x) \in L_p(-\pi, +\pi)$ ,  $1 \leq p \leq 2$ , (1) die Fourierreihe von  $f(x)$ , (2) die konjugierte Fourierreihe, und  $W_p(t) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}$



gesetzt. Theorem 1. Ist  $W_p(t) = O\{(\log 1/|t|)^{-1-\delta}\}$  ( $\delta > 0$ ), oder allgemeiner  $\int_{-\pi}^{+\pi} W_p(t) \cdot |t|^{-1} dt < \infty$ , so sind (1) und (2) fast überall in  $(-\pi, +\pi)$   $|C, \alpha|$ -summierbar ( $\alpha > 1/p$ ). Theorem 2. Ist  $W_p(t) = O\{(\log 1/|t|)^{-1-\delta-1/p}\}$  ( $\delta > 0$ ), so sind (1) und (2) fast überall in  $(-\pi, +\pi)$   $|C, 1/p|$ -summierbar. Verwandte Untersuchungen [mit lokalen Voraussetzungen für  $f(x)$ ] finden sich bei Tsuchikura (dies. Zbl. 51. 302; Tohoku math. J., II. Ser. 5, 302—312 (1954). D. Gaier.

Žak, I. E.: Verallgemeinerung eines Satzes von V. G. Čelidze. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 16, 89—94 (1955) [Russisch].

Bezeichne  $f(x, y)$  eine in  $x, y$  nach  $2\pi$  periodische Funktion und

$$\chi_3^{(2)}(\delta_1, \delta_2; f) = \sup_{\substack{|h| \leq \delta_1 \\ |\eta| \leq \delta_2}} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x+h, y+\eta) - f(x+h, y) - f(x, y+\eta) + f(x, y)]^2 dx dy \right\}^{1/2}$$

den quadratischen Stetigkeitsmodul von  $f(x, y)$ . Verf. beweist: Konvergieren die Reihen  $\Sigma \chi_3^{(2)}(1/m, 1/n; f)/m, \Sigma \chi_3^{(2)}(1/m, 1/n; f)/m, \Sigma \chi_3^{(2)}(1/m, 1/n; f)/n$ , so ist die Fouriersche Doppelreihe der Funktion  $f(x, y)$  absolut konvergent.

G. Alexits.

Žak, I. E.: Über einige Anwendungen der Sätze von S. N. Bernstejn und I. I. Privalov. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 16, 185—190 (1955) [Russisch].

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_{kl} (a_{kl} \cos kx \cos ly + b_{kl} \sin kx \cos ly + c_{kl} \cos kx \sin ly + p_{kl} \sin kx \sin ly)$  die Fouriersche Doppelreihe einer stetigen Funktion  $f(x, y)$ . Zu dieser Reihe kann man — auf ähnliche Weise, wie bei einfachen Fourierreihen — drei konjugierte Reihen bilden. Verf. beweist: Sind alle vier Reihen Fouriersche Doppelreihen von stetigen Funktionen und konvergieren drei von ihnen gleichmäßig, so auch die vierte. Sind die Funktionen nur  $L^2$ -integrierbar, so folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz dreier Reihen nur die Konvergenz fast überall der vierten. Der Beweis ist eine Übertragung auf Doppelreihen der Fejérschen Gedanken bezüglich einfacher konjugierter Reihen [J. reine angew. Math. 144, 49—56 (1913)]. Am Ende wird auch ein bekannter Bernsteinscher Satz aus der konstruktiven Funktionentheorie auf Doppelreihen übertragen.

G. Alexits.

Shapiro, Victor L.: Localization of conjugate multiple trigonometric series. Ann. of Math., II. Ser. 61, 368—380 (1955).

Travail à rapprocher de l'Article de A. P. Calderon et A. Zygmund (ce Zbl. 64. 104) au compte-rendu duquel nous renvoyons pour les définitions et notations. Soient dans  $R^n$  deux séries  $T = \sum_m a_m e^{i(m, x)}$  et  $T' = \sum_m b_m e^{i(m, x)}$  dont les

coefficients sont  $o(|m|^\gamma)$ ,  $\gamma$  entier  $\geq -(n-1)$ .  $\bar{T}$  et  $\bar{T}'$  en sont les séries conjuguées relativement au noyau  $K(x) = \Omega(x')/|x|^n$  où  $\Omega(x')$  est une fonction harmonique sur  $S^{n-1}$ . Les fonctions  $F$  et  $F'$  sont associées à  $T$  et  $T'$  par

$$F(x) = a_0 |x|^{2\omega} / K_\omega + \sum_{m \neq 0} (-1)^\omega (a_m / |m|^{2\omega}) e^{i(m, x)}$$

où  $\omega$  est la partie entière de  $\frac{1}{2}(n + \gamma) + 1$  et  $K_\omega = \Delta_\omega |x|^{2\omega}$ . Alors si  $F - F'$  est de classe  $C^{2\omega+n+2}$  sur un domaine  $D$  contenu dans le cube unité, les moyennes d'ordre  $\gamma + n - 1$  de  $\bar{T} - \bar{T}'$  convergent uniformément vers une limite finie dans tout domaine fermé inclus en  $D$ ; [la moyenne d'ordre  $\gamma$  de rang  $R$  de la série  $u_m$  est

$$\text{donnée par } \frac{2^\gamma}{R^{2\gamma}} \int_0^R \left[ \sum_{|m| \leq r} u_m \right] (R^2 - r^2) r dr].$$

A. Revuz.

Berkovitz, Leonard D. and Richard P. Gosselin: Restricted summation and localization of double trigonometric series. Duke math. J. 22, 243—251 (1955).

In extending to double trigonometric series the classical theory of localization for simple trigonometric series (Rieman, Rajchman, Zygmund) the question

arises as to what type of summability has to be used. Z. Lepecki [Fac. Filos. Ci. Let. do Paraná. Anuário 1940—1941, 159—187 (1942)] and R. P. Gosselin (this Zbl. 52, 294) used the Pringsheim method (rectangles) and the results involve cross-shaped neighborhoods. L. D. Berkovitz (this Zbl. 44, 290) used Bochner's circular summation and V. Shapiro's (this Zbl. 53, 42) square summation, and both results involve ordinary neighborhoods. In the present paper the authors present a localization theory where restricted double index summation method is used involving ordinary neighborhoods. By restricted convergence of a double sequence  $S_{mn}$  is meant the  $\lim S_{mn}$  as  $m, n \rightarrow \infty$  with  $1/L \leq m/n \leq L$ , and any  $L > 1$ . As for summability the restricted Riesz summability  $(R, \alpha, \beta)$  is used with kernel  $(1 - u^2)^\alpha (1 - v^2)^\beta$ . The localization theorem has the usual form and states that the difference

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m,n=-M,-N}^{M,N} a_{mn} \exp i(m x + n y) \\
 (*) \quad & - (-1)^{K+L} \pi^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(u, v) \lambda(u, v) D_M^{(K)}(x - u) D_N^{(L)}(y - v) du dv
 \end{aligned}$$

is restrictedly summable  $(R, \beta, \beta)$  to zero uniformly in  $X' \times Y'$ . Here  $\beta > 0$  is any real number;  $\beta'$  the smallest integer  $\geq \beta$ ;  $L, K$  any two integers  $\geq 0$ ;  $\Psi(x)$  [ $\Phi(y)$ ] any function equal to 1 in a closed interval  $X'$  [ $Y'$ ], equal to zero outside a given interval  $X \supset X'$  [ $Y \supset Y'$ ], having  $K + 3\beta' + 3[L + 3\beta' + 3]$  continuous derivatives and otherwise defined by the periodicity of period  $2\pi$ ;  $\lambda(x, y) = \Psi(x)\Phi(y)$ ;  $F(x, y)$  a Riemann function conveniently associated with the trigonometric series  $\sum a_{mn} \exp i(m x + n y)$ ; and  $D_M^{(K)}$  the  $K$ -th derivative of the Dirichlet kernel of order  $M$ .  
*L. Cesari.*

### Spezielle Funktionen:

Maximon, L. C. and G. W. Morgan: On the evaluation of indefinite integrals involving the special functions. Development of method. Quart. appl. Math. 13, 79—83 (1955).

Um unbestimmte Integrale über spezielle Funktionen auszuwerten, schlagen die beiden Verff. die folgende Verfahrensweise vor: Am Ausgang der Betrachtungen steht eine lineare partielle homogene Differentialgleichung mit einer Raumvariablen und einer Zeitvariablen von der Form  $\xi y / \xi t = \partial[a(x) \partial y / \partial x] / \partial x$ . Die Bildung der Laplace-Transformierten  $Y(x, s)$  führt für  $Y(x, s)$  auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit dem inhomogenen Glied  $y(x, 0)$ . Ihre Lösung nach der Methode der Variation der Konstanten liefert einen Ausdruck mit zwei unbestimmten Integralen. Sie enthalten unter dem Integralzeichen die Wronskische Determinante, das Glied  $y(x, 0)$  und die beiden voneinander linear unabhängigen Lösungen  $Y_1$  und  $Y_2$  der oben erwähnten gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Gelingt es nun, die Funktion  $Y(x, s)$  auch noch auf anderem Wege unmittelbar zu bestimmen, so lassen sich die beiden unbestimmten Integrale durch die Auflösung zweier linearer Gleichungen berechnen. Ein solcher Fall liegt z. B. vor, wenn die Rand- und Anfangsbedingungen von der Art sind, daß die Lösung  $y(x, t)$  der partiellen Differentialgleichung tatsächlich zeitunabhängig ist. Im weiteren Text wird, um einen noch größeren Wirkungsradius zu erzielen, von einer noch allgemeineren partiellen Differentialgleichung ausgegangen. Eine erste Anwendung findet diese Betrachtungsweise im Falle der Whittakerschen Differentialgleichung.  
*H. Buchholz.*

Maximon, L. C.: On the evaluation of indefinite integrals involving the special functions. Application of method. Quart. appl. Math. 13, 84—93 (1955).

In dieser Arbeit wird das im Voranstehenden entwickelte Verfahren für die Berechnung unbestimmter Integrale an einzelnen Beispielen eingehend erläutert.

An speziellen Funktionen werden dabei herangezogen: Die assoziierte Legendre-Funktion, die konfluente hypergeometrische Funktion und die Besselsche Funktion. Im letzten Abschnitt wird das Verfahren auf die Lösung von Gleichungen beliebiger Ordnung ausgedehnt.

H. Buchholz.

**Hallén, Erik:** Further investigations into iterated sine- and cosine-integrals and their amplitude functions with reference to antenna theory. Tekn. Högskol. Handl. Nr. 89, 44 p. (1955).

Die Funktionen  $L(x) = \int_0^x t^{-1} (1 - e^{-it}) dt$ ,  $L^{01}(x) = \int_0^x t^{-1} L(t) dt$ ,  $L^{11}(x) = \int_0^x t^{-1} e^{it} L(t) dt$ ,  $L^{001}(x) = \int_0^x t^{-1} L^{01}(t) dt$ ,  $L^{011}(x) = \int_0^x t^{-1} L^{11}(t) dt$ ,  $L^{101}(x) = \int_0^x t^{-1} e^{it} L^{01}(t) dt$  und  $L^{111}(x) = \int_0^x t^{-1} e^{-it} L^{11}(t) dt$ , die in der Antennentheorie von Interesse sind, werden für reelle Werte des Argumentes untersucht. Es läßt sich jeweils eine Aufspaltung in Funktionen angeben, die physikalisch den stehenden bzw. fortschreitenden Anteilen der in der Antenne auftretenden Wellen entsprechen. Hierbei ergeben sich Zusammenhänge mit Besselschen Funktionen, dem Integralcosinus und -sinus und verwandten Funktionen. Verschiedene für die Vertafelung der betrachteten Funktionen wesentliche Reihenentwicklungen, Funktionalbeziehungen und Integraldarstellungen werden angegeben. Die Tafeln enthalten Funktionswerte (4–5 Dezimalen, entsprechend 1–4 geltenden Ziffern) der obigen Integrale bzw. der in den genannten Aufspaltungen auftretenden Funktionen.

E. Kreyszig.

**Gatteschi, Luigi:** Sugli zeri della derivata delle funzioni di Bessel di prima specie. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 43–47 (1955).

Ausgehend von der Hankelschen asymptotischen Entwicklung der Besselfunktion  $J_n(x)$  und der Rekursion  $2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$  wird gezeigt, daß die  $r$ -te positive Wurzel  $j'_{n,r}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) von  $J'_n(x)$  für  $0 \leq n \leq 1$  sich in der Form darstellen läßt:  $j'_{n,r} = x_{n,r} - (4n^2 + 3)/8 x_{n,r} + \varepsilon(n, r)$ ,  $x_{n,r} = (2r + n + \frac{1}{2})\pi/2$ ,  $|\varepsilon_{n,r}| < 2,85/(2r + n)^3$ .

O. Volk.

**Schottlaender, Stefan:** Über die Transformation einer Reihe nach Besselschen Funktionen. Arch. der Math. 6, 275–280 (1955).

$v$  sei ganz rational,  $\delta, y, a$  komplex ( $a \neq 0$ ). Ist dann  $\operatorname{Im} \delta \geq |\operatorname{Im} a|$  und  $0 < y/a < 1$ , so gilt

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\delta} J_v(y + na) = \frac{1}{a} (-1)^{1+(v-|v|)/2} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \frac{(\zeta_{\kappa} - \sqrt{1 + \zeta_{\kappa}^2})^{|v|}}{\sqrt{1 + \zeta_{\kappa}^2}} e^{-y\zeta_{\kappa}}$$

mit  $\zeta_{\kappa} = i(\delta + 2\kappa\pi)/a$  und  $|\arg \sqrt{1 + \zeta_{\kappa}^2} - \arg \zeta_{\kappa}| < \pi/2$ . Bei  $v = 0$  und  $y = 0$  oder  $y = a$  gilt (1) bis auf einen rechts zuzuzählenden Festwert  $-\frac{1}{2}$ . Der Fall, daß  $y/a$  beliebig reell, läßt sich (bis auf eine endliche Reihe nach Besselschen Funktionen) auf den obigen zurückführen. — Zum Beweise von (1) ersetzt Verf.  $J_v(z)$

links durch das Integral  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \cos t} e^{iv(t-\pi/2)} dt$  und summiert die so entstehende Reihe durch ein Integral, das er mit Hilfe des Residuensatzes auswertet.

L. Koschmieder.

**Palamà, Giuseppe:** Limitazioni di taluni polinomi e in particolare di quelli di Laguerre. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 47–51 (1955).

Für die Polynome  $B_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i x^i$ ,  $c_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) Funktionen von  $n$  und der Parameter  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , wird die Kettenbruchentwicklung

$$B_n^{(\alpha)}(x) = c_0 + \frac{-c_1 x}{b_1} \frac{1}{1 + \frac{b_1}{1 + \frac{b_1}{\dots + \frac{b_{n-1}}{1 + \frac{b_{n-1}}{x}}}}} \\ b_i = c_{i+1} x / c_i, \quad c_i \neq 0, \quad x \neq 0,$$



angewendet und daraus für  $0 < b_1 < 1$ ,  $b_2, b_3, \dots, b_{n-1}$  positiv und abnehmend und beliebig große  $n$  die Ungleichung abgeleitet:

$$A_i \leq A_n^{(\alpha)}(x) \leq A_{i+1} \quad (\leq \text{ je nachdem } i \text{ gerade oder ungerade ist}) \\ \text{für } i < n-1, \text{ wo } A_n^{(\alpha)}(x) = (c_0 - B_n^{(\alpha)}(x))/c_1 x,$$

$A_0 = 1$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 1 - b_1$ ,  $\dots$ ,  $A_i = 1 - b_1 + b_1 b_2 - \dots + (-1)^{i+1} b_1 b_2 \dots b_{i-1}$ . Für  $b_i > 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, r-2$ ,  $0 < b_{r-1} < 1$ ,  $b_r, \dots, b_{n-1}$  positiv und abnehmend, gilt,  $B_{n,r}^{(\alpha)} = \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i x^i$  gesetzt:  $B_{n,r+1}^{(\alpha)}(x) \leq B_n^{(\alpha)}(x) \leq B_{n,r}^{(\alpha)}(x)$  ( $\leq$  je nachdem  $i$  gerade oder ungerade ist). Anwendung auf die Laguerreschen Polynome mit

$$B_n^{(\alpha)}(x) = n! \quad L_n^{(\alpha)}(x) = (x-1)_n - \binom{n}{1} (x-2)_{n-1} x + \dots + (-1)^n x^n,$$

$$B_{n,i}^{(\alpha)}(x) = n! \quad L_{n,i}^{(\alpha)}(x) = (x+1)_n - \binom{n}{1} (x+2)_{n-1} x + \dots + (-1)^i (x+i+1)_{n-i} x^i.$$

O. Volk.

**Singh, Vikramaditya:** Appell polynomials of large order. J. London math. Soc. **30**, 475—479 (1955).

Die Appellschen Polynome  $P_n(x)$  sind durch  $A(t) e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$  definiert.

Die erzeugende Funktion  $A(t)$  ist in der Umgebung des Nullpunktes regulär. Sheffer [Bull. Amer. math. Soc. **51**, 739—744 (1945)] hat gezeigt, daß

$$(1) \quad P_n(x) = \int_a^b \frac{(x+t)^n}{n!} d\beta(t) \quad \text{mit} \quad (2) \quad A(t) = \int_a^b e^{ut} d\beta(u)$$

gilt, falls die Konstanten  $\mu_n = \int_a^b t^n d\beta(t)$  mit  $\mu_0 \neq 0$  existieren. Durch Benutzung einer von Tricomi und Erdélyi (dies. Zbl. **43**, 291) angegebenen Methode wird durch Entwicklung des Integranden von (1) und Vertauschung der Grenzübergänge eine asymptotische Entwicklung für  $P_n(n, x)$  hergeleitet. Als Spezialfälle ergeben sich die Hermiteschen, die Eulerschen und die Bernoullischen Polynome. Aus der asymptotischen Darstellung folgt schließlich der Satz: Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\mu_n|} = 1/\varrho$ , so konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(x)$  in  $|x| < \frac{\varrho}{e}$  und stellt eine stetige Funktion dar.

W. Haacke.

**Saran, Shanti:** Transformations of certain hypergeometric functions of three variables. Acta math. **93**, 293—312 (1955).

Um Transformationsformeln für hypergeometrische Funktionen mit drei Variablen zu erhalten, verwendet der Verf. die Methode, die Integrale, die solche Funktionen darstellen, in geeigneter Weise umzugestalten. Von den zehn Funktionen, die der Verf. anführt, sind sechs davon solchen Transformationen zugänglich. Die in diesen Fällen herangezogenen Integrale sind teils dreifache Umlaufintegrale, teils zwei- oder dreifache Linienintegrale mit den Grenzen 0 ... 1. Die hergeleiteten Transformationsgleichungen sind z. B. in einem Falle von der Art, daß eine Funktion mit zwei Tripeln von Zähler- und einem Tripel von Nennerdeterminanten in eine einfache, unendliche Reihe übergeführt wird, deren Glieder das Produkt zweier Gaußscher hypergeometrischer Funktionen enthalten. In anderen Fällen besteht die Transformation, ohne die Ausgangsfunktion in eine andere überzuführen, etwa in dem Übergang von den drei Variablen  $x, y, z$  zu den Variablen  $-x/(1-x)$ ,  $y, z/(1-x)$ . Zum Schluß werden noch die Konvergenzbedingungen für die Reihen aufgestellt.

H. Buchholz.

**Slater, L. J.:** Integrals for asymptotic expansions of hypergeometric functions. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 226—231 (1955).

Für die sogenannten basischen hypergeometrischen Funktionen werden Integral-

darstellungen angegeben, die besonders dazu geeignet sind, des weiteren zu asymptotischen Darstellungen für die basischen Funktionen zu führen. Eine Beschränkung in der Zahl der Zähler- und Nennerparameter braucht nicht eingeführt zu werden. Das Hauptwerkzeug für die Herstellung der Entwicklungen ist die komplexe Integration. Über die analogen Verhältnisse bei den verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen wird eingangs zum Zweck des Vergleichs kurz berichtet.

H. Buchholz.

**Tricomi, Francesco G.: Konfluente hypergeometrische Funktionen.** Z. angew. Math. Phys. 6, 257—274 (1955).

In diesem zusammenfassenden Bericht bespricht der Verf. in Kürze die wichtigsten Eigenschaften der unter dem Namen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen benannten speziellen Funktionen der Analysis. Die beiden Grundlösungen der diese Funktionen definierenden Whittakerschen Differentialgleichung, die mit den Funktionszeichen  $\Phi$  und  $\Psi$  belegt werden, entsprechen der Kummerschen Funktion mit dem bekannten Symbol  ${}_1F_1(a, b; z)$  und nach Hereinnahme der Faktors  $\exp(-x/2) \cdot x^{\mu+1/2}$  der nach Whittaker benannten Funktion  $W_{\kappa, \mu}(z)$ . Es werden einige grundlegende Eigenschaften der beiden Funktionen besprochen, die verschiedenen Formen des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung der konfluenten Funktionen angegeben und auch das asymptotische Verhalten der Funktionen beschrieben. Zum Schluß werden noch einige Angaben über die Nullstellen der beiden konfluenten Funktionen gemacht und ihre speziellen Fälle nebst den Entartungen in Polynome angegeben.

H. Buchholz.

### Funktionentheorie:

● **Markuschewitz, A. I.: Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen.** (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 16.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1955, 138 S. Ln. DM 8,70.

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in dies. Zbl. 45, 346.

● **Markuševič, A. I.: Theorie der analytischen Funktionen.** Moskau-Leningrad: Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1950. 703 S. 29 Rubel [Russisch].

Durch seine Anlage und seinen Umfang in sachlicher Hinsicht das heute umfassendste Lehrbuch der Funktionentheorie in russischer Sprache. Die Grundrichtung entspricht mehr der analytischen als der geometrischen Seite, mit einer weithin fühlbaren Hinneigung zum Kalkül. Die Sterne von Cauchy und Weierstraß stehen über dem Werk. Der kritische Geist der neueren Forschung zieht hindurch. Das Werk betont, aber es ist doch nicht einseitig. Die Gegenstände, welche seit rund hundert Jahren von russischen Mathematikern gepflegt worden sind, werden auch hier mit Nachdruck behandelt: „Der Autor hat sich bemüht, die Errungenschaften der vaterländischen Wissenschaft hervortreten zu lassen — haben sie doch grundlegende Bedeutung für die Theorie der analytischen Funktionen“. Das geht bis zur Namengebung: Cauchy-Riemann ist ersetzt durch Euler-d'Alembert, Schwarz' Ungleichung wird nach Buniakowskij, Weierstraß' Näherungssatz nach Sochockij benannt. Die Probleme um das Cauchy-Integral sind auf Grund der Doktordiss. von Sochockij — sie war 1873 wirklich vorausschauend, blieb aber für die Zeitgenossen praktisch unzugänglich — über Privalov bis hin zu Muschelišvili geführt. Die Punktmengenlehre — seit Hausdorffs Buch 1914 eben noch über die Grenze kam, ein Lieblingsgebiet der russischen Mathematiker — findet auch hier ausführliche Berücksichtigung im Zusammenhang mit Randeigenschaften bei Reihen, Funktionen und Abbildungen. Die Rolle der Lobatschewskischen Geometrie wird mehrfach unterstrichen, aber doch nicht einheitlich dargestellt. Dies mag damit zusammenhängen, daß der Begriff der Riemannschen Fläche erst im Schlußkapitel eingeführt wird (was eine

Hardysche Bedingung beinahe erfüllt, aber doch eine reiche Entwicklung der Funktionentheorie, neuerdings auch in Rußland, ausschaltet). — Als Darstellung weiter klassischer und neuerer Teile der Funktionentheorie kommt dem Buch ein geachteter Platz zu. E. Ullrich.

**Tajmanov, A. D.:** Eine Bemerkung zu dem Artikel V. S. Fedorovs „N. N. Luzins Arbeiten zur Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen“. *Uspechi mat. Nauk* 10, Nr. 1 (63), 167—168 (1955) [Russisch].

Im Nachlaß Luzins (dies. Zbl. 49, 170) war die Frage vermerkt: Kann man eine auf  $a \leq x \leq b$  komplexwertige Funktion  $f(x) = u(x) + i v(x)$ , die dort (reell) differenzierbar ist, so in ein  $[a, b]$  einschließendes Gebiet fortsetzen, daß diese Fortsetzung als Funktion von  $z = x - i y$  in jedem Punkte des Intervalls im Komplexen differenzierbar wird (d. i. noch nicht analytisch)? Verf. gibt zunächst eine einfache spezielle Lösung,  $F(z) = [f(x - y) + i f(x + y)]/(1 + i)$ , nachdem  $f(x)$  auf die ganze  $x$ -Achse ausgedehnt ist, und dann die allgemeine. E. Ullrich.

**Michael, J. H.:** An approximation to a rectifiable plane curve. *J. London math. Soc.* 30, 1—11 (1955).

Sätze über Kurvenintegrale wie Cauchys Hauptsatz der Funktionentheorie und der Integralsatz von Gauß-Green beweist man mittels Approximation des Integrationsweges durch einfachere Wege. Verf. gibt eine sehr einfache derartige Approximation an. Der erstere Satz wird unter folgenden schwachen Voraussetzungen bewiesen:  $C$  ist geschlossen und rektifizierbar ( $C$  braucht nicht einfach geschlossen zu sein);  $f$  ist im Innengebiet von  $C$  holomorph, im Innengebiet von  $C$  und auf  $C$  stetig. Ebenso wird der zweite Satz unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bewiesen.

G. Nöbeling.

**Ahmad, Mansoor:** Cauchy's theorem and its converse. *Acta math.* 93, 15—25 (1955).

Verf. beweist mit Hilfe bekannter Sätze über das Lebesguesche Integral den Cauchyschen Integralsatz und die Cauchysche Integralformel — die auftretenden Integrale seien dabei Lebesgue-Integrale — für beschränkte, bezüglich  $z = 0$  sternartige Bereiche  $B$  der  $z$ -Ebene und Funktionen, welche auf  $B \cup \text{Rd} B$  definiert sind und sowohl auf den zu  $\text{Rd} B$  konzentrischen und in  $B$  gelegenen Kurven, als auf den durch  $z = 0$  verlaufenden und in  $B$  enthaltenen Strecken gewissen Stetigkeits-, Differenzierbarkeits- und Beschränktheitsforderungen genügen. Aus der Gültigkeit der Cauchyschen Integralformel für  $f(z)$  erhält man unmittelbar Holomorphie von  $f(z)$  in  $B$ ; Verf. beweist die Holomorphie von  $f(z)$  auch noch unter etwas anderen Voraussetzungen als den oben erwähnten. H. Röhl.

**Lohwater, A. J.:** On the radial limits of analytic functions. *Proc. Amer. math. Soc.* 6, 79—83 (1955).

Es sei  $f(z)$  eine in  $|z| < 1$  nichtkonstante analytische Funktion, deren radiale Grenzwerte auf einem Randbogen  $\Omega$  fast überall gleich Null sind. Es sei  $A$  ein beliebiger Teilbogen von  $\Omega$  und  $\zeta$  eine beliebige komplexe Zahl oder  $\infty$ . Wenn der Mittelpunkt von  $A$  eine Umgebung  $V$  besitzt, in deren in  $|z| < 1$  enthaltenem Teil die Gesamtmenge  $\{z_k\}$  der  $\zeta$ -Punkte von  $f(z)$  der Bedingung  $\sum (1 - |z_k|) < \infty$  genügt, dann gibt es einen Punkt  $\alpha$  auf dem in  $V$  enthaltenen Teil von  $A$  sowie einen in  $\alpha$  einmündenden Jordanbogen in  $|z| < 1$ , derart, daß bei Annäherung längs dieses Jordanbogens  $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \zeta$  gilt. Y. Komatu.

**Rudin, Walter:** The radial variation of analytic functions. *Duke math. J.* 22, 235—242 (1955).

Es werden Funktionen  $f$  betrachtet, die sich im Innern des Einheitskreises  $U$  analytisch verhalten ( $K$  bezeichnet den Rand von  $U$ ). Weiter ist:  $W(f, r, \theta) = \int_0^r |f'(\varrho e^{i\theta})| d\varrho$ ,  $V(f, \theta) = W(f, 1, 0)$ . Dabei gibt  $V(f, \theta)$  die totale Variation von  $f$



auf dem Kreisradius an, der in  $e^{i\theta}$  mündet. Für  $f(z) = \sum a_n z^n$  und  $V(f, 0) < \infty$  heißt die Reihe  $\sum a_n e^{in\theta}$   $|A|$ -summabel (d. h. absolut Abelsch-summabel). Untersuchungen in dieser Richtung stammen von Whittaker, Prasad und Zygmund. Verf. interessiert sich für die Existenz von Funktionen, für die  $V(f, \theta)$  nicht mehr beschränkt bleibt, und beweist die folgenden Sätze: 1. Es existiert eine Funktion  $f$ , analytisch und beschränkt in  $U$ , so daß  $V(f, \theta) = \infty$  für fast alle  $\theta$ . 2. Es existiert ein Blaschkeprodukt  $B(z)$ , so daß  $V(B, \theta) = \infty$  für fast alle  $\theta$ . 3. Es existiert eine Funktion  $f$ , analytisch in  $U$  und stetig auf  $K$ , so daß  $V(f, \theta) = \infty$  für fast alle  $\theta$ .

H. P. Künzi.

**Rudin, Walter:** Multiplicative groups of analytic functions. Proc. Amer. math. Soc. 6, 83—87 (1955).

Es sei  $M(D)$  die multiplikative Gruppe aller analytischen Funktionen, welche in einem echten Teilgebiet  $D$  der Riemannschen Kugel regulär und eindeutig sind. Dann zeigt sich, daß für zwei solche Gebiete  $D_1$  und  $D_2$ ,  $M(D_1)$  und  $M(D_2)$  isomorph sind, wenn und nur wenn  $D_1$  und  $D_2$  denselben Zusammenhang besitzen.

Y. Komatu.

**Rudin, Walter:** Some theorems on bounded analytic functions. Trans. Amer. math. Soc. 78, 333—342 (1955).

Soient  $D$  un domaine du plan complexe et  $B(D)$  l'ensemble des fonctions analytiques uniformes et bornées dans  $D$ . Un point frontière  $x$  de  $D$  est dit essentiel s'il existe  $f \in B(D)$  ayant  $x$  comme point singulier. Si tous les points frontières de  $D$  sont essentiels,  $D$  est dit maximal. — L'A. montre la relation qui existe entre les points frontières non essentiels et les ensembles nuls de Painlevé. Il donne une démonstration simple d'un théorème non publié de Chevalley et Kakutani: Si  $D$  est maximal, il est déterminé (modulo une transformation conforme) par l'anneau  $B(D)$ . Il établit que l'ensemble  $K^*$  des points frontières essentiels est parfait; que  $D$  est dense dans une des composantes  $D^*$  du complémentaire de  $K^*$ ; que  $D^*$  est le plus petit domaine maximal contenant  $D$ . Il étudie l'ensemble d'accumulation des valeurs d'une fonction  $f \in B(D)$  en un point frontière essentiel. Il établit que si  $D$  est maximal,  $D$  est le domaine naturel d'existence d'une fonction  $f \in B(D)$ .

J. Dufresnoy.

**Rudin, Walter:** Analytic functions of class  $H_p$ . Trans. Amer. math. Soc. 78, 46—66 (1955).

Let  $D$  be a domain in the completed complex plane and  $f(z)$  a function regular in  $D$ . If  $0 < p < 1$ , there are two equivalent definitions for the class  $H_p(D)$ : (i)  $|f(z)|^p \leq u(z)$  where  $u(z)$  is harmonic in  $D$ ; or (ii)  $\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |f|^p \frac{\partial G}{\partial n} ds \leq M$ . Here  $t \in D$  is fixed,  $\Delta$  is any domain with smooth boundary  $\Gamma$  such that  $t \in \Delta \subset D$ , and  $G$  is the Green's function of  $\Delta$  with pole  $t$ . This second definition is independent of  $t$  (compare M. Parreau, this Zbl. 47, 320). Limiting cases are:  $H_\infty(D): f(z)$  bounded in  $D$ , and  $\text{Log}^+(D)/\text{log}^+|f|$  has a harmonic majorant in  $D$ . In the case  $D = U: |z| < 1$ , the classes  $H_p$  become the familiar Hardy classes. The definitions are conformally invariant in the following sense. If  $\psi$  is meromorphic in  $D_1$  with range in  $D$  and if  $f_1(z) = f(\psi(z))$ , then  $f \in H_p(D)$  implies  $f_1 \in H_p(D_1)$ , and similarly in the limiting classes. In particular, if  $\psi$  is meromorphic in the unit circle  $U$  with exact range  $D$  [these functions  $\psi$  are invariant under the automorphic group of  $D$ ], then the mapping  $f \rightarrow f_1$  maps  $H_p(D)$  into a subset of the Hardy class  $H_p(U)$ . Next,  $H_p(D)$  is a linear vector space. For fixed  $t \in D$ , a „norm“  $\|f\|_p = u(t)^{1/p}$  is introduced, where  $u(z)$  is the least harmonic majorant of  $|f|^p$  [definition (i)]. An equivalent definition by means of Green's functions is possible [definition (ii)]. The norm induces a topology which is shown to be independent of  $t$ . Further properties are: (i) the above mapping  $f \rightarrow f_1$  is an isometric isomorphism between  $H_p(D)$  and a closed subspace of  $H_p(U)$ . (ii)  $H_p(D)$  is a complete separable Haus-

dorff space. (iii) If  $p \geq 1$ ,  $H_p(D)$  is a Banach space which, for  $p > 1$ , is uniformly convex. The above isometry permits to reduce many problems for a general  $D$  to the familiar case of  $U$ . The author then considers the case where  $D$  is bounded with a boundary  $B$  consisting of  $k$  analytic simple closed curves. For fixed  $t \in D$ ,  $G$  denotes the Green's function of  $D$  with pole  $t$ .  $L_p(B)$  is the class of measurable  $f^*$  on  $B$  with norm  $\|f^*\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_B |f^*|^p \frac{\partial G}{\partial n} ds \right)^{1/p}$ . If  $p \geq 1$ ,  $H_p(B)$  is the closed subspace of  $L_p(B)$  of those  $f^*$  for which  $\int_B f^* \Phi dz = 0$ , whenever  $\Phi$  is regular in  $\bar{D}$ .

The following theorem then holds: (i) If  $f \in H_p(D)$ , then non-tangential boundary values  $f^*$  exist almost everywhere on  $B$ . (ii) The mapping  $f \rightarrow f^*$  is an isometric isomorphism from  $H_p(D)$  into  $L_p(B)$ . (iii) If  $p \geq 1$ , this mapping is onto  $H_p(B)$ , and the formulae

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{f^*(w)}{w - z} dw, \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_B f^* \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

hold where  $G$  is the Green's function of  $D$  with pole  $z$ . Finally, under the same assumptions on  $D$ , the author discusses the analogue of Schwarz's Lemma in  $H_1(D)$ . The problem is to maximize  $|f'(t)|$  under the assumption that  $f(t) = 0$  and  $\|f\|_1 \leq 1$ . The extremal functions of this problem are completely characterized [for the case  $H_\infty(D)$ , compare P. R. Garabedian, this Zbl. 40, 330] W. W. Rogosinski.

**Lax, Peter D.: Reciprocal extremal problems in function theory.** Commun. pure appl. Math. 8, 437—453 (1955).

Let  $D$  be a multiply connected plane domain with boundary  $C$  consisting of curves with continuous tangents except perhaps at a finite number of corners. Let  $D'$  be a closed subset of  $D$ ,  $q(x, y)$  a continuous function on  $D'$ ,  $\alpha(f)$  the functional defined for  $f$  analytic in  $D$  by  $\alpha[f] = \iint_{D'} q(x, y) f(z) dx dy$ , and  $k(w) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{D'} \frac{1}{z - w} q(x, y) dx dy$ . It is proved that the maximum of  $\alpha[f]$  taken over all  $f$  with  $|f(z)| \leq 1$  in  $D$  and with prescribed zeros at a finite number of points is equal to the minimum of  $\int_C k(w) - g(w) dw$  taken over all  $g$  analytic in  $D + C$

except perhaps for poles corresponding to the prescribed zeros of the functions  $f$ , and that both extrema are attained. It is further proved that if  $f_0$  and  $g_0$  are the functions for which the extrema are attained, then  $f_0(k - g_0) dz$  is a positive differential on  $C$  and  $f_0$  has modulus one there. The proof uses an abstract extremum theorem which is a simple corollary of the Hahn-Banach theorem and is the dual of the similar abstract theorem used for problems of this kind by Rogosinski and Shapiro (this Zbl. 51, 56). The method differs essentially from that of Rogosinski and Shapiro in that no use is made of the Riesz representation theorems for linear functionals nor of the theory of boundary values of functions of the classes  $H_p$ . F. F. Bonsall.

**Kantz, Georg: Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer analytischen Funktion und ihrer Umkehrfunktion.** Monatsh. Math. 59, 27—33 (1955).

Die Umkehrfunktion zu  $w = f(z)$  sei  $z = q(w)$ . Die  $n$ -ten Ableitungen an zugeordneten Stellen seien hier unter Fortlassen der Argumente mit  $f_n, q_n$  bezeichnet. Bildet man aus  $\varphi_1 = f_1^{-1}, \varphi_2 = -f_2 f_1^{-3}$  durch Fortdifferenzieren die entsprechenden Ausdrücke für höhere Ableitungen, so kommt man bald in ein unübersichtliches Dickicht. Verf. zeigt, daß man auch dieses durchleuchten kann; es wird zweckmäßig gesetzt:

$$\varphi_n = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r Z_{r,n} f_1^{n-r}, \quad Z_{0,1} = 1, \quad Z_{0,n} = 0 \text{ sonst}, \quad Z_{1,n} = f_n;$$

die (übrigen)  $Z_{r,n}$  sind Formen  $r$ -ten Grades in den  $f_v$  mit  $2 \leq v \leq n$  und mit

Gliedern der Form  $\text{const. } f_{a_1}^{\alpha_1} f_{a_2}^{\alpha_2} \dots f_{a_k}^{\alpha_k}$ ; dabei ist  $\sum \alpha_k = r$ ,  $\sum \alpha_k a_k = n + r - 1$ ; die Konstanten sind durch die  $n, r, \alpha, a$  völlig gekennzeichnet. Für sie werden erst Rücklaufformeln, dann sogar Mittel zur unmittelbaren Berechnung gegeben. Die Herleitung ist von der Analytizität unabhängig; man kann aber auch aus ihr in gewisser Weise Nutzen ziehen (Verwendung der Lagrange-Bürmannschen-Reihe).

*E. Ullrich.*

**Geronimus, Ja. L.:** Über die Eigenschaften gewisser Orthogonalreihen. Doklady Akad. Nauk SSSR **103**, 353—356 (1955) [Russisch].

Die bekannten Sätze von Abel, Tauber, Fatou-Riesz aus der Theorie der Potenzreihen lassen sich auf Orthogonalentwicklungen übertragen,  $\sum b_n \hat{P}_n(z)$ , die nach orthonormierten Polynomen in bezug auf den Einheitskreis, bei naheliegend eingeschränkter Belegung  $\sigma(\varphi)$ ,  $\int_0^{2\pi} \log \sigma(\varphi) d\varphi > -\infty$ , fortschreiten, und  $\sum |b_n|^2 < \infty$  erfüllen.

*E. Ullrich.*

**Šaginjan, A. L.:** Über die Konvergenzgeschwindigkeit von Polynomapproximationen auf beliebigen Mengen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. estest. techn. Nauk **8**, Nr. 3, 1—31 (1955) [Russisch].

Soit  $\Omega$  fermé et borné situé dans  $|z| \leq d$ , admettant un complémentaire connexe  $\Omega_\infty$ ; l'A. établit pour la fonction de Green (relative au point à l'infini)

l'inégalité  $g(z) \geq \frac{d_0}{2d} \exp \left[ -2 \int_{AB} \varrho(s) ds \right]$  ( $0 < d_0 < d$ ;  $|z_2| = d + d_0$ ;  $A$  et  $B$

sont les points d'affixe  $z_1$  et  $z_2$ ,  $\varrho(s)$  est la distance à  $\Omega$  du point d'abscisse curviligne  $s$  sur l'arc choisi entre  $A$  et  $B$ ). Cette inégalité permet de retrouver celle de M. A. Lavrentjev (ce Zbl. **16**, 169). Pour une fonction  $\varphi(z)$  analytique sur  $\Omega$ , l'A. évalue l'ordre de la meilleure approximation sur  $\Omega$  par des polynômes de degré  $n$  en fonction de la distance relative à  $\Omega$  (au sens de Lavrentjev) de la singularité la plus proche. La fin de l'article porte sur l'approximation polynomiale pondérée sur un ensemble non borné. — La lecture est gênée par de nombreuses erreurs typographiques dans les formules: un ou deux points du raisonnement nécessiteraient une remise en ordre [ainsi: l'évaluation (1.14) n'est pas assurée par les hypothèses formulées explicitement (contre-exemple:  $\Omega =$  cercle de petit rayon); l'expression (2.4) est erronée].

*G. Bourion.*

**Lochin, I. F.:** Zur Frage der Darstellung einer analytischen Funktion durch Fabersche Polynome. Mat. Sbornik, n. Ser. **36** (78), 441—444 (1955) [Russisch].

La sommation d'une série de Taylor dans l'étoile de Mittag-Leffler de la fonction somme est transposée aux séries de polynômes de Faber par la représentation conforme habituelle.

*G. Bourion.*

**Leont'ev, A. F.:** Über die Vollständigkeit eines Systems von Exponentialfunktionen in einem krummlinigen Streifen. Mat. Sbornik, n. Ser. **36** (78), 555—568 (1955) [Russisch].

Soit  $\omega(z)$  une fonction entière de type exponentiel, vérifiant pour presque tous les  $\varphi$  de l'intervalle  $|\varphi| < \mu$  la relation  $\lim [\log |\omega(r e^{i\varphi})|/r] = \sigma |\sin \varphi|$ ; si les  $\lambda_n$  sont les zéros de  $\omega(z)$  dans l'angle  $|\text{Arg } z| < \mu$  avec les multiplicités  $p_n$ , les fonctions  $e^{\lambda_n z}$ ,  $z e^{\lambda_n z}$ , ...,  $z^{p_n-1} e^{\lambda_n z}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) forment un système complet dans toute bande, rectiligne ou curviligne, de hauteur  $2\sigma$ :  $\varphi(x) < I(z) < \varphi(x) + 2\sigma$ .

*G. Bourion.*

**Eweida, M. T.:** On Newton's series of interpolation. Math. Z. **62**, 352—353 (1955).

Zu den Untersuchungen der Konvergenz der allgemeinen Newtonschen Interpolationsreihe für gegebene, nicht äquidistante Punkte  $a_i$  wird ein Beitrag geliefert in Form eines Kriteriums der gleichmäßigen Konvergenz unter der Annahme

$$\sum_{i=1}^n |a_i| = o(n).$$

*E. J. Nyström.*



Mironov, V. T.: Über eine Klasse rationaler Interpolationsreihen. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 215—218 (1955) [Russisch].

Etude des séries  $\sum a_n R_n(z)$  avec  $R_n(z) = \prod_{k=1}^n [(1 - z/uk^{1/2})/(1 - z/vk^{1/2})]$ .

G. Bourion.

Evans, J. P. and J. L. Walsh: On interpolation to a given analytic function by analytic functions of minimum norm. Trans. Amer. math. Soc. 79, 158—172 (1955).

Die Funktion  $f(z)$  sei analytisch in den Punkten  $\{\beta_{ik}\}$  ( $i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, i$ ), welche im Gebiet  $R_1$  der  $z$ -Ebene liegen. Sei  $g_n(z)$  eine in  $R_1$  analytische Funktion, welche in den Punkten  $\beta_{n1}, \beta_{n2}, \dots, \beta_{nn}$  gleich  $f$  ist und die kleinstmögliche Norm besitzt. Es wird die Konvergenz von  $g_n(z)$  gegen  $f(z)$  für  $n \rightarrow \infty$  untersucht. Die Norm wird hierbei in verschiedener Weise definiert. Der Fall, daß die Norm durch  $\inf_{z \in R_1} |g_n(z)|$  definiert wird, ist vom Verf. früher untersucht worden (dies. Zbl. 19, 404; 21, 399). Jetzt wird die Norm erstens durch das Flächenintegral  $\left\{ \iint_{R_1} |F(z)|^q dS \right\}^{1/q}$ ,

zweitens durch  $\left\{ \int_{C_\sigma} |F(z)|^q d\psi(z) \right\}^{1/q}$  definiert, wo  $C_\sigma$  die Niveaukurve einer gewissen harmonischen Funktion  $q(z)$  ist, welche auf dem Rand  $C_1$  von  $R_1$  den Wert 1 annimmt, und  $\psi(z)$  die konjugierte Funktion von  $q(z)$  ist. Drittens wird die Norm durch  $\left\{ \int_{C_1} |H_n(z)|^q dz \right\}^{1/q}$  definiert, wo  $H_n(z)$  eine Funktion ist, durch welche sich

$g_n(z)$  in der Form  $g_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{H_n(z)}{z - z_0} dz$  ausdrücken läßt. Im Falle  $q = 2$  wird

$f(z)$  in eine Orthogonalreihe entwickelt, deren Konvergenzeigenschaften untersucht werden. Das asymptotische Verhalten dieser orthonormalen Funktionen wird zuletzt studiert.

V. Paatero.

Davydov, N. A.: Verallgemeinerung des zweiten Abelschen Satzes. Uspechi mat. Nauk 10, Nr. 3 (65), 135—138 (1955) [Russisch].

Soit  $f(x) = \sum a_n x^n$ , ( $|x| < 1$ ), les  $a_n$  réels,  $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ ; la convergence d'une suite partielle:  $S_{n_k} \rightarrow S$ , jointe à une majoration de la somme des  $a_n$  de chaque signe entre  $n_k$  et  $n_{k+1}$ , entraîne  $f(x) \rightarrow S$  quand  $x \rightarrow 1$  sur le rayon. Comme application, l'A. montre que pour toute suite  $\{n_k\}$  vérifiant  $n_{k+1}/n_k \rightarrow 1$ , on peut construire  $\sum a_{n_k} x^{n_k}$  telle que  $\sum a_{n_k}$  diverge alors que la limite radiale existe.

G. Bourion.

Noble, M. E.: A further note on Taylor series with gaps. Proc. Cambridge philos. Soc. 51, 220—228 (1955).

L'A. donne de nouvelles applications des méthodes d'une Note antérieure (ce Zbl. 50, 97). Il compare certains de ses résultats à ceux de M. A. Evgrafov (ce Zbl. 47, 311) et de D. Gaier (ce Zbl. 52, 75).

G. Bourion.

Ricci, Giovanni: Sulle serie di potenze lacunari prolungabili e ultraconvergenti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 27—31 (1955).

La série  $\sum a_n z^n$  (rayon de convergence 1) présente „un système de lacunes d'Hadamard-Ostrowski“  $\{p_h, q_h\}$  si  $q_h - p_h > \theta p_h$  avec  $\theta$  positif et si l'ensemble des termes  $a_n z^n$  pour lesquels  $n$  figure dans les intervalles  $(p_h, q_h)$  forme une série à rayon de convergence supérieur à un; si la seconde condition n'est vérifiée qu'après suppression d'un nombre  $o(p_h)$  de termes dans chaque intervalle  $(p_h, q_h)$ , on a „un système de lacunes de Fabry-Pólya“. Les résultats suivants sont annoncés: on peut construire une série présentant des lacunes des deux sortes, les bornes sup. des largeurs relatives des lacunes H. O. d'une part, des lacunes F. P. d'autre part, ayant deux valeurs  $A, A^*$  assignées a priori ( $0 \leq A \leq +\infty$ ,  $0 \leq A^* \leq +\infty$ ). — Si  $\{p_h, q_h\}$  est un système de lacunes H. O. et si le cercle de convergence n'est pas une coupure, alors  $\{(1 - \alpha)p_h, (1 + \alpha)q_h\}$  est encore un système de lacunes H. O. pour  $\alpha$  assez petit. [Ce dernier résultat a été donné par le réf.: Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 50, 245—318 (1933) (ce Zbl. 8, 62), p. 255 et 257 du mémoire cité.] G. Bourion.

**Helson, Henry:** On a theorem of F. and M. Riesz. *Colloquium math.* **3**, 113—117 (1955).

It was proved by F. and M. Riesz [*Quatrième Congr. des Math. scand.*, 1916, 27—44 (1920)] that if  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  is regular in the unit circle and  $\int_0^{2\pi} |f(re^{ix})| dx$  is bounded for  $0 \leq r < 1$ , then  $\sum_{n=0}^{\infty} f(r e^{inx})$  converges in  $L_1$  norm as  $r \rightarrow 1$  to a summable function with Fourier series  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}$ . A new proof is here given of the following still more striking theorem, which is rather easily proved to be equivalent [C. G. Esseen, *Acta math.* **77**, 1—125 (1945)]. Let  $\mu$  be a bounded Borel measure on  $(0, 2\pi)$  with Fourier-Stieltjes coefficients  $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\mu(x)$ , which are zero for all negative  $n$ . Then  $\mu$  is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. A preliminary lemma establishes that  $\mu$  is continuous, and then  $\mu$  is decomposed into its singular and absolutely continuous parts  $\mu_s$  and  $\mu_a$ . A function  $q(z)$  is constructed which is regular in the unit circle, satisfies  $0 < |q(z)| < 1$  there, and has  $\lim_{r \rightarrow 1} q(r e^{ix}) = 0$  almost everywhere with respect to the total variation

of  $\mu_s$ . By considering the behaviour as  $r \rightarrow 1$  of the integral  $\int_0^{2\pi} e^{inx} q^{1/n}(r e^{ix}) d\mu(x)$ , it is easily deduced that  $\mu_s$  satisfies the conditions of the theorem. A further simple argument involving  $q$  establishes that all the Fourier-Stieltjes coefficients of  $\mu_s$  are zero, and hence that  $\mu = \mu_a$ . F. F. Bonsall.

**Combes, Jean:** Sur les zéros des dérivées successives des fonctions analytiques. I, II. *C. r. Acad. Sci., Paris* **240**, 39—41, 145—146 (1955).

In Verallgemeinerung früherer Ergebnisse (s. dies. Zbl. **53**, 43) werden Sätze über den Zusammenhang zwischen der Nullstellenverteilung der Ableitungen und den Taylorkoeffizienten bzw. den Wachstumseigenschaften analytischer Funktionen gegeben. Sei ständig  $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_v z^v}{v!}$  ( $\neq 0$ ) regulär für  $|z| < R$ ,  $|z_n| = r_n < R$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Gilt (1)  $f^{(n)}(z_n) = 0$  für  $n \geq 0$ , ist ferner  $(\gamma_{np})$  die Reziproke zu der unendlichen Halbdiametralmatrix  $(c_{jn})$ , mit deren Hilfe sich die Bedingung (1) in der Form schreiben läßt  $\sum_{v=n}^{\infty} a_v c_{vn} = 0$  ( $c_{jj} = 1$ ), so muß (offenbar) für unendlich viele Werte von  $p$  die Reihe  $\sum_{v=0}^{\infty} |a_v| \sum_{n=0}^p |\gamma_{vp}|$  divergieren. Ist  $R \geq 1$ ,  $f(z)$  kein Polynom, und gilt (1) wenigstens von einem Index an, so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} n |z_n| \geq K$ , wo  $K > 0$  von der Wahl von  $f$  unabhängig ist. Gilt wieder (1) von einem Index an und ist jetzt  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |z_n|/n^\alpha = A$  ( $A > 0, \alpha > -1$ ), so ist  $f(z)$  mindestens von der Ordnung  $1/(\alpha + 1)$ , und von einem Typ, der von einer nicht explizit bekannten Konstanten  $W^{(1)} \geq \lg 2$  abhängt, für die zum Schluß durch Betrachtung spezieller Funktionenklassen noch obere Abschätzungen gewonnen werden. Hermann Schmidt.

**Repin, I. I.:** Über Folgen von linearen Aggregaten analytischer Funktionen, die dem Wachstum nach beschränkt sind. *Mat. Sbornik. n. Ser.* **36 (78)**, 3—24 (1955) [Russisch].

Soit d'une part  $f(z)$  une fonction entière d'ordre fini  $\rho$  à coefficients de Taylor non nuls, d'autre part  $\{\lambda_n\}$  une suite de nombres complexes distincts, d'exposant de convergence  $\varrho_1 > \varrho$ . Toute fonction entière pouvant alors être approchée par une suite de „polynômes“  $\psi_k(z) = \sum_{j=1}^k \gamma_{kj} f(\lambda_j z)$  unif. convergente sur tout compact,

on ne peut obtenir de propriétés intéressantes des fonctions limites d'une telle suite qu'en imposant des conditions supplémentaires. L'A. considère une suite de „polynomes“ d'ordre fini  $\omega$  [donc: pour tout  $\beta > \omega$ , on a  $|\psi_k(z)| < \exp(|z|^\beta)$  pour  $|z| > r_0$ , où  $r_0$  dépend de  $\beta$  mais non de  $k$ ] et suppose  $1/\omega \leq 1/\varrho \leq 1/\varrho_1$ . La classe  $H$  des fonctions limites est caractérisée comme l'ensemble des solutions d'ordre  $\omega$  d'une certaine équation fonctionnelle: à toute  $F(z) \in H$  est associé, de manière unique, un développement formel:  $F(z) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j f(\lambda_j z)$ ;  $\psi_k(z) \sim F(z)$  implique

$\gamma_{kj} \rightarrow \gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Enfin, l'A. établit une condition portant sur les  $\lambda_n$ , qui assure la convergence [vers  $F(z)$ ] de la série formelle. — Ce travail utilise la généralisation de la transformation de Laplace-Borel donnée par A. F. Leont'ev (ce Zbl. 45, 351) dont les propriétés utilisées sont établies dans un premier chapitre.

G. Bourion.

**Džrbašjan, M. M.:** Abschätzungen für die Ableitungen ganzer Funktionen endlicher Ordnung vom Normaltypus. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. estest. techn. Nauk 8, Nr. 2, 1—16 (1955) [Russisch].

Bounds for the modulus of the derivatives of an entire function  $f(z)$  are given in terms of the order  $\varrho$  and the type  $\sigma$ : a typical result is the following: If  $f(z)$  is an entire function of order  $\varrho \geq 1/2$  and of normal type  $\sigma$  satisfying the condition  $\sup_{\arg z \geq \pi/2\varrho} |f(z)| \leq M < \infty$ , and if  $r_0 > 0$ , then for  $1/2 \leq \varrho \leq 1$ ,

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i\pi/2\varrho})| \leq \sigma^k M A_k r_0^{k(\varrho-1)} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

where  $A_k = (m_0 k)^{-k} (1 + e^k) k!/2$ . For the case that  $\varrho \geq 1$ , it is shown that

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i\pi/2\varrho})| \leq \sigma^k M A_k [r_0 + (k/\sigma)^{1/\varrho}]^k \varrho^{k(\varrho-1)}.$$

The author compares his bounds with those of S. Bernstein and concludes that they are not best possible.

A. J. Lohwater.

**Rubel, L. A.:** Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 41, 601—603 (1955).

The paper contains a proof of the following result: Let  $f(z)$  be an entire function of order one and finite type such that (1)  $|f(iy)| < K e^{c|y|}$  for some  $c < \pi$  and (2)  $f(n) = 0$  for a set  $A$  of positive integers. Then a necessary and sufficient condition that  $f(z)$  is identically zero is that the upper density of  $A$  is equal to one. The necessity of the condition is known earlier. The above theorem is an extension of Carlson's theorem that a function satisfying (1) and (2) with  $A$  equal to the set of positive integers is identically zero.

V. Ganapathy Iyer.

**Hervé, Michel:** Sur les valeurs omises par une fonction méromorphe. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 718—720 (1955).

Let  $f(z)$  be a single-valued meromorphic function in an arbitrary domain  $D$  and  $E$  be a closed set of capacity zero included in the boundary  $C$  of  $D$ . For  $\zeta \in C$ , denote by  $\Delta(\zeta)$  the set of accumulation of  $f(z)$  when  $z \rightarrow \zeta$ ,  $z \in D$  and for  $\zeta_0 \in E$ , by  $\Gamma_E(\zeta_0)$  the set of accumulation of  $\Delta(\zeta)$  when  $\zeta \rightarrow \zeta_0$ ,  $\zeta \in C - E$ . Using an interesting lemma, the author proves the following beautiful theorem: If each point of  $E$  belongs to a non-degenerate continuum disjoint with  $D$ , every value of a connected component of  $(\Delta - \Gamma_E)(\zeta_0)$  is taken by  $f(z)$  infinitely often in any neighbourhood of  $\zeta_0$ , except for at most two values of the component. This completes a result of the reviewer (this Zbl. 38, 53).

K. Noshiro.

**Hiong, King-Lai:** Sur un théorème fondamental de M. Milloux. C. r. Acad. Sci., Paris 241, 271—273 (1955).

Let  $f(z)$  be meromorphic in a domain  $D$  containing the origin; let  $\alpha_p(z)$ , ( $p = 0, 1, \dots, l$ ) be holomorphic in  $D$ ,  $\alpha_l \not\equiv 0$ ; let  $f_l = \sum_{p=0}^l \alpha_p f^{(p)}$ . Milloux (this Zbl. 26, 316) established the inequality:

$$T(r, f) < (l+1) N(r, f) + N(r, 1/f) + N(r, 1/(f_l - 1)) + S(r),$$



and gave conditions under which  $N(r, 1/(f-c))$ ,  $N(r, 1/(f_l-d))$ , ( $d \neq 0$ ), can be used in place of  $N(r, 1/f)$ ,  $N(r, 1/(f_l-1))$ . Hiong here describes a new proof, as a result of which the coefficient  $l+1$  may be replaced by 1, and the above-mentioned conditions reduced. Theorem: Let  $c, d (\neq 0)$ , be finite numbers such that the spherical distances  $|\infty, c|$ ,  $|\infty, d|$  are each  $\geq \delta > 0$ . Let  $f(0) \neq c, \infty$ ;  $f_l(0) \neq c\alpha_0(0), d$ ; and  $\Delta(0) \neq 0$  with

$$\Delta(z) = (d - c\alpha_0)(f_l' - c\alpha_0) + c\alpha_0'(f_l - c\alpha_0) \text{ and } d - c\alpha_0(0) \neq 0.$$

Then for  $r < \varrho$ , with  $|z| = \varrho$  in  $D$ , we have  $T(r, f) < N(r, f) + N(r, 1/(f-c)) + N(r, 1/(f_l-d)) - N_1(r, f) + M(r, \varrho) + S_l(r)$ , where  $N_1(r, f) = 2N(r, f) - N(r, f')$ .

— Explicit formulae for  $M(r, \varrho)$  in terms of  $\log^+ M(r, \alpha_p)$ ,  $\log^+ M(\varrho, \alpha_p)$ , ( $p = 0, 1, \dots, l$ ), and for  $S_l(r)$  in terms of  $\alpha_0(0)$ ,  $\Delta(0)$ ,  $f_p(0)$ , ( $p = 0, l$ ),  $r, \varrho$ ,  $\log^+ T(\varrho, f)$  are given. Hiong states an extension of this theorem:  $c, d$  are replaced by  $\varphi(z), \psi(z)$  which are holomorphic, with  $\psi(z) \equiv q_1(z)$ , in  $D$ , and  $M, S$  are replaced by analogous expressions  $M^*, S^*$ . The above theorem and the extension follow from the application to  $f(z) - c$ ,  $f(z) - \varphi(z)$  respectively, of a fundamental inequality which the author obtains for  $F(z)/\psi(z)$ ,  $F(z)$  being meromorphic in  $D$ .

N. A. Bowen.

**Noshiro, Kiyoshi:** Cluster sets of functions meromorphic in the unit circle. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 398–401 (1955).

Let  $f(z)$  be meromorphic in  $D: |z| < 1$ , and let  $z_0 = e^{i\theta_0}$  be a fixed point on  $C: |z| = 1$ . Furthermore, let  $A$  be an open arc on  $C$  containing  $z_0$ ,  $E \subset A$  a set of measure zero containing  $z_0$ , and  $\Delta(e^{i\theta})$  any curve in  $|z| < 1$  terminating at an arbitrary point  $e^{i\theta}$  of  $A - E$ . The cluster set of  $f(z)$  along  $\Delta(e^{i\theta})$  is denoted by  $S_{\Delta}(e^{i\theta})$ , the interior cluster set (with respect to  $D$ ) by  $S_{\Delta}^{(D)}(e^{i\theta})$ , the boundary cluster set (with respect to  $C$ ) by  $S_{\Delta}^{(C)}(e^{i\theta})$ , and the range of  $f(z)$  at  $z_0$  by  $R_{z_0}^{(D)}$ . The object of the note is to introduce a new type of boundary cluster set  $\Gamma_{z_0}^{(C)} = \bigcap_{r>0} M_r$ , where  $M_r$  is the

closure of the union  $\bigcup S_{\Delta}(e^{i\theta})$  for all  $e^{i\theta}$  in the intersection of  $|z - z_0| < r$  with  $A - E$ . The set  $\Gamma_{z_0}^{(C)}$  has the property that  $\Gamma_{z_0}^{(C)} \subset S_{z_0}^{(C)} \subset S_{z_0}^{(D)}$  and that, in many cases where  $S_{z_0}^{(D)} - S_{z_0}^{(C)}$  is empty, the set  $S_{z_0}^{(D)} - \Gamma_{z_0}^{(C)}$  is not empty. It is proved that  $\Omega_0 = S_{z_0}^{(D)} - \Gamma_{z_0}^{(C)}$  is an open set, and that if  $\alpha \in \Omega_0$  is an exceptional value in a neighborhood of  $z_0$ , then  $\alpha$  is an asymptotic value, either at  $z_0$ , or on a sequence of points of  $|z| = 1$  converging to  $z_0$ . These theorems, and others of a related character, extend results of Ohtsuka (this Zbl. **40**, 328), Lohwater (this Zbl. **46**, 300; **50**, 304), Lehto [Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 1, Nr. **160** (1953)], and Störvick [Bull. Amer. math. Soc. **60**, 481 (1954)].

A. J. Lohwater.

**Mügel, Karl Wilhelm:** Über meromorphe periodische Funktionen. Math. Nachr. **13**, 187–230 (1955).

The paper (forming the author's Doctorate dissertation) is devoted to an investigation of the properties of integral and meromorphic functions having a period (assumed to be  $2\pi$ ). The first two sections deal with a somewhat more general class of integral functions which include periodic functions, namely, functions  $f(z)$  ( $z = x + iy$ ) defined by Dirichlets series

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n z}, \quad \dots, \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots, \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_n|}{\log |n|} > 0,$$

converging absolutely for all finite  $z$ . Writing  $M(y) =$  upper bound of  $|f(z)|$  for fixed  $y$ , the main result relates the growth of  $M(y)$  with that of  $|a_n|$ . A typical result is that, if  $\varrho = \lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(y)}{\log |y|}$ ,  $\mu = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\log_2 (1/|a_n|)}{\log |\lambda_n|}$ , then  $\varrho > 1$  implies  $\mu > 1$  and  $1/\varrho + 1/\mu = 1$ . The author gives also a proof of the existence of a periodic function of finite order with an infinite number of zeros in the periodic

strip having a finite exponent of convergence. The remaining part of the paper is devoted to the study of periodic meromorphic functions. Since writing out the detailed definitions and formulae will involve too much space, a summary of the procedure adopted is given in general terms below. The main result centers round the definition of a characteristic function for a parallel strip (parallel to the real axis) similar to Nevanlinna's characteristic function for concentric circles. The characteristic function involves an average of  $\log^+ |f(z)|$  on the boundary of the strip and a sum containing the poles of the function. The main result is that this characteristic function differs from that of  $1/(f-a)$ ,  $a$  any finite complex number, by a bounded quantity as one or both of the boundaries of the strip tends to infinity. This result is used to discuss the distribution of the  $a$ -values of  $f(z)$ . Denoting by  $T(y, f)$  the characteristic function when the strip is symmetrical about the  $x$ -axis, an infinite product expression for  $f(z)$  in terms of trigonometric functions is ob-

tained for such functions for which  $\int_0^\infty T(v, f) e^{-v} dv$  is convergent. This class includes all meromorphic functions of finite order and some more. Defining the  $E$ -order  $\lambda = \lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{\log T(y, f)}{y}$  the above class includes all functions whose  $E$ -order is less than one. The author then discusses properties of functions with finite  $E$ -order. For instance, for functions of  $E$ -order less than one, if there be two Picard-Borel exceptional values, both are Picard exceptional values. Several of the results are generalisations of results known earlier.

V. Ganapathy Iyer.

**Tsuji, Masatsugu:** Function of  $U$ -class and its applications. J. math. Soc. Japan 7, 166—176 (1955).

Let  $f(z)$  be regular and  $|f(z)| < 1$  in  $|z| < 1$ . Then, by Fatou's theorem, the radial limit  $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$  exists almost everywhere on  $|z| = 1$ . If  $|f(e^{i\theta})| = 1$  for almost all  $e^{i\theta}$ ,  $f(z)$  is called a function of  $U$ -class in the sense of Seidel (this Zbl. 8, 363). Applying functions of  $U$ -class, the author obtains some results systematically concerning open Riemann surfaces with null boundary, the implicit function  $y(x)$  defined by an integral relation  $G(x, y) = 0$  and cluster sets of a meromorphic function.

K. Noshiro.

**Briggs, W. E. and S. Chowla:** The power series coefficients of  $\zeta(s)$ . Amer. math. Monthly 62, 323—325 (1955).

Theorem: If  $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{k=0}^\infty A_k (s-1)^k$ , then

$$A_k = \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N \frac{\log^k n}{n} - \frac{\log^{k+1} N}{k+1} \right).$$

Two proofs are given respectively applying

$$\zeta(s) = (2^{1-s} - 1)^{-1} \sum_{n=1}^\infty (-1)^n / n^s \quad \text{and} \quad \zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s \int_1^\infty \frac{([x] - x)}{x^{s+1}} dx.$$

It is not remarked that this result was already known by Stieltjes [Correspondance d'Hermite et de Stieltjes I (Paris, 1903), p. 153—155].

W. Verdenius.

**Rodosskij, K. A.:** Über die Verteilung kleiner Betragswerte der  $\zeta$ -Funktion. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 19, Nr. 2, 97—102 (1955) [Russisch].

The author proves the following theorem which was announced before (this Zbl. 48, 277). Let  $T \geq 3$  and  $\sqrt{\log(8c \log T)} / \log T + \frac{1}{2} \leq \Delta \leq 1$ , and let  $R_n$  denote the rectangular  $\Delta \leq \sigma \leq 1$ ,  $\frac{1}{2}T + n \leq t < \frac{1}{2}T + n + 1$ ,  $n = 0, 1, \dots, [\frac{1}{2}T]$ . The number of  $R_n$  such that

$$\min_{s \in R_n} |\zeta(s)| < (5 \log T \cdot T^{(2\Delta-1)(1-\Delta)/(2-3\Delta+2\Delta^2)})^{-1}$$

does not exceed  $c \log^{12} T \cdot T^{(1+2A)(1-A)/(2-3A+2A^2)}$ . To prove this theorem the author introduces a lemma concerning the partial sum of Dirichlet series which seems to be interesting in itself: Let  $f(s) = \sum_{y < n \leq z} a_n n^{-s}$ , where  $z > y \geq 3$ ,  $|a_n| \leq A \tau(n)$

where  $\tau(n)$  is the divisor function and  $A$  denotes a positive number. Let  $Q(A, T)$  be the maximal number of  $\varrho^{(k)} = \beta^{(k)} + i \tau^{(k)}$  such that 1.  $\varrho^{(k)}$  lies in the rectangular  $\Delta \leq \sigma \leq 1$ ,  $\frac{1}{2} T \leq t \leq T$ ; 2.  $|\tau^{(k)} - \tau^{(l)}| > B$  for  $k \neq l$ ; 3.  $|f(\varrho^{(k)})| > M$ , where  $B$  and  $M$  are positive numbers. Then

$$Q(A, T) < c A^2 M^{-2} L^6 \log^{12} z (T y^{1-2A} + z^{1-2A})$$

provided that  $\log^3 z \geq \max(L^{-3}, B^{-1} L^{-3})$ , where  $L^3 = \max(8A M^{-1}, 1)$ .

L. K. Hua.

**Emersleben, Otto:** Über Summen Epsteinscher Zetafunktionen regelmässig verteilter „unterer“ Parameter. Math. Nachr. 13, 59–72 (1955).

Let  $Z \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & \cdots & h_p \end{vmatrix} (s) = \sum' e^{2\pi i(h_1 k_1 + \cdots + h_p k_p)} \left( \sum_{j=1}^p k_j^2 \right)^{s/2}$ , where  $\sum'$  runs over all lattice points  $(k_1, \dots, k_p)$  except the origin. By direct summation, we find

$$\sum_{l_1=1}^n \cdots \sum_{l_p=1}^n Z \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ h_1 + l_1/n & \cdots & h_p + l_p/n \end{vmatrix} (s) = n^{p-s} Z \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ n h_1 & \cdots & n h_p \end{vmatrix} (s).$$

In case  $n h_1, \dots, n h_p$  being integers, and letting  $s \rightarrow p$ , the right hand side is equal to  $2\pi^{p/2} \log^n / \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)$ . Another identity of the author is

$$Z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} (s) + Z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 - x & 1/2 - y \end{vmatrix} (s) = 2^{1-s/2} Z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x + y & x - y \end{vmatrix} (s).$$

L. K. Hua.

**Goodman, A. W.:** Almost bounded functions. Trans. Amer. math. Soc. 78, 82–97 (1955).

We are given a group  $G^{(2n)}$  of complex linear transformations  $L_j(w) = (a_j w + b_j)/(c_j w + d_j)$ ,  $1 \leq j \leq 2n$ ,  $a_j d_j - b_j c_j \neq 0$ . For given  $w$  in the closed complex plane, the values  $L_j(w)$  form a set  $S^{(2n)}(w)$ . A function  $f(z)$ , meromorphic in a domain  $\Delta$ , is said to be almost bounded there (with respect to  $G^{(2n)}$ ), if  $f(z)$  takes at most  $n$  values of the set  $S^{(2n)}(w)$  (though arbitrarily often) for every  $w$ . In particular, let  $\Delta$  be the unit circle  $|z| < 1$  and  $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$  there. If  $G^{(2)}$  is the group  $w, 1/w$ , almost boundedness means  $f(z_1) \cdot f(z_2) \neq 0$  in  $|z| < 1$ . In this case it is known that  $|a_n| \leq 1$  with equality only if  $f(z) = \eta z^n$ ,  $|\eta| = 1$  (Milin and Lebedev, this Zbl. 36, 188; 44, 80). These results do not hold for a general  $G$ . However it is shown that the particular inequality  $|a_1| \leq 1$  holds if  $G$  satisfies certain conditions, provided that  $f(z)$  is also schlicht in  $|z| < 1$ . Every equivalence class generated by a given  $G^{(2n)}$  contains a representative satisfying these conditions. In the above case  $G^{(2)}$ , the corresponding result was first obtained by Bieberbach [S.-Ber. preuß. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1916, 38 (1916)].

W. W. Rogosinski.

**Jenkins, James A.:** On Bieberbach-Eilenberg functions. II. Trans. Amer. math. Soc. 78, 510–515 (1955).

The functions in question are power series  $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$  in  $|z| < 1$  that satisfy  $f(z_1) \cdot f(z_2) \neq 1$  whenever  $|z_1| < 1$ ,  $|z_2| < 1$ . It is known that  $|a_1| \leq 1$  and that  $|f(z)| < 4/|a_1|$  in  $|z| < 1$  (compare Rogosinski, this Zbl. 20, 376). The author determines the exact upper bound for  $|f(z)|$  in  $|z| < 1$  when  $|a_1|$  is fixed, in terms of a (univalent) extremal function of the class. It is difficult to follow the details of the construction of this extremal function which is closely bound up with other results of the author (Part I, this Zbl. 55, 308).

W. W. Rogosinski.

**Jung, Hans Peter:** Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen. Mitt. math. Sem. Gießen 52, 29 S. (1955).

Die Arbeit zerfällt in vier ziemlich selbständige Teile.  $S$  sei die Klasse der in



$|z| < 1$  schlichten regulären Funktionen mit  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ . Der 1. Teil untersucht Polynome aus  $S$ , wobei  $f'(z) \neq 0$  ausgenutzt wird. Es werden Sätze von Szegő und Schur herangezogen, die einem Polynom, dessen sämtliche Nullstellen in  $|z| < 1$  liegen, ein anderes dieser Art zuordnen. So folgt z. B. für  $f(z) = \sum_{v=1}^n a_v z^v \in S: |a_{n-1}| \leq 6/(n-1)$ . — Der 2. Teil leitet Ungleichungen zwischen

$a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$  bei  $f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v z^v \in S$  her, falls  $|a_n|$  extremal ist. Es wird eine Variationsmethode benutzt, indem  $f(z)$  entweder in der Umgebung eines beliebigen Punktes aus  $|z| < 1$  in eine Potenzreihe entwickelt oder  $|z| < 1$  linear in sich transformiert wird und beide Male wieder auf  $S$  normiert wird. Ähnliche Untersuchungen wurden an den in  $|z| > 1$  schlichten Funktionen mit  $f(z) = z + \sum_{v=1}^{\infty} b_v z^{-v}$  durchgeführt. — Der 3. Teil sucht den Problemen der schlichten

Funktionen dadurch beizukommen, daß  $S$  als abgeschlossene Hülle der durch die Schwarz-Christoffelschen Formeln darstellbaren Polygonabbildungen aufgefaßt wird. Dieser Grundgedanke liefert Darstellungen von  $a_2$  und  $a_3$ , die den aus der Löwner'schen Methode fließenden verwandt sind, in die aber statt einer nicht näher deutbaren Funktion  $k(t)$  mit  $|k| = 1$  die Krümmung des Bildrandes eingeht. Diese Formeln werden zu Koeffizientenabschätzungen unter speziellen geometrischen Voraussetzungen herangezogen. — Der 4. Teil bringt einen neuen Beweis für  $|a_3| \leq 3$  unter Benutzung eines auf der Löwner'schen Methode fußenden Ergebnisses von Tammi [Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 1, No. 162 (1953)]. *H. Grunsky.*

**Flett, T. M.:** Some remarks on schlicht functions and harmonic functions of uniformly bounded variation. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 6, 59–72 (1955).

Es sei  $\sigma(z) = z + \dots$  eine analytische Funktion, die in  $|z| < 1$  regulär und schlicht ist. Verf. leitet mittels des Randverhaltens von  $\arg \sigma'(z)$  und des Wachstumsgrades von  $|\sigma'(z)|$  eine notwendige und hinreichende Bedingung her dafür, daß die Darstellung

$$\log \sigma'(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log (1 - z e^{-i\psi}) dU(\psi)$$

mit einer periodischen Funktion  $U(\psi)$  beschränkter Schwankung gilt. Ferner wird ein neuer Beweis eines Satzes von Paatero (dies. Zbl. 1, 143) angegeben, der lautet:

Falls  $\int_{-\pi}^{\pi} |d \arg \sigma'(r e^{i\theta})|$  für  $r < 1$  beschränkt ist, so ist  $\sigma(z)$  auf  $|z| < 1$  stetig mit möglicher Ausnahme von endlich vielen Unendlichkeitsstellen auf dem Rande. *Y. Komatu.*

**Taam, Choy-Tak:** Schlicht functions and linear differential equations of second order. J. rat. Mech. Analysis 4, 467–480 (1955).

Verf. zieht Folgerungen aus dem von Nehari formulierten allgemeinen Schlichtheitskriterium, wonach  $f(z)$  in einem Gebiet  $\mathfrak{G}$  dann und nur dann schlicht ist, wenn die Differentialgleichung  $w'' + Q(z)w$ ,  $Q(z) = \frac{1}{2} \{f(z), z\}$ ,  $\{\dots\} =$  Schwarzsche Derivierte, nur Lösungen mit höchstens einer Nullstelle in  $\mathfrak{G}$  besitzt. Auf zwei Wegen werden hinreichende Bedingungen für dieses Verhalten der Differentialgleichung gewonnen; der erste benutzt eine Verallgemeinerung der sog. Greenschen Transformierten [vgl. Hille, Trans. Amer. math. Soc. 23, 350–385 (1923)], wobei Überlegungen von Wintner (dies. Zbl. 43, 87) ins Komplexe übertragen werden; der andere ist eine Vergleichsmethode [s. Verf., Proc. Amer. math. Soc. 4, 876–879 (1953)]. Diese liefert erneut die speziellen Neharischen Kriterien. Die sonstigen Ergebnisse sind in ihrer Bedeutung wenig durchsichtig.

*H. Grunsky.*

Lebedev, N. A.: Majorantenbereiche für den Ausdruck  $J = \ln \left( \frac{z^\lambda f'(z)^{1-\lambda}}{f(z)^\lambda} \right)$  in der Klasse  $S$ . Vestnik Leningradsk. Univ. **10**, Nr. 8 (Ser. mat. fiz. chim. Nr. 3), 29—41 (1955) [Russisch].

Es wird der genaue Wertbereich  $D_\lambda(z)$  untersucht und dem Wesen nach festgestellt, welcher dem im Titel genannten Ausdruck  $J = J_\lambda(z)$  zukommt, wenn  $\lambda$  eine beliebige reelle Zahl,  $f(z)$  eine beliebige im Einheitskreis  $E$  schlichte, reguläre Funktion und  $z$  ein fester, aber beliebiger Punkt aus  $E$  ist.  $D_\lambda(z)$  ist stets abgeschlossen, zusammenhängend, symmetrisch zur reellen Achse. Sein Rand kann durch eine Differentialgleichung gekennzeichnet werden; allerdings ist diese bei allgemeinem  $\lambda$  recht verwickelt, sodaß erst eine weitere Untersuchung erforderlich ist. Aber in Sonderfällen, wie  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $1$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $0$  treten so wesentliche Vereinfachungen ein, daß man übersichtliche und teils sogar abschließende Aussagen gewinnt. In der Diss. von Grunsky (dies. Zbl. **5**, 362) finden sich einige dieser Fälle schon 1930. Andererseits ergeben sich dabei die genauen Wertbereiche für  $\arg f'(z)$  — also die lange umworbenen genauen Schranken zum Drehungssatz, auf einem neuen Wege (zuerst Goluzin, dies. Zbl. **14**, 221; **15**, 71) — sowie genaue Schätzungen für  $\max \operatorname{Re} J$  und  $\min \operatorname{Re} J$ , einschließlich der Extremalfunktionen. *E. Ullrich.*

Iliev, Ljubomir: Ein Satz über die Schlichtheit endlicher Summen von dreifach symmetrischen schlichten Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR **100**, 621—622 (1955) [Russisch].

Die Abschnitte  $\sigma_n^{(3)}(z) = z + a_4 z^4 + \dots + a_{3n+1} z^{3n+1}$  einer dreistrahligen symmetrischen, im Einheitskreis schlichten Potenzreihe waren vom Verf. (dies. Zbl. **46**, 304) als schlicht in  $|z| < \frac{1}{2} \sqrt[3]{3}$  nachgewiesen, ausgenommen  $n = 2$ . Diese Lücke wird geschlossen. Die Schranke ist genau. Beweis: Löwnersche Methode. *E. Ullrich.*

Iliev, Ljubomir: Über den Differenzenquotienten bei beschränkten, schlichten Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR **100**, 861—862 (1955) [Russisch].

In einer seiner Jugendarbeiten hatte R. Nevanlinna 1917 eine untere Schätzung für  $|f(z)|$  bei beschränkten schlichten Funktionen im Einheitskreis gegeben (Klasse  $S$ ). Andererseits schätzte Basilevič (dies. Zbl. **44**, 307) ebenda den Differenzenquotienten in gleicher Weise. Verf. verbindet beide Ergebnisse für Funktionen der Klasse  $S_N^{(k)}$ :  $f_k(z) = z + a_1^{(k)} z^{k+1} + a_2^{(k)} z^{2k+1} + \dots$  mit  $|f(z)| \leq N$  und Schlichtheit in  $|z| < 1$ . Es entstehen wieder genaue Ungleichungen, mit angebbaren Extremalfunktionen. Grenzübergänge für die Schranken, bzw.  $z_2 \rightarrow z_1$ , führen auf früher bekannte Fälle zurück. *E. Ullrich.*

● Lelong-Ferrand, Jacqueline: Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée. (Cahiers scientifiques, Fasc. XXII.) Paris: Gauthier-Villars 1955. VIII, 257 p. fr. 4000.

Depuis quarante ans, de nombreux mathématiciens ont étudié la représentation conforme d'un domaine plan sur un autre ou d'une surface de l'espace euclidien sur un domaine plan; certains ont étudié les représentations quasi-conformes. Des résultats voisins, parfois identiques, ont ainsi été obtenus dans des cas plus ou moins généraux par des méthodes souvent très différentes. L'A. y a apporté récemment une contribution importante. — Dans le présent ouvrage, l'A. donne un exposé synthétique, très personnel et d'un caractère entièrement nouveau, de l'ensemble de ces recherches. Il se place systématiquement dans les cas les plus généraux de façon à mettre en évidence tout le champ d'application des méthodes. Le dernier chapitre mis à part, l'ouvrage ne fait cependant appel qu'à des propriétés élémentaires de la théorie des fonctions de variable réelle ou complexe. La rédaction est soignée, mais on déplorera un nombre excessif de fautes typographiques. — Le Chap. I est consacré aux transformations  $T$  d'un domaine plan  $D$  sur une surface de l'espace euclidien, obtenues par des fonctions à intégrales de Dirichlet bornées;

lorsque  $D$  est un cercle, on obtient les propriétés connues sur les limites radiales et les limites relatives à des chemins plus généraux aboutissant à un point frontière de  $D$ . Dans le Chap. II, on impose aux transformations  $T$  une condition supplémentaire, mi-topologique, mi-métrique (vérifiée, en particulier, par les transformations intérieures) qui permet de préciser les résultats précédents et d'établir des modules de continuité. Dans le Chap. III, on se limite aux transformations  $T$  qui sont topologiques; grâce aux bouts premiers de Carathéodory, l'A. introduit une topologie convenable et une métrique associée qui lui permettent de prolonger la transformation à la frontière et d'étendre, jusqu'à la frontière, les modules de continuité. Le Chap. IV étudie les suites de transformations également continues (au sens du chap. précédent) et leurs applications à la représentation conforme: problème de la conservation des angles en un point frontière, comportement asymptotique de la représentation d'une bande infinie. Le Chap. V. est consacré à l'approximation des fonctions holomorphes par des fonctions de réseau (fonct. préharmoniques, fonct. préholomorphes) avec application à la démonstration de l'existence d'une classe de représentations conformes canoniques. Dans le Chap. VI, l'A. expose les théorèmes de déformation (ceux d'Ahlfors, en particulier) et leur application au problème de la dérivée angulaire. Le Chap. VII, enfin, étudie les limites des suites de transformations  $T$ ; des résultats récents de la théorie du potentiel, dûs à J. Deny, trouvent ici une application intéressante; certains résultats du Chap. I sont ainsi précisés et généralisés. Une bibliographie très complète est donnée à la fin du volume.

*J. Dufresnoy.*

**Kubo, Tadao:** Kelvin principle and some inequalities in the theory of functions. I, II, III. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 28, 299—311 (1954), 29, 17—26, 119—129 (1955).

Entsprechend wie Nehari das Dirichletsche Prinzip systematisch zur Gewinnung von funktionentheoretischen Ungleichungen ausgewertet hat, verwendet Verf. hier das Kelvinsche Prinzip. Er erhält primär Monotonieaussagen für gewisse Gebietsfunktionen, aus denen sich z. B. Verzerrungssätze folgern lassen, bei denen die Extremalgebiete Radialschlitzgebiete sind, während bei Nehari Kreisbogen-schlitzgebiete auftraten. Soweit die Aussagen einen einfachen und durchsichtigen Charakter haben, sind sie meist bekannt. Im Teil III sind zwei Sätze grundlegend, die die Monotonie gewisser Gebietsfunktionen aussagen, und die zu einem gemischten Randwertproblem in entsprechenden Beziehungen stehen, wie frühere Sätze zum zweiten und gewisse Sätze von Nehari (dies. Zbl. 51, 312) zum ersten Randwertproblem. Es werden Anwendungen auf konforme Abbildungen ein- und zweifach zusammenhängender Gebiete gemacht, bei denen eine Randkomponente zum Teil in einen Kreis, zum Teil in einen Radialschlitz übergeht.

*H. Grunsky.*

**Kuribayasi, Akikazu:** On functions of bounded Dirichlet integral. Kōdai math. Sem. Reports 7, 30—32 (1955).

Verf. gibt mittels der Begriffe der Theorie der linearen Räume einen Beweis für die von Ozawa (dies. Zbl. 49, 176) ausgesprochene notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine in einem  $n$ -fach zusammenhängenden Gebiet eindeutige reguläre Funktion ein Bildgebiet mit Flächeninhalt  $\leq \pi$  ergibt. Der Satz wird ferner auf Riemannsche Flächen ausgedehnt.

*H. Grunsky.*

**Heffenstein, H. G.:** Conformal maps with least distortion. Canadian J. Math. 7, 306—313 (1955).

Analog wie in Arbeiten von Tschebyscheff wird als bestmögliche geographische Karte eines Landes eine konforme Abbildung (auf ein Gebiet der Ebene) mit „möglichst konstantem“ Verkleinerungsverhältnis angesehen. Während aber Tschebyscheff als Maß der Verzerrung die größte Abweichung des Logarithmus dieses Verhältnisses von einem konstanten Wert betrachtete, wird hier für einfach zusammenhängende Gebiete nach einer (im allgemeinen ziemlich willkürlichen)



Normierung die „mittlere“ quadratische Abweichung minimalisiert. Diese Normierung bezieht sich auf eine Hilfsabbildung auf den Einheitskreis und hängt von der freien Auszeichnung eines inneren Punktes  $M$  des abzubildenden Gebietes  $G$  wesentlich ab. (Sie darf also eigentlich nur dann als „naturgemäß“ betrachtet werden, wenn  $M$  in  $G$  z. B. durch Symmetrie schon geometrisch ausgezeichnet ist, und wenn das optimale Bildgebiet selbst kreisförmig oder beinahe so nachträglich ausfällt.) — Für das so festgelegte Problem wird (unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über die gegebene Fläche) die Existenz einer extremalen Abbildung bewiesen und eine Vorschrift für deren explizite Berechnung gegeben: Sei zunächst  $G$  durch  $z = z(p)$  konform auf den Einheitskreis  $U: |z| < 1$  abgebildet mit  $z(M) = 0$ ; aus dem Verhältnis  $|dz|/ds = \gamma(z)$  ( $ds$  auf  $G$ ) wird eine derartige analytische Funktion  $w(z)$  im Einheitskreis (als Potenzreihe, bzw. als Integral) konstruiert, daß die zusammengesetzte Funktion  $w(z(p))$  die gesuchte extremale Abbildung liefert. Dabei darf der Wert von  $|dw|/ds$  im Punkte  $M$  vorgeschrieben werden. — Die Beweismethode besteht im wesentlichen in der Bestimmung einer harmonischen Funktion  $\Phi(z)$  und einer Konstante  $C$ , so daß das Integral  $\iint_U (\Phi + \log \gamma - C)^2 dx dy$  bei vorgeschriebenem  $\Phi(0)$  minimal wird. Dann ist  $|w'(z)| = e^{\Phi(z)}$ . Wann das Bildgebiet  $w(U)$  schlicht ist, bleibt eine offene Frage. — Ist  $G$  ein Kreis auf einer Kugel, so liefert die stereographische Projektion vom antipodischen Punkt der Kugel aus die „im Mittel am wenigsten verzerrte“ konforme Abbildung. J. Hersch.

**Shah, Tao-Shing: The product of the mapping radii of non-overlapping domains.** Acta math. Sinica **5**, 27—34 und engl. Zusammenfassg. 34—36 (1955) [Chinesisch].

Es werden zwei Extremalprobleme behandelt: 1. Zu einem Satz von  $n$  festen endlichen Punkten  $a_1, \dots, a_n$  der  $z$ -Ebene soll ein entsprechendes System fremder Gebiete  $G_\nu$  mit  $a_\nu \in G_\nu$  bestimmt werden, derart daß das Produkt der Abbildungsradien  $|f_\nu| R(a_\nu, G_\nu)$  maximal wird. Goluzin (dies. Zbl. **44**, 306) hatte dieses Problem behandelt und Differentialgleichungen für die Extremalfunktionen  $f_\nu(z)$  aufgestellt; Verf. konnte zusätzlich zeigen, daß die  $f_\nu(z)$  durch analytische Fortsetzung in eine einzige Funktion zusammenfließen. Diese wird jetzt angegeben, ebenso wie die  $G_\nu$ ; es handelt sich um einen Ausdruck vom Typus

$$a(z) = \int_{\infty}^z \left[ \sqrt{P(z)} \prod_{i=1}^n (z - a_\nu) \right] dz,$$

wo  $P(z)$  ein passend bestimmtes Polynom ist (dies. Zbl. **52**, 304):  $\operatorname{Re} a(z) = 0$  liefert dann die Ränder der  $G_\nu$ , die Umkehrung von  $\zeta = \exp a(z)$  die Abbildungsfunktionen. Die Beweismethode ruht auf Extremallängen. Sie erlaubt ein verwandtes Problem zu behandeln, das schon von Grötzsch, Lavrentiev und Goluzin angegriffen war: 2. Seien jetzt alle  $a_\nu \neq 0, \infty$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ); es sei  $G$  ein Gebiet mit  $0 \in G$ , aber  $a_\nu, \infty \notin G$ . Bestimme  $\max R(0, G)$ . Das gelingt, jetzt mittels eines Ausdrucks verwandter Bauart,

$$b(z) = \int_{\infty}^z \sqrt{Q(z)/H(z - a_\nu)} \frac{dz}{z},$$

wo  $Q(z)$  ein Polynom vom Grade  $m \leq n - 1$  ist; es bestimmt sich aus den  $a_\nu$ ;  $\operatorname{Re} b(z) = 0$  gibt den Rand des Extremalgebiets  $G$ , die Umkehrfunktion zu  $\zeta = \exp b(z)$  leistet die verlangte extremale Abbildung. E. Ullrich.

**Lebedev, N. A.: Zur Theorie der konformen Abbildungen eines Kreises auf nicht übereinandergreifende Gebiete.** Doklady Akad. Nauk SSSR **103**, 553—555 (1955) [Russisch].

(1) Let  $D$  be a simply connected domain on the  $w$ -plane and  $a_i \neq \infty$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n > 1$ , points in  $D$ . Let  $f_k(\zeta)$ ,  $f_k(0) = a_k$ , be a function which maps conformally  $|\zeta| < 1$  on a domain  $D_k$ ,  $a_k \in D_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . It is supposed that  $D_k D_i = \emptyset$

for  $i \neq k$  and  $D_k \subset D$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Let be denoted by  $Q_D$  the set of all systems of functions  $f_1(\zeta), f_2(\zeta), \dots, f_n(\zeta)$  for all possible domains  $D_k$  and by  $E_D(a_1, \dots, a_n)$  the set of all points  $M(|f'_1(0)|, \dots, |f'_n(0)|)$ . Three cases are considered: 1°  $D$  is a closed plan, 2° an open plan, 3° a circle  $|w| < R$ . The author gives an evaluation of the domain  $E_D$  for these particular cases. J. Górski.

**Leja, F.: Construction of the function mapping conformally an arbitrary simply connected domain upon a circle.** *Zastosowania Mat.* **2**, 117—121, russische und engl. Zusammenfassg. 121—122 (1955) [Polnisch].

This paper contains the short recapitulation of the proof of the existence of the function mapping conformally a simply connected domain upon a circle. The proof is based on the method of extremal points introduced by the autor (this *Zbl.* **12**, 214).

J. Górski.

**Strebel, Kurt: Die extreme Distanz zweier Enden einer Riemannschen Fläche.** *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I* **179**, 21 S. (1955).

Verf. geht aus von bekannten Untersuchungen über die extreme Länge und weist auf Resultate hin, die zum Teil in seinen früheren Arbeiten behandelt wurden. In seiner neuen Untersuchung verallgemeinert Verf. die Ergebnisse für beliebige Riemannsche Flächen  $F$ . Mit  $F_0$  wird ein im allgemeinen nicht kompaktes Teilgebiet der Fläche  $F$  bezeichnet mit dem relativen Rand  $I_0$ . Wenn  $\{F_n\}$  eine nach bestimmten Vorschriften ausgeführte Ausschöpfung von  $F_0$  angibt, so bestimmt das Kurvensystem  $I_n$  ein Ende  $I_\infty$ . Verf. interessiert sich jetzt für die extreme Distanz zweier Enden einer Riemannschen Fläche und beweist neben gewissen Stetigkeitseigenschaften dieser Länge den allgemeinen Satz, daß die extreme Distanz zweier Enden  $I_\infty$  und  $I_\infty$  gleich dem reziproken Wert des Dirichlet-integrals des Strömungspotentials von  $F$  mit den Randwerten 0 auf  $I_\infty$  und 1 auf  $I_\infty$  ausfällt, d. h.  $\lambda(\gamma) = 1/D(u)$ . Im weitem bezeichnet Verf. mit  $R_z(P, I_\infty) = \lim_{r \rightarrow 0} r e^{2\pi\lambda(r)}$  den extremalen Radius des Endes  $I_\infty$  von  $F$  im Punkt  $P$ .  $\{\lambda(r) =$

extremale Distanz von  $z$  zu  $r$  und  $I_\infty\}$ . Mit dieser Festlegung werden weitere Abbildungseigenschaften bewiesen. Ist z. B. der extreme Durchmesser  $R(\zeta, I_2)$  der Randkomponente  $I_2$  im Punkte  $\zeta < \infty$ , so kann  $F_\zeta$  durch eine bestimmte Funktion auf ein Gebiet  $F_w$  konform bezogen werden, das im Kreise  $|w| < R$  enthalten ist. Für  $R(\zeta, I_2) = \infty$  existiert eine Limesfunktion, die  $F_\zeta$  in  $F_w$  überführt, wobei  $F_w$  von einer minimalen Randschlitzmenge und einem „Stern“ berandet wird. Entsprechende Resultate gelten auch für zwei ausgezeichnete Randkomponenten.

H. P. Künzi.

**Ozawa, Mitsuru: Some classes of positive solutions of  $\Delta u = Pu$  on Riemann surfaces. II.** *Kōdai math. Sem. Reports* **7**, 15—20 (1955).

Verf. setzt seine früheren Untersuchungen (dies. *Zbl.* **57**, 65) fort, indem er den Dimensionsbegriff für die ideale Berandung sowie die Dimension einer Teilfläche einführt. In der Schlußbetrachtung wird ein Existenzbeweis für die Greensche Funktion auf den untersuchten Riemannschen Flächen im Sinne Myrbergs durchgeführt.

H. P. Künzi.

**Kuramochi, Zenjiro: On the existence of harmonic functions on Riemann surfaces.** *Osaka math. J.* **7**, 23—28 (1955).

In einer früheren Arbeit (dies. *Zbl.* **55**, 73) bewies H. J. Royden, daß sich die Flächenklassen  $O_{HD}$  oder  $O_{HDN}$  gegenüber bestimmten quasikonformen Abbildungen invariant verhalten. Verf. gibt für diese Aussage einen rein funktionentheoretischen Beweis und erweitert hierzu ein von L. Myrberg aufgestelltes Theorem über die Darstellung von harmonischen Funktionen auf abstrakt definierten Riemannschen Flächen, für welche  $D_F(U(p)) < \infty$ , mittels des Poissonschen Integrals.

H. P. Künzi.

**Kuramochi, Zenjiro: On the behaviour of analytic functions on abstract Riemann surfaces.** *Osaka math. J.* **7**, 109—127 (1955).

Es sei  $F'$  komplementär zur kompakten Belegung  $F_0$  bezüglich  $F$ . Verf. beweist die folgenden Beziehungen: Wenn  $F \notin O_G$  und  $\in O_{HB}$  ( $O_{HD} = O_{HBD}$ ), so ist  $F' \in O_{AB}$  ( $O_{AD}$ ). Weiter sei  $\{F_n\}$  eine Ausschöpfung von  $F$  und  $\omega_n(p)$  bedeute das harmonische Maß von der Berandung  $\partial F_n$ ;  $[\omega_n(p) = 0$  auf  $\partial F_0$  und 1 auf  $\partial F_n]$ . Mit  ${}^e C_n$  gibt Verf. die Niveaueurven von  $\omega_n(p)$  an, die aus einer Anzahl analytischer Kurvenbögen  ${}^e l_n^1, \dots, {}^e l_n^{k_n}$  bestehen, und setzt  $\Lambda^n(q) = \max_i {}^e L_n^i$ ;  $\left\{ {}^e L_n^i = \int_{e_n^i} \frac{\partial \omega_n}{\partial n} ds \right\}$ .

Mit dieser Festlegung beweist Verf. die Iversensche Aussage wie folgt: Wenn

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^{\varrho_n} \int_{\Lambda_n(q)} d\varrho_n = 0$ , so bedeckt jedes zusammenhängende Flächenstück von  $F$  über  $|w - w_0| < \varrho$  jeden Punkt, mit Ausnahme einer Nullmenge von  $E_{AB}$  ( $E_{AB}$  ist die Berandung eines Gebietes  $\in O_{AB}$ ). Pfluger zeigte früher unter einer entsprechenden Integralbedingung, daß  $F \in O_{AB}$ . Besonders hervorzuheben ist noch der Beweis des Satzes, daß eine Fläche, die zur Klasse  $O_{HP}$  gehört, nicht notwendigerweise die Großsche Eigenschaft besitzt.

H. P. Künzi.

**Yûjôbô, Zuiman:** Supplements to my paper: „On pseudo-regular functions“. Commentarii math. Univ. St. Pauli 4, 11—13 (1955).

In einer Originalarbeit (dies. Zbl. 51, 316) gibt Verf. u. a. Abschätzungen für die Bildlänge bestimmter Kurven bei vorgegebenen quasikonformen Abbildungen. Im vorliegenden Zusatzbericht werden die hierzu notwendigen Beweise näher ausgeführt und erläutert.

H. P. Künzi.

**Behnke, Heinrich:** Die analytischen Gebilde von holomorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen. Arch. der Math. 6, 353—368 (1955).

Exposé très clair et précis, avec abondante bibliographie, des progrès faits depuis 20 ans sur les points suivants: conditions de convexité nécessaire et suffisante pour qu'un domaine multivalent, mais localement univalent, soit domaine d'holomorphie (K. Oka); généralisation du théorème de Runge (H. Behnke); conditions de cohomologie nécessaires et suffisantes pour que le 2<sup>e</sup> théorème de Cousin soit vrai dans un domaine d'holomorphie donné (H. Cartan et J. P. Serre); théorie des faisceaux d'idéaux (H. Cartan); définition globale d'une variété analytique dans un domaine d'holomorphie  $G$ , comme lieu des zéros communs à un nombre fini de fonctions holomorphes sur  $G$  (H. Grauert); lien entre les définitions locale et globale d'un domaine d'holomorphie (K. Oka); théorie des fonctions dans les variétés de Stein (H. Cartan et J. P. Serre); réduction des axiomes nécessaires à la définition de ces variétés (H. Grauert); théorie des fonctions dans les domaines localement multivalents (H. Behnke, H. Cartan et K. Stein).

M. Hervé.

**Grauert, Hans:** Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. 129, 233—259 (1955).

Verf. untersucht komplexe Mannigfaltigkeiten mit hinreichend vielen holomorphen Funktionen, die sog. holomorph vollständigen Mannigfaltigkeiten (variétés de Stein); diese Mannigfaltigkeiten zeigen ein ähnliches Verhalten wie die nicht kompakten Riemannschen Flächen. Für die Letzteren bewies T. Radó [Acta Sci. math., Szeged 2, 101—121 (1925)], daß sie eine abzählbare Umgebungsbasis besitzen. Verf. erhält einen dem Radó'schen Satz analogen: in der Definition der holomorph vollständigen Mannigfaltigkeiten kann die Forderung einer abzählbaren Basis gestrichen werden. Im einzelnen wird gezeigt: sei  $\langle a \rangle$  die Menge der komplexen Räume  $M^n$  mit abzählbarer Umgebungsbasis, die holomorph separabel sind und für welche zu jedem  $x \in M^n$  endlich viele auf  $M^n$  holomorphe Funktionen existieren, die eine Umgebung von  $x$  normal einbetten, sei  $\langle b \rangle$  die Menge der komplexen Räume  $M^n$ , für welche zu jedem  $x \in M^n$  endlich viele auf  $M^n$  holomorphe Funktionen existieren, die eine Umgebung von  $x$  nirgends entartet abbilden, sei  $\langle c \rangle$  die Menge der komplexen



Räume  $M^n$ , die zu Riemannschen Gebieten über dem  $C^n$  analytisch äquivalent sind; dann gilt (als Verallgemeinerung des Radó'schen Satzes)  $\langle a \rangle \subset \langle b \rangle \subset \langle c \rangle \neq \langle a \rangle$ . Ist  $\langle h \rangle$  die Menge der holomorph-konvexen Räume, so gilt  $\langle a \rangle \cap \langle h \rangle = \langle c \rangle \cap \langle h \rangle$ . Bezüglich weiterer Einzelheiten muß auf die besprochene Arbeit verwiesen werden. Vgl. auch H. Cartan, Sem. Bourbaki, Mai 1955. H. Röhrl.

### **Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:**

Tsuiji, Masatsugu: A remark on my former paper „Theory of Fuchsian groups“. J. math. Soc. Japan **7**, 202—207 (1955).

L'A. remarque que, dans son mémoire cité (ce Zbl. **45**, 192), on pourrait établir  $N(r, a) = T(r) + O(1)$  pour  $a \in D_0(q)$ . Il donne ici une démonstration directe. J. Dufresnoy.

Newman, Morris: Structure theorems for modular subgroups. Duke math. J. **22**, 25—32 (1955).

Let  $G$  denote the modular group consisting of the integral 2-rowed square matrices of determinant unity. Let  $H$  be a subgroup of  $G$ . A meromorphic function invariant under  $H$  and regular in the upper-half  $\tau$  plane with at most polar singularities at the parabolic vertices of  $H$  is said to be a function on  $H$ . It is well-known (and the author proves it) that if  $H$  is of finite index in  $G$ , the functions on  $H$  are rational functions of two variables. A function on  $H$  is said to be maximal on  $H$  if it is not a function on any subgroup of  $G$  containing  $H$  properly. The author proves that if  $f$  is maximal on  $H$ ,  $J$  is the well-known modular invariant and  $H$  is of finite index in  $G$ , the functions on  $H$  are rational functions of  $J$  and  $f$ . The author considers special subgroups  $G(n)$  of matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  with  $c \equiv 0 \pmod{n}$ .  $G(n)$  is of finite index in  $G$ . Some theorems proved on  $G(n)$  are: If  $G(n) \supset H \supset G(m)$  then  $H$  is a  $G(dn)$  for some  $d|m$ . 2)  $J(\tau)$  and  $J(m\tau)$  form a rational base of functions on  $G(m)$ . K. G. Ramanathan.

Rademacher, Hans: On the transformation of  $\log \eta(\tau)$ . J. Indian math. Soc., n. Ser. **19**, 25—30 (1955).

Für  $0 < \text{Im } \tau$  und  $e^{\pi i \tau / 12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}) = \eta(\tau)$  konnte die besondere Transformation (1)  $\eta(\tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^{1/2} \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)$  bewiesen werden durch komplexe Integration über trigonometrische Integranden. Dieser von C. L. Siegel gegebene Beweisgedanke (dies. Zbl. **56**, 295) wird vom Verf. so ausgebaut, daß die allgemeine Modultransformation an Stelle von (1) tritt. Dazu setze man mit  $(h, k) = 1$   $z = h'k/k$  etwa  $\tau = (h + ir)/k$  und  $\tau' = h'/k + i/kz$  und scheide quadratische Restsymbole aus zugunsten der von Dedekind benutzten Summen

$$\sum_{\mu=1}^{k-1} \left(\frac{\mu}{k} - 1\right) \left(\frac{\mu h}{k} - \left[\frac{\mu h}{k}\right] - \frac{1}{2}\right) = s(h, k).$$

Zu beweisen bleibt dann

$$(2) \quad \sum_{g=1}^k \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} e^{-2\pi i g h' v / k} \frac{e^{-2\pi i g v / k z}}{1 - e^{-2\pi i v / z}} - \sum_{g=1}^k \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} e^{-2\pi i g h v / k} \frac{e^{-2\pi i g z v / k}}{1 - e^{-2\pi i v}} + \frac{\pi}{12k} \left(\frac{1}{z} - z\right) + \pi i s(h, k) + \frac{1}{12} \ln z = 0.$$

Um (2) als Residuensumme zu deuten, wird mit  $0 < g^* < k$ ;  $gh = g^*(k)$  und  $n = 1, 2, \dots$  der Integrand

$$\frac{i}{4} \coth \pi x \left(n + \frac{1}{2}\right) \cot \frac{\pi x(n + 1/2)}{z} + \sum_{g=1}^{k-1} \frac{e^{2\pi i g(n+1/2)/k}}{1 - e^{2\pi i g(n+1/2)}} \frac{e^{-2\pi i g^*(n+1/2)x/kz}}{1 - e^{-2\pi i g^*(n+1/2)x/z}} = f_n(x)$$

betrachtet, welcher bei geeigneter Umkreisung des Punktes  $x = 0$  für große  $n$  zu

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial \tau} \frac{dx}{x} f_n(x) = -\ln z$  führt, und mit (2) und  $h h' = -1 + k l$  die Bestimmung von  $\eta [(\tau h' - l)/(\tau k - h)]$  liefert. Da Herrn Siegels Leitmotiv andererseits auch die besondere Transformation der ungeraden elliptischen Theta-Funktion ergibt, nämlich

$$\vartheta_1(r, \tau) = i \sqrt{i/\tau} e^{\pi i z^2/\tau} \vartheta_1(z/\tau, -1/\tau),$$

erscheint auch die allgemeine lineare Transformation der elliptischen  $\vartheta(z, \tau)$  dem neuen Beweisverfahren zugänglich. W. Maier.

**Koecher, Max:** Zur Theorie der Modulformen  $n$ -ten Grades. II. Math. Z. 61, 455—466 (1955).

Bezüglich der Bezeichnungen und Definitionen s. Ref. von Teil I (dies. Zbl. 55, 77). Gegenstand der Untersuchung ist die Übertragung der Petersson'schen Metrisierung der Modulformen auf Formen einer Kongruenzgruppe  $K$  in  $\Sigma_n$ . Verf. nennt eine Form  $f(\mathfrak{z}) \in \{K; k, v\}$  eine Spitzenform, wenn für alle rationalen  $\Re \in \Sigma_n$  die Beziehung  $f(\mathfrak{z})|_{\Re} \Phi = 0$  gilt, wobei allgemein  $g(\mathfrak{z})|_{\Phi} = \lim_{y \rightarrow \infty} g \begin{pmatrix} 3_1 & 0 \\ 0 & i y \end{pmatrix}$  mit

$\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} 3_1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$  ist. Im Falle der Modulgruppe  $M_n$  deckt sich diese Definition mit der üblichen. Es sei  $F(K)$  ein Fundamentalbereich von  $K$  im Bereich  $\mathfrak{Y} > 0$  ( $\mathfrak{z} = \mathfrak{X} + i \mathfrak{Y}$ ) und  $V(K)$  sein Volumen. Dann wird für  $f, g \in \{K; k, v\}$  durch  $(f, g) = (V(K))^{-1} \int_{F(K)} f(\mathfrak{z}) g(\mathfrak{z}) |\mathfrak{Y}|^{-n-1} d\mathfrak{X} d\mathfrak{Y}$  ein Skalarprodukt definiert, falls  $f$  oder  $g$  Spitzenform ist. Im Bereich der Spitzenformen vom Typus  $\{K; k, v\}$  wird durch  $(f, g)$  eine positive hermitesche Metrik erklärt. H. Maaß.

**Braun, Hel:** Der Basissatz für hermitesche Modulformen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 19, 134—148 (1955).

Es sei  $Z = Z^{(n)}$  eine Matrix mit  $n^2$  variablen Elementen,  $Z = X + i Y$ ,  $\tilde{X} = X$ ,  $\tilde{Y} = Y$  mit der Bezeichnung  $\tilde{Z} = Z'$ . Weiter sei  $\mathfrak{R}$  ein imaginär-quadratischer Zahlkörper,  $\mathfrak{R}_n$  die Gruppe der hermiteschen symplektischen Matrizen  $n$ -ten Grades über  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{S}_n$  die hermitesche Modulgruppe  $n$ -ten Grades in  $\mathfrak{R}_n$  (s. Braun, dies. Zbl. 38, 238, 239; 41, 416),  $\mathfrak{S}_n(q)$  die Hauptkongruenzuntergruppe von  $\mathfrak{S}_n$  zur Stufe  $q$  (= natürliche Zahl) und  $\mathfrak{G}$  eine Kongruenzgruppe mod  $q$ , d. h. eine solche, für die  $\mathfrak{S}_n(q) \subset \mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}_n$ ,  $(\mathfrak{G}; \mathfrak{S}_n(q))$  endlich ist.  $v(M)$  bezeichne ein Multiplikatorsystem zur Gruppe  $\mathfrak{G}$  mit  $v(M) = 1$  für  $M \in \mathfrak{S}_n(q)$ . Allgemein werde  $f(Z)|_M = f(AZ + B)(CZ + D)^{-1}|CZ + D|^k$  für  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}_n$  gesetzt. Der Fall  $n = 1$  führt auf die gewöhnliche Modulgruppe und kann daher bei der Begründung der Formentheorie ausgeschlossen werden. Im Falle  $n > 1$ , auf den sich alles Folgende bezieht, lassen sich Koechersche Ideen (dies. Zbl. 55, 77) fruchtbar verwenden. Mit  $\{\mathfrak{G}; k, v\}$  bezeichne man die lineare Schar der Funktionen  $f(Z)$ , die in  $Y > 0$  reguläre Funktionen der  $n^2$  Elemente von  $Z$  sind und der Transformationsformel  $f(Z)|_M = v(M) f(Z)$  für  $M \in \mathfrak{G}$  genügen. Es zeigt sich dann, daß  $f(Z)|_R$  in  $Y - \gamma E \geq 0$  beschränkt ist, wenn  $f(Z) \in \{\mathfrak{G}; k, v\}$ ,  $R \in \mathfrak{R}_n$ ,  $\gamma > 0$ ,  $E$  = Einheitsmatrix. Hieraus folgt, daß jede Form  $f(Z) \in \{\mathfrak{S}_n; k, 1\}$  im Fundamentalbereich der hermiteschen Modulgruppe beschränkt ist. Sei  $f(Z) = \sum_T a(T) \exp 2\pi i \sigma(TZ)$  die

Fourierentwicklung einer Modulform  $f(Z) \in \{\mathfrak{S}_n; k, 1\}$  ( $\sigma$  = Spur). Es genügt die Summation über solche hermiteschen halbganzen  $T$  zu erstrecken, die  $\geq 0$  sind. Es gibt dann eine nur von  $n$  und  $\mathfrak{R}$  abhängige Konstante  $\sigma_n$ , so daß aus  $a(T) = 0$  für  $\sigma(T) \leq -k \sigma_n$  das identische Verschwinden von  $f(Z)$  folgt. Um dies mit vollständiger Induktion nach  $n$  beweisen zu können, ist es notwendig, einen analogen Sachverhalt für die Formenklassen  $\{\mathfrak{G}; k, v\}$  zu beweisen, sofern die Klassenzahl von  $\mathfrak{R}$  größer als 1 ist. In der Funktionentheorie zur Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  sind also die Kon-

gruengruppen ein unentbehrliches Hilfsmittel. Da  $a(\tilde{U}TU) = a(T)$  für unimodulare  $U$  gilt, so folgt  $f(Z) = 0$  bereits aus dem Verschwinden endlich vieler Fourierkoeffizienten. Mithin hat  $\{\mathfrak{S}_n; k, 1\}$  endlichen Rang. Das ist der Basissatz.  
H. Maaß.

**Becker, Hugo:** Poincarésche Reihen zur hermiteschen Modulgruppe. Math. Ann. 129, 187—208 (1955).

Verf. führt Poincarésche Reihen zu Kongruenzgruppen  $\mathfrak{G}$  der hermitesch-symplektischen Gruppe  $n$ -ten Grades eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers ein:

$$g_k(Z, F) = \sum_{M \in \mathfrak{G}} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(FM\langle Z \rangle)} v^{-1}(M) |CZ + D|^{-k},$$

mit natürlichem  $k$ ,  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ,  $M\langle Z \rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ . Dabei ist  $Z$  eine variable,  $n$ -reihige, komplexe Matrix mit  $i(\bar{Z}' - Z) > 0$ ;  $F \geq 0$  ist eine feste  $n$ -reihige hermitesche Matrix, für welche  $\operatorname{Sp}(FH)$  ganz ist für alle  $\begin{pmatrix} E & H \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}$ ;  $v(M)$  bedeutet den Multiplikator zu  $M$ . Unter den Summenzeichen soll  $M \in \mathfrak{G}$  bedeuten, daß  $M$  ein volles System von Elementen aus  $\mathfrak{G}$  durchläuft, für welche die Reihenglieder verschieden sind. Die Reihen  $g_k(Z, F)$  sind analog gebildet zu den von Maaß eingeführten Poincaréschen Reihen zur Modulgruppe  $n$ -ten Grades (dies. Zbl. 42, 320). Daß man sich im hermiteschen Fall nicht auf die Modulgruppe beschränken kann, wurde vom Ref. gezeigt (vgl. vorsteh. Referat). Verf. beweist die Konvergenz der  $g_k(Z, F)$  für  $k > \operatorname{Min}(4n - 2, 2(n + s))$ , wenn  $s$  der Rang von  $F$  ist, ferner deren Transformationseigenschaften. Der Übergang von Reihen  $g_k(Z, F)$  zu solchen  $(n - 1)$ -ten Grades durch Anwendung der von Siegel eingeführten Methode (dies. Zbl. 21, 203) wird vom Verf. angegeben. Die Überlegungen reichen jedoch nicht aus um zu zeigen, daß sich alle Modulformen zu  $\mathfrak{G}$ , dem Multiplikatorsystem  $v(M)$  und dem Exponenten  $k$  linear aus Poincaréschen Reihen kombinieren lassen.  
H. Braun.

**Matsushita, Shin-ichi:** Fonctions presque périodiques du type spécial. I. Proc. Japan Acad. 31, 70—75 (1955).

Soient  $G$  un groupe abélien localement compact,  $\hat{G}$  son dual,  $\mathfrak{M}$  l'espace des mesures sur  $\hat{G}$ ,  $\mathfrak{B}'$  l'espace des distributions bornées sur  $G$  (pour  $G = \mathbb{R}^n$ ). L'A. étudie les fonctions presque-périodiques sur  $G$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}$  ou  $\mathfrak{B}'$ .  
J. Dixmier.

**Matsushita, Shin-ichi:** Fonctions presque périodiques du type spécial. II-IV. Proc. Japan Acad. 31, 156—160, 214—219, 278—283 (1955).

Suite d'un article antérieur (v. la récénsion précédente). Soient  $G$  un groupe localement compact,  $V_0$  l'ensemble localement compact des fonctions élémentaires sur  $G$  et de leurs limites faibles non nulles,  $\mathfrak{M}$  l'espace des mesures de Radon sur  $V_0$ ,  $\mathfrak{A}(G)$  l'espace des fonctions presque-périodiques sur  $G$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}$ . L'A. étudie, pour les éléments de  $\mathfrak{A}(G)$ , la valeur moyenne, les coefficients de Fourier, et les sous-espaces vectoriels fermés de  $\mathfrak{A}(G)$  invariants par les translations bilatères de  $G$ . Soient  $\varphi_0 \in V_0$  et  $x \rightarrow (D_{ij}(x))$  une représentation matricielle unitaire de  $G$ . L'A. étudie la représentation unitaire de  $G$  définie par la fonction  $x \rightarrow \sum_i D_{ii}(x) \varphi_0(x)$ .  
J. Dixmier.

### Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

• Dini, Ulisse: Opere a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. III: Equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali. Roma: Edizioni Cremonese 1955. 661 p. L. 6000,—.  
(Band I, dies. Zbl. 51, 1; Band II, dies. Zbl. 56, 2.) Der dritte abschließende Band enthält 6 Arbeiten Dinis über die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen.



gen beliebiger Ordnung im reellen Gebiet (eingeleitet von G. Sansone) und seine Beiträge zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (eingeleitet von M. Picone).  
O. Volk.

● **Ford, Lester R.: Differential equations.** 2nd edition. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1955. XII, 291 p. 46 Fig. 37 s 6d.

La prima edizione di questo volume è del 1933 e risulta di pp. X + 264, con 37 fig.: questa seconda edizione si è ora accresciuta di 27 pag. riguardanti l'equazione di Eulero, l'applicazione della trasformazione di Laplace alla risoluzione delle equazioni lineari, i polinomi di Legendre, il metodo di Runge-Kutta e quello delle differenze finite per la risoluzione numerica delle equazioni, lo studio delle vibrazioni forzate, il moto di una particella nel caso di forze centrali e le orbite dei pianeti. Il volume fornisce ai giovani di un primo biennio universitario iscritti ai corsi per la laurea in matematica o in fisica un primo orientamento per un corso più approfondito nella materia ed ai giovani che proseguiranno poi i loro studi nelle scuole di Ingegneria un'esposizione chiara e semplice di alcuni metodi di uso frequente nelle applicazioni.  
G. Sansone.

● **Coddington, Earl A. and Norman Levinson: Theory of ordinary differential equations.** New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1955. XII, 429 p. 64 s.

Mit dem vorliegenden Buch ist die umfangreiche Literatur über gewöhnliche Differentialgleichungen um ein wertvolles und originelles Werk bereichert worden. Schon beim ersten Durchblättern erkennt man, daß es sich nicht um eine mehr oder weniger getreue Kopie seiner Vorgänger handelt, sondern es finden die modernen Methoden und Gesichtspunkte gebührende Berücksichtigung. Die Kapitel 1—5 beschäftigen sich mit der Existenz der Lösungen von Differentialgleichungssystemen und ihrem Verhalten in der Umgebung singulärer Punkte. Interessant scheint hier dem Ref. die ausgiebige Benutzung von „formalen Lösungen“. Kapitel 6 behandelt das asymptotische Verhalten der Lösungen von Differentialsystemen, die einen großen Parameter enthalten (allerdings ohne „transition regions“). In den Kapiteln 7—12 kommt dann das erste Hauptthema zur Sprache: Rand- und Eigenwertprobleme. Es ist dies wohl die erste Darstellung, in der nicht nur die singulären Randwertprobleme (auch höherer Ordnung), sondern auch nicht selbstadjungierte Probleme eingehend besprochen werden. Die Kapitel 13—16 bringen dann das zweite Hauptthema: die in neuerer Zeit immer mehr an Bedeutung gewinnenden nichtlinearen Systeme. Auch hier finden sich viele neue, auf die Autoren des Buches selbst zurückgehende Ergebnisse. Das Werk schließt mit dem Kapitel 17 über Differentialgleichungen auf dem Torus. Jedem Kapitel ist eine Reihe von „problems“ mit ausführlichen Lösungshinweisen angefügt. Trotz des Kleindrucks, in dem diese Aufgaben erscheinen, empfiehlt der Ref. dringend, sie nicht zu überlesen, da sie wichtige Ergänzungen zum Text enthalten.  
F. Penzlin.

**Pagni, Mauro: Equazioni differenziali lineari e problemi al contorno con condizioni integrali.** Rend. Sem. mat. Univ. Padova 24, 245—264 (1955).

Verf. wendet ein von G. Fichera (Lezioni sulle Trasformazioni Lineari, vol. I, Trieste 1954) ausgesprochenes „Alternativprinzip“ insbesondere auf folgendes Randwertproblem an:  $E(u) = u'$  im Gebiet  $A$ ,  $L_h(u) = 0$  ( $h = 1, \dots, \nu$ ) auf dem Rand  $FA$  mit den Integralbedingungen  $\int_A u \alpha_k d\tau = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ), wobei  $E(u)$ ,  $L_h(u)$  lineare Differentialoperatoren der Ordnung  $n$  bzw. höchstens  $n - 1$  mit Faktoren aus wohl definierten Klassen und  $u'$  sowie die  $\alpha_k$  stetige, in  $A$  summierbare Funktionen sind. Wenn dann für das Problem ohne Integralbedingungen und das dazu adjungierte System ein „Alternativtheorem“ besteht, so gilt ein solches auch für das Problem mit Integralbedingungen; d. h. dieses ist für jedes  $u'$  dann und nur dann lösbar, wenn ein passend definiertes adjungiertes System keine Eigenlösungen

besitzt, während bei Vorhandensein derartiger Eigenlösungen Lösbarkeit dann und nur dann vorliegt, wenn  $u'$  einer Orthogonalbedingung genügt. *M. J. De Schwarz.*

**Anke, Klaus:** Eine neue Berechnungsmethode der quadratischen Regelfläche. *Z. angew. Math. Phys.* **6**, 327—331 (1955).

Ist  $x(t)$  die Lösung einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten und vorgegebenen Anfangsbedingungen, und genügen die Koeffizienten der bekannten Hurwitzschen Stabilitätsbedingung,

dann läßt sich das als „quadratische Regelfläche“ bezeichnete Integral  $\int_0^{\infty} [x(t)]^2 dt$

auch ohne explizite Kenntnis der Lösung  $x(t)$  allein aus den Anfangsbedingungen und den Koeffizienten der Differentialgleichung auf ganz elementare Weise durch Auflösung eines linearen Gleichungssystems berechnen. Die quadratische Regelfläche wird vielfach bei der Untersuchung linear stetiger Regelungen als Gütemaß für die dynamische Regelabweichung  $x(t)$  verwendet, wobei diejenige Regelabweichung als optimal angesehen wird, für die durch geeignete Wahl der verfügbaren Koeffizienten die quadratische Regelfläche zum Minimum wird.

*St. Schottlaender.*

**Godeaux, Lucien:** Sur une équation différentielle linéaire. *Mathesis* **64**, 81—87 (1955).

Es wird die, schon von anderen behandelte Differentialgleichung

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p x^p y^{(n-p)} = 0$$

betrachtet. Sie läßt sich durch die Substitution  $y = z e^{-ax^{1/2}}$  in eine Differentialgleichung überführen, deren Koeffizienten Konstante sind. Ist  $n$  eine gerade Zahl, so ist auch die transformierte Gleichung  $n$ -ter Ordnung; ist aber  $n$  ungerade, so mindert sich die Ordnung der transformierten Gleichung auf  $n-1$ . Auch die explizite Form der linear unabhängigen Lösungen wird angegeben. Die Behandlung des Problems ist sehr einfach.

*St. Fenyő.*

**Dobrotin, D. A.:** Einige Formeln für rein erzwungene Lösungen linearer Differentialgleichungen. *Vestnik Leningradsk. Univ.* **10**, Nr. 5 (Ser. mat. fiz. chim. Nr. 2) 45—48 (1955) [Russisch].

The author proves the classical result: If all zeros of  $L(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  have real parts  $\leq -k < 0$  then the solution  $y(x)$  of  $L(D)y = f(x)$  which vanishes at zero together with its first  $n-1$  derivatives satisfies

$$|y(x)| < \int_0^x [(x-t)^{n-1}/(n-1)!] e^{-k(x-t)} |f(t)| dt \text{ for } x > 0.$$

*H. A. Antosiewicz.*

**Mikusiński, J.:** Sur l'équation  $x^{(n)} + A(t)x = 0$ . *Ann. Polon. Math.* **1**, 207—221 (1955).

Sia  $A(t)$  una funzione continua, non negativa, nell'intervallo  $\alpha \leq t \leq \beta$  e sia  $x_i(t)$  quella soluzione dell'equazione  $(') x^{(n)} + A(t)x = 0$  tale che  $x_i^{(j)}(\alpha) = 0$  per  $i \neq j$ ,  $= 1$  per  $i = j$ . Le  $x_0, \dots, x_{n-1}$  costituiscono un sistema fondamentale della  $(')$  e  $x_i(t)$  ha uno zero di ordine  $i$  nel punto  $\alpha$  ed è positiva in un intorno destro di  $\alpha$ . L'A. dimostra le disuguaglianze  $x_p(t)x'_q(t) - x_q(t)x'_p(t) > 0$ ,  $p < q$  valide in  $\alpha < t \leq \beta$  e da queste deduce che a) se  $x_i$  ha in  $\alpha < t \leq \beta$  degli zeri questi sono semplici e nessuno di essi è uno zero di  $x_j$ ,  $i \neq j$ ; b) se  $t_1$  e  $t_2$ ,  $\alpha < t_1 < t_2 \leq \beta$  sono due zeri consecutivi di  $x_i$ , tra  $t_1$  e  $t_2$  esiste uno ed un solo zero di ogni  $x_j$ ,  $j \neq i$ ; c) se  $x_i$  è positiva in  $\alpha < t < \beta$ , ogni altra  $x_j$ , con  $j > i$  è positiva in  $\alpha < t \leq \beta$ . Seguono alcuni teoremi di esistenza di soluzioni della  $(')$  passanti per punti assegnati ed un teorema relativo alla disequazione  $x^{(n)} + A(t)x > 0$ , dal quale l'A. deduce due teoremi di confronto fra le soluzioni di  $(')$  e quelle di

$z^{(n)} + B(t)z = 0$ , nell'ipotesi  $B(t) < A(t)$ . Gli ultimi due paragrafi del lavoro riguardano l'estensione al caso  $n = 3$  ed  $n = 4$  di classici teoremi di Sturm validi per  $n = 2$ . R. Conti.

**Barrett, J. H.:** Behavior of solutions of second order self-adjoint differential equations. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 247—251 (1955).

Auf die Differentialgleichung  $(r y')' + q y = 0$  wird die modifizierte Polar-koordinatentransformation  $y(x) = \varrho(x) \sin \theta(x)$ ,  $y'(x) = (w(x)/r(x)) \varrho(x) \cos \theta(x)$  angewandt. Sie liefert Schranken für Lösungen der Differentialgleichung, die sich als Verallgemeinerungen von Resultaten von Levinson und Leighton erweisen. Ferner werden hinreichende Bedingungen für die Oszillation der Lösungen hergeleitet und mit notwendigen Bedingungen von Leighton verglichen. Auch Resultate bezüglich des asymptotischen Verhaltens der Lösungen werden mit derselben Methode erhalten. F. W. Schäfke.

**Krickeberg, Klaus:** Über die asymptotische Darstellung der Aufspaltung von Paaren benachbarter Eigenwerte der Differentialgleichung der Sphäroidfunktionen. Z. angew. Math. Phys. **6**, 235—239 (1955).

Verf. betrachtet für die Eigenwerte  $\lambda_n^m(\gamma^2)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $n = m, m+1, \dots$ ) der Sphäroiddifferentialgleichung

$$[(1-z^2)y']' + [\lambda + \gamma^2(1-z^2) - m^2/(1-z^2)]y = 0$$

das Verhalten der Differenzen  $\Delta \lambda = \lambda_{m+2p+1}^m - \lambda_{m+2p}^m$  bei  $\gamma^2 \rightarrow -\infty$ . Die bei Meixner und Schäfke angegebene asymptotische Formel wird durch ein weiteres Glied ergänzt. F. W. Schäfke.

**Merwe, J. H. van der:** Some properties of a certain linear second order differential equation. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. **3**, 65—71 (1955).

Mit reeller Funktion  $q(x)$ , die in  $0 < x \leq a$  stetig ist, und komplexem Parameter  $\lambda$  wird die Differentialgleichung (1)  $y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) = 0$  betrachtet. Verf. verallgemeinert Kriterien von Sears, indem er beweist: 1. Sei  $\lambda = u + i v$ , für kleine  $x$  gelte  $q(x) \geq \mu''(x)/\mu(x) - \sigma(x)$  mit Funktionen  $\mu(x), \sigma(x)$  mit der Eigenschaft  $\sigma(x) + u > 0, \mu(x) > 0, \mu'(x) < 0, x(\sigma(x) + u)\mu^2(x) + \mu(x)\mu'(x) \leq 0$ .

Dann existiert eine Lösung  $\varphi(x)$  von (1) mit  $|\varphi(t)| \geq \text{const } \mu(t) \exp \left\{ - \int_t^b x \sigma(x) dx \right\}$  ( $0 < t < b < a$ ) für kleine  $t$ . 2. Für kleine  $x$  gelte  $|q(x)| < \mu''(x)/\mu(x) + \sigma(x)$  mit  $\mu(x) > 0, \mu'(x) < 0$  und  $x\sigma(x) \in L(t, a)$  ( $0 < t < a$ ). Dann gilt für jede Lösung  $y(x)$  von (1)

$$|y(t)| \leq \text{const. } \mu(t) \exp \left\{ \int_t^b x \sigma(x) dx \right\} \quad (t < b)$$

mit einem  $b$  derart, daß  $\mu(x) > 0, \mu'(x) < 0$  in  $0 < x < b$ . F. W. Schäfke.

**Nikolenko, L. D.:** Zur Frage der Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung  $y'' + p(x)y = 0$ . Ukrain. mat. Žurn. **7**, 124—127 (1955) [Russisch].

A. Wintner (this Zbl. **43**, 87) and afterwards E. Gagliardo (this Zbl. **51**, 320)

proved that if  $B(x) = p(x) - (4x^2)^{-1} \geq 0, \int x B(x) dx = \infty$ , any solution of  $y'' + p y = 0$  is oscillatory. The author proves that if  $\varphi(x) = B$  when  $B \geq 0, \varphi(x) = 0$  when  $B < 0, \int x \varphi(x) \log x dx = \infty$  is necessary in order that there be oscillatory solutions. J. L. Massera.

**Hartman, Philip and Aurel Wintner:** On the assignment of asymptotic values for the solutions of linear differential equations of second order. Amer. J. Math. **77**, 475—483 (1955).

In der Differentialgleichung (1)  $x'' + g(t)x' + f(t)x = 0$  seien die Koeffizienten für große positive  $t$  stetig. (1) heiße vom Typ (\*), wenn es zu jedem  $c$  genau eine Lösung  $x(t)$  mit  $x(t) \rightarrow c$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) gibt, und vom Typ (\*\*), wenn für alle



Lösungen der endliche Grenzwert  $x(\infty)$  existiert und nicht für alle 0 ist. — 1. (1) ist vom Typ (\*), wenn  $\int_0^\infty t |f(t)| dt < \infty$  und  $g(t) \leq 0$ , oder wenn  $\int_0^\infty |f(t)| dt < \infty$  und  $g(t) \leq \text{const.} < 0$ . 2. (1) ist vom Typ (\*\*), wenn  $\int_0^\infty |f(t)| dt < \infty$ ,  $\text{Re } g(t) \geq \text{const.} > 0$ . — 3. In der Differentialgleichung (2)  $z'' + f(t)z = 0$  sei für  $0 \leq t < \infty$   $f(t)$  komplexwertig stetig mit nicht-positivem Realteil. Dann hat (2) eine Lösung  $z(t) \neq 0$ , für die  $|z(t)|^2$  in  $0 \leq t < \infty$  nicht-wachsend und konvex ist, während für jede davon linear unabhängige Lösung  $z = w(t)$  gilt  $|w(t)| \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ). — Ein Anhang betrachtet nicht-oszillatorische Differentialgleichungen (3)  $x'' + f(t)x = 0$  mit reellem stetigen  $f(t)$  für große positive  $t$ , und zwar ihre Lösungen  $x(t) \neq 0$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) daraufhin, ob  $1/x(t)$  zu  $L^2(t_0, \infty)$  gehört oder nicht (non-principal bzw. principal): es existiert stets eine, bis auf Faktor eindeutig bestimmte, der zweiten Art. — *F. W. Schäfke.*

**Moser, Jürgen:** Singular perturbation of eigenvalue problems for linear differential equations of even order. Commun. pure appl. Math. 8, 251—278 (1955).

Die Arbeit beschäftigt sich mit Eigenwertproblemen der Gestalt

$$(P + \varepsilon Q)u = \lambda u \text{ mit } Pu = \sum_{k=1}^{2m} p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k}, \quad Qu = \sum_{k=1}^{2n} q_k(x) \frac{d^k u}{dx^k}.$$

Die Randbedingungen seien in der Normalform

$$\begin{aligned} A_r u &= u^{(\alpha_r)}(a) + \sum_{s < \alpha_r} a_{rs} u^{(s)}(a) = 0, \\ B_r u &= u^{(\beta_r)}(b) + \sum_{s < \beta_r} b_{rs} u^{(s)}(b) = 0, \end{aligned} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

mit  $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 2n$ ;  $0 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < 2n$  gegeben. Unter der Annahme  $n > m$  sind die Eigenwerte  $\lambda(\varepsilon)$  nicht mehr reguläre Potenzreihen in der Umgebung von  $\varepsilon = 0$ . Es wird u. a. gezeigt: Wenn  $\lambda = \lambda_0$  ein einfacher Eigenwert ist und die Relationen

$$\alpha_r \not\equiv \alpha_s \pmod{2(n-m)}, \quad \beta_r \not\equiv \beta_s \pmod{2(n-m)} \quad \text{für } r \neq s; \quad r, s = m+1, \dots, n$$

erfüllt sind, dann gibt es für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  in einer Umgebung von  $\lambda = \lambda_0$  einen eindeutig bestimmten Eigenwert  $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ , der sich in der Form  $\lambda = \lambda_0 + \eta \lambda_1 + \dots + \eta^\sigma \lambda_\sigma + \eta^{\sigma+1} A_\sigma(\eta)$ ,  $|A_\sigma(\eta)| \leq c_\sigma$  mit  $\eta = \varepsilon^{1/2(n-m)}$  darstellen läßt. *E. Heinz.*

**Mitrinovitsh, D. S.:** Sur une équation différentielle du premier ordre. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 58, 2. Abtlg. S. 1 (1955).

$$\text{Intégration par quadratures de l'équation } y'^k + \alpha x y^{n-1} y' + \beta y^n = 0.$$

*Ch. Blanc.*

**Mitrinovitsh, Dragoslav:** Sur l'équation différentielle d'Emden généralisée. C. r. Acad. Sci., Paris 241, 724—726 (1955).

L'A. mostra che l'equazione  $f(x)y'' + g(x)y' + a y^n = 0$ ,  $a$  ed  $n$  entrambi costanti, nel caso che  $f$  e  $g$  abbiano le espressioni  $f(x) = h^{n+1} h'^{-2} (B h^2 - A)$ ,  $g(x) = A h^n (h')^{-1} - h^{n+1} h'' (h')^{-3} (B h^2 - A)$ , con  $A$  e  $B$  costanti,  $h'(x)$  continua e diversa da zero, si integra con procedimenti elementari. *G. Sansone.*

**Sansone, G. ed R. Conti:** Sull'equazione di T. Uno ed R. Yokomi. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 38, 205—212 (1955).

Gli AA., nel n. 2 di questa Nota, danno un'altra dimostrazione per un teorema di unicITÀ, indicato, ma insufficientemente dimostrato, in una Memoria intitolata come la Nota attuale ed inserita nella stessa rivista (questo Zbl. 56, 89).

*G. Scorza Dragoni.*

**Atkinson, F. V.:** On asymptotically linear second-order oscillations. J. rat. Mech. Analysis 4, 769—793 (1955).

Verf. betrachtet die reelle Differentialgleichung  $\ddot{x} + x F(x, t) = 0$  mit

$F(x, t) \rightarrow 1$  für  $t \rightarrow \infty$  und gewinnt unter geeigneten Glattheitsvoraussetzungen über  $F(x, t)$  für die — dann immer vorhandenen — beschränkten Lösungen  $x(t)$  asymptotische Darstellungen  $x = A \cos \left( \int_{t_0}^t \omega dt + B \right) + o(1)$ , in denen  $A, B$  Konstante sind und  $\omega$  von  $t$  und  $A$  abhängt. F. W. Schäfke.

**Furuya, Shigeru:** Periodic solutions of the van der Pol-Mathieu equation. *Commentarii math. Univ. Sancti Pauli* **3**, 109—113 (1955).

Verf. betrachtet die Differentialgleichung  $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t)$ , in der  $f$  als analytisch in  $x, \dot{x}, t$  und als  $2\pi$ -periodisch in  $t$ ,  $\mu$  als kleiner Parameter angenommen wird. Er erhält Stabilitätskriterien für die  $2\pi$ -periodischen Lösungen. Auch der Fall, daß  $f$  in  $t$  die Periode  $2\pi/\omega$  mit  $\omega \neq 1$  hat, und die Lösungen derselben Periode werden diskutiert. Die Resultate werden mit  $e = \mu E$ ,  $a = \mu A$ ,  $c = \mu C$  auf die van-der-Pol-Mathieu-Differentialgleichung

$$\ddot{x} + e(x^2 - 1)\dot{x} + [1 + (a - c)x^2] \cos 2t] x = 0$$

und die durch Ersetzung von  $\cos 2t$  durch  $\cos \omega t$  entstehende Gleichung angewandt und damit Ergebnisse von N. Minorsky [*J. Franklin Inst.* **256**, 147—165 (1953)] ergänzt. F. W. Schäfke.

**Minorsky, Nicolas:** Sur l'espace paramétrique de l'équation de M. Liénard. *C. r. Acad. Sci., Paris* **240**, 1508—1509 (1955).

In der Gleichung  $\ddot{x} + (a + cx^2 + ex^4)\dot{x} + x = 0$  seien  $a, c, e$  kleine Größen gleicher Größenordnung und  $e > 0$ . Mit  $\varrho = x^2 + \dot{x}^2 = \sum_{v=0}^{\infty} \mu^v \varrho_v(t)$ ,  $a = A\mu$ ,  $c = C\mu$ ,  $e = E\mu$ ,  $C = pE$ ,  $A = qE$  folgt  $d\varrho/d\tau = -\sigma\varrho(\varrho^2 + 2p\varrho + 8q)$ . Für Gleichgewichtslagen und Stabilitätsverhalten sind die positiven Wurzeln des hier auftretenden quadratischen Polynoms in  $\varrho$  entscheidend. Ist ihre Anzahl 2, 1 oder 0, so heißt das System bizyklisch (Symbol SIS: Stabiler Punkt, umgeben von instabilem Zykel, dieser wieder umgeben von stabilem Zykel) bzw. monozyklisch (Symbol IS), bzw. azyklisch (Symbol S). In dem  $(A, C, E)$ -Parameterraum mit  $E > 0$  hat man eine Einteilung durch die Ebenen  $C = 0$ ,  $A = 0$  und die Fläche  $C^2 = 8AE$ . Z. B. tritt bei  $C < 0$ ,  $A > 0$  für  $C^2 > 8AE$  die Art SIS und für  $C^2 < 8AE$  die Art S auf. Verf. untersucht die Übergänge zwischen den verschiedenen Bereichen.

L. Collatz.

**Taam, Choy-Tak:** Criteria of boundedness of the solutions of nonlinear differential equations. *Proc. Amer. math. Soc.* **6**, 377—385 (1955).

The author proves the following main results. I. If  $r p_i > 0$ ,  $a \leq x < +\infty$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; if  $(r p_i)^{-1} \min [0, (r p_i)']$  is  $L$ -integrable in  $[a, +\infty)$  for some  $i = k$ , and  $(r p_i)^{-1} \max [0, (r p_i)']$  is  $L$ -integrable in  $[a, +\infty)$  for all  $i \neq k$ , then every solution of  $(r(x) y')' + \sum_{i=1}^n p_i(x) y^{2i-1} = 0$  is bounded in  $0 \leq x < +\infty$ . II. If  $(r p_i)'$  is  $L$ -integrable in  $[a, +\infty)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , if  $r p_n \geq m > 0$  in  $[a, +\infty)$ , then for every solution of  $(r(x) y')' + \sum_{i=1}^n p_i(x) y^i = 0$  both  $y$  and  $r y'$  are bounded in  $[a, +\infty)$ . These results improve previous results of Z. Butlewski, this Zbl. **24**, 34. L. Cesari.

**Petrovskij, I. G. und E. M. Landis:** Über die Anzahl der Grenzzyklen der Gleichung  $dy/dx = M(x, y)/N(x, y)$ , wo  $M$  und  $N$  Polynome zweiten Grades sind. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **102**, 29—32 (1955) [Russisch].

This paper contains a sketchy proof of the following statement: there are at most 3 limit cycles. It is known that this bound is best possible (N. N. Bautin, this Zbl. **46**, 94). J. L. Massera.

**Čečík, V. A.:** Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Semistabilität eines Grenzzykels. *Uspechi mat. Nauk* **10**, Nr. 1 (63), 183—187 (1955) [Russisch].

Let  $C$  be a closed trajectory of  $dy/dx = f(x, y)$ .  $\int_C (f_x - f_y) (1 + f^2)^{-1} ds = 0$  is a necessary condition for the semi-stability of  $C$ . In the case  $f_x - f_y = 0$ , the inequality  $\int_C (f_x f_y + f f_{xy} - f_{yy}) (1 + f^2)^{-1} ds \neq 0$  is a sufficient condition.

J. L. Massera.

**Hukuhara, Masuo:** Sur les polygones caractéristiques et le procédé de réduction au point singulier fixe  $\xi$  d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Proc. Japan Acad. **31**, 195—198 (1955).

The author deals with the behaviour of the differential equation  $x^{\sigma+1} dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$  ( $\sigma \geq 0$ ) near  $x = 0$ . Certain conditions concerning  $P(x, y) = \sum_{j=0}^r a_j(x) y^j$ ,  $Q(x, y) = \sum_{k=1}^{r-1} b_k(x) y^{k-1}$ ,  $a_j(x)$  and  $b_k(x)$  are given. He uses a construction of two characteristic polygons introduced by him [„Kansū-hoteisiki“ (Equations Fonctionnelles) **1—3, 5, 6, 8—13, 15, 17** (1938—40); Ōyo Sugaku (Mathématiques appliquées) **1**, 46—90 (1945)], whose vertices depend upon the index and the highest power of  $x$  in  $a_j(x)$  and  $b_k(x)$ . The differential equation is reduced to one of the following standard forms. (A)  $x y' = f(x, y)$  ( $f(0, 0) = 0$ ); (B)  $x^{\sigma+1} y' = f(x, y)$  ( $\sigma > 0$ ,  $f(0, 0) = 0$ ,  $f'_y(0, 0) \neq 0$ ); (C)  $x^{\sigma+1} y^{\kappa} y' = f(x, y)$  ( $0 \geq 0$ ,  $\kappa \geq 0$ ,  $f(0, 0) \neq 0$ ); (D)  $x y' = y f(x, y, x^e/y)$  ( $e \neq 0$ ); (E)  $x y^{\kappa} y' = f(x, y, x^e/y)$  ( $\kappa \geq 0$ ,  $f(0, 0, 0) \neq 0$ ); (F)  $x^{\sigma+1} y' = y^{\kappa+1} f(x, y, x^e/y)$  ( $\sigma > 0$ ,  $f(0, 0, 0) \neq 0$ ). Finally the author introduces the definitions of principal and auxiliary reduced forms and proves that the final form of the principal reduced forms is (A) or (B) and the final form of the auxiliary reduced forms is (C). Also the number of principal reduced forms does not exceed  $\nu$  and the number of auxiliary reduced forms is  $\nu - 2$ . The author announces a paper with more details.

T. Eweida.

**Keil, Karl-August:** Das qualitative Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **57**, 111—132 (1955).

Es wird die Differentialgleichung

$$(1) \quad dx/dy = (a x + b y + f(x, y))/(c x + d y + g(x, y))$$

betrachtet, wobei folgende Voraussetzungen gemacht werden: 1.  $a, b, c, d$  sind Konstante, für welche  $ad - bc = 0$  und  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$  gilt, 2.  $f$  und  $g$  sind in einer Umgebung des Nullpunktes einmal stetig differenzierbar und genügen den Bedingungen  $\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} f(x, y) (x^2 + y^2)^{-1/2} = \lim_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} g(x, y) (x^2 + y^2)^{-1/2} = 0$  für  $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ , 3. der Nullpunkt ist eine isolierte singuläre Stelle für die Gleichung (1). Unter diesen Voraussetzungen wird das qualitative Verhalten der Integralkurven von (1) in der Umgebung des Nullpunktes untersucht. Es zeigt sich, daß das Verhalten der Integralkurven von (1) durch das Verhalten der verkürzten Gleichung  $dx/dy = (a x + b y)/(c x + d y)$  nicht bestimmt wird. Durch eine lineare Transformation läßt sich die Gleichung (1) entweder auf die Gestalt

$$(2) \quad dx/dy = (x + f^*(x, y))/g^*(x, y) \quad \text{oder} \quad (3) \quad dx/dy = (y + f^*(x, y))/g^*(x, y)$$

zurückführen, wobei  $f^*$  und  $g^*$  die Voraussetzungen 2. und 3. erfüllen. Für die Gleichung (2) gilt der folgende Satz: Es gibt genau zwei Integralkurven, die mit der Tangente  $y = 0$  von verschiedenen Seiten der  $y$ -Achse in den Nullpunkt einmünden und zu einer auch im Nullpunkt stetig differenzierbaren Kurve  $L[y = y(x)]$  zusammengefaßt werden können. Die oberhalb von  $L$  verlaufenden Integralkurven münden entweder alle mit vertikaler Tangente in den Nullpunkt ein (Knotenpunktverhalten), oder genau eine von ihnen hat diese Eigenschaft (Sattelpunktverhalten). Dasselbe gilt für die unterhalb  $L$  verlaufenden Integralkurven. Dabei läßt sich ein Kriterium angeben, wann der eine oder der andere Fall vorliegt. Für die Gleichung (3) ist der Verlauf der Integralkurven etwas komplizierter und wir verzichten auf eine genauere Besprechung entsprechender Sätze. Wir bemerken nur, daß im Falle der



Gleichung (3) keine Integralkurve in den Nullpunkt einzumünden braucht; wenn jedoch eine Lösung mit einer Tangente einmündet, so geschieht dies mit der gleichen Tangentenrichtung wie bei der verkürzten Gleichung. Die Beweise werden mit allen Einzelheiten auf geometrischem Wege durchgeführt, wobei die Isoklinenschar der Differentialgleichung herangezogen wird. *J. Szarski.*

**Aquaro, Giovanni:** Sul teorema di esistenza di Caratheodory per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 208—212 (1955).

**Egorov, V. G.:** Die Stabilität der Lösungen eines Systems von Gleichungen in totalen Differentialen. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 677—680 (1955) [Russisch].

Das System sei

$$dx_s = P_s(u, x_1, \dots, x_n) du + Q_s(v, x_1, \dots, x_n) dv \quad (s = 1, \dots, n)$$

oder, in Vektorform geschrieben,  $dx = P(u, x) du + Q(v, x) dv$ ; es soll die triviale Lösung besitzen. Diese heißt stabil, wenn jede Lösung  $x(u, v)$  mit  $|x(u_0, v_0)| < \delta$  die Ungleichung  $|x(u, v)| < \varepsilon$  für alle  $u \geq u_0$ ,  $v \geq v_0$  erfüllt. Verf. beweist hierzu einige Sätze, insbesondere über die Bedeutung, die die Stabilität der Teilsysteme  $dx = P(u, x) du$  und  $dx = Q(x, v) dv$  für die Stabilität des Gesamtsystems hat, sowie über die „Stabilität nach der ersten Näherung“. Dabei spielt die Integrabilitätsbedingung, die, in Matrizenform geschrieben,  $(\partial P / \partial x) Q = (\partial Q / \partial x) P$  lautet, eine Rolle. *W. Hahn.*

**Turrittin, H. L.:** Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point. Acta math. 93, 27—66 (1955).

Verf. gibt ein Verfahren an, welches für das System  $z^g d\eta/dz = A(z)\eta$  von  $n$  linearen homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung —  $A(z)$  sei in einer Umgebung von  $z = 0$  holomorph und  $g \in \{0, 1, 2, \dots\}$  — formale Lösungen liefert (vgl. Hukuhara, dies. Zbl. 21, 27); und zwar erhält man stets  $n$  formal unabhängige formale Lösungen. Bringt man das obige System von Differentialgleichungen durch

eine geeignete Transformation  $\eta = \sum_{k=0}^q P_k z^{k/p} \xi$  mit  $P_k$  als konstanten Matrizen auf

eine gewisse Normalform (1)  $t^h d\xi/dt = B(t)\xi$  mit  $z^{1/p} = t$ , so lassen sich  $n$  formal unabhängige formale Lösungen verhältnismäßig übersichtlich angeben. Die in diesen Lösungen auftretenden Reihen  $U_{ij}(t)$  divergieren zwar i. a., dürften jedoch in geeigneten Sektoren asymptotische Entwicklungen von Lösungen des Differentialgleichungssystems sein. Die Fälle  $h = 0$  und  $h = 1$  (Fall der lokalen Bestimmtheit) sind bereits hinreichend diskutiert (vgl. H. Kneser, dies. Zbl. 43, 308; G. Ehlers, dies. Zbl. 48, 70); deshalb wird nunmehr u. a.  $h \geq 2$  vorausgesetzt. Für die Koeffizienten der formalen Reihen  $U_{ij}(t) = \sum u_{ijn} t^n$  gilt  $u_{ij, n(h-1)+k} + k = O((n-1)! e^{\alpha_n})$  mit einem geeigneten  $\alpha_n > 0$  und  $k = 1, \dots, h-1$ . Deshalb gibt es in  $\tau = 0$  holomorphe Matrizen  $V_{ijk}(\tau)$ ,  $k = 1, \dots, h-1$ , mit

$$(2) \quad U_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{h-1} t^k \left\{ u_{ijk} + \int_0^\infty e^{-st^{1-h}} V_{ijk}(s) ds \right\},$$

wobei die Laplace-Integrale wie üblich auszuwerten und die  $u_{ijk}$  konstant sind; weil  $V_{ijk}(\tau) = O(e^{\beta\tau})$  für geeignetes  $\beta > 0$  in gewissen Sektoren gilt, sind die Laplace-Integrale in ihrer Abhängigkeit von  $t^{1-h}$  in gewissen Halbebenen holomorph und als Fakultätenreihen darstellbar; sie liefern vermöge (2) holomorphe Matrizen, welche die formalen Reihen  $U_{ij}(t)$  als asymptotische Entwicklung besitzen, und ergeben, in die formalen Lösungen von (1) eingesetzt, linear unabhängige Lösungen von (1). *H. Röhr.*

**Vinograd, R. E.:** Die Instabilität des kleinsten charakteristischen Exponenten eines regulären Systems. Doklady Akad. Nauk SSSR 103, 541—544 (1955) [Russisch].

Verf. konstruiert ein reguläres System (wegen der Definitionen vgl. Vinograd,

dies. Zbl. 55, 321)  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = f(t) y$ , dessen charakteristische Exponenten in folgender Weise instabil sind: geht man zu einem „gestörten“ System  $\dot{x} = \delta y$ ,  $\dot{y} = \delta x + f(t) y$  ( $\delta > 0$  und hinreichend klein) über, so machen der größte und der kleinste Exponent auch bei beliebig kleinem  $\delta$  einen endlichen Sprung. Die Funktion  $f(t)$  springt in geeigneten, immer größer werdenden Zeitabständen zwischen  $-1$  und  $+1$  hin und her.

W. Hahn.

Pliss, V. A.: **Notwendige und hinreichende Bedingungen der Stabilität im Großen für ein System von  $n$  Differentialgleichungen.** Doklady Akad. Nauk SSSR 103, 17–18 (1955) [Russisch].

Verallgemeinerung eines von Erugin (dies. Zbl. 39, 95) für  $n = 2$  bewiesenen Satzes. Die Bedingungen besagen im wesentlichen, daß der Nullpunkt der einzige Gleichgewichtspunkt und als solcher stabil ist und daß man eine Hyperebene  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$  des Phasenraumes angeben kann, auf der eine Funktion existiert, die für das Gleichungssystem den Charakter einer Ljapunovschen Funktion hat. — Der Beweis ist nur skizziert.

W. Hahn.

Jakubovič, V. A.: **Stabilitätsfragen für die Lösungen eines Systems linearer Differentialgleichungen von kanonischer Gestalt mit periodischen Koeffizienten.** Mat. Sbornik, n. Ser. 37 (79), 21–68 (1955) [Russisch].

Consider a second order periodic (of period  $\omega$ ) linear system  $\dot{y} = B(t) y$ ; the change of variables  $y = \exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^t \text{tr } B dt \right] \cdot x$  leads to (\*):  $\dot{x} = A(t) x$ ,  $\text{tr } A = 0$ ,

which in turn may be written  $\dot{x} = JH(t)x$ , where  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $H$  symmetric.

The problem is to classify the system (\*) according to the behavior of its solutions and especially in relation to stability. The matrix solution of the system may be written  $X(t) = P(t) \cdot e^{Kt}$ ,  $X(0) = I$ ,  $P$  unimodular periodic ( $P(t + \omega) = P(t)$ ) or antiperiodic ( $P(t + \omega) = -P(t)$ ),  $\text{tr } K = 0$ ; certain conventions are adopted to insure that  $P$  and  $K$  are uniquely determined by  $X$ ;  $K$  characterizes the stability behavior, while  $P$  essentially determines the number of half-rotations of the vector solutions during a period. The linear space of all matrices  $A = \begin{pmatrix} -\beta & -\gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$  with

the norm  $\int_0^\omega |\alpha| dt + \int_0^\omega |\beta| dt + \int_0^\omega |\gamma| dt$  is homeomorphic to the cartesian product of a connected metric functional space  $\Omega$  and  $R_3$ , where the latter is divided into infinite domains  $O_n, N_n$ ,  $-\infty < n < +\infty$ , whose boundaries are sets  $P_n = P_n^{*+} \cup P_n^{*-} \cup P_n^{**}$ ; the precise topological disposition of these sets is difficult to summarize here. If  $A \in O_n \times \Omega$ , the vector solutions are stable and each one turns through an angle  $\varphi$  satisfying  $n\pi < \varphi < (n+1)\pi$ ; if  $A \in N_n \times \Omega$ , the solutions are unstable, for two of them  $\varphi = n\pi$  and the others have  $\varphi$  either smaller or larger than  $n\pi$ , the difference being less than  $\pi$  in absolute value; if  $A \in P_n^{*+} \times \Omega$ ,  $n\pi \leq \varphi < (n+1)\pi$ ; if  $A \in P_n^{*-} \times \Omega$ ,  $(n-1)\pi < \varphi \leq n\pi$ ; if  $A \in P_n^{**} \times \Omega$ ,  $\varphi = n\pi$  for all solutions; in the latter cases ( $A \in P_n \times \Omega$ ) the equality  $\varphi = n\pi$  corresponds to periodic solutions; if  $A \in (P_n^{*+} \cup P_n^{*-}) \times \Omega$  there is instability, if  $A \in P_n^{**} \times \Omega$ , stability. These results are used to derive a number of criteria and methods to investigate stability and oscillatory properties. For instance: 1. If  $H_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \beta_0 & \gamma_0 \end{pmatrix}$  is a constant matrix,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\gamma_0 > 0$ .  $\text{Det } H_0 = 1$ , if  $h_{\min}(t)$ ,  $h_{\max}(t)$  are the two roots of the equation  $\text{Det } [H(t) - h H_0] = 0$ , then  $n\pi < \int_0^\omega h_{\min} dt \leq \int_0^\omega h_{\max} dt < (n+1)\pi$  implies  $A \in O_n \times \Omega$ ; 2. If  $H_1(t) \leq H(t) \leq H_2(t)$  and if  $H_1$  and  $H_2$  belong to the same region  $O_n \times \Omega$  or  $N_n \times \Omega$ , the same is true of  $H$  (this based on a theorem which states that if  $H_1 \leq H_2$ , the vector solutions

of  $\dot{x} = J H_1 x$  turn more slowly than those of  $\dot{x} = J H_2 x$ ; 3. If  $H_\lambda(t)$  is defined for  $-\infty < \lambda < +\infty$ , if  $\frac{\partial H_\lambda}{\partial \lambda} \geq 0$  and  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\omega h_{\min}(t, \lambda) dt = +\infty$ ,

$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \int_0^\omega h_{\max}(t, \lambda) dt = -\infty$ , where  $h_{\min}$ ,  $h_{\max}$  are the characteristic roots of

$H_\lambda(t)$ , there is a sequence of eigenvalues  $\dots < \lambda_{-1}^- \leq \lambda_{-1}^+ < \lambda_0^- \leq \lambda_1^+ < \lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \dots$  of the boundary value problem  $x(\omega) = x(0)$  (even indexes) or  $x(\omega) = -x(0)$  (odd indexes); if  $\lambda_n^+ < \lambda < \lambda_{n+1}^-$  the solutions are stable ( $A \in O_n \times \Omega$ ), if  $\lambda_n^- \leq \lambda \leq \lambda_n^+$ , unstable ( $A \in N_n \times \Omega$ ) (this last theorem is not true in a certain exceptional case which may be determined constructively). Statement No. 2 may be used successfully to investigate stability in practical cases, for instance, by approximating  $H$  with „step matrices“.

J. L. Massera.

**Markus, Lawrence:** Continuous matrices and the stability of differential systems. Math. Z. 62, 310—319 (1955).

Let  $\mathfrak{M}_n$  be the set of all  $n \times n$  complex matrices  $A(t)$  continuous and bounded in  $0 \leq t < +\infty$ . If  $A, B \in \mathfrak{M}_n$ ,  $A$  and  $B$  are kinematically equivalent,  $A \sim B$ , if there is a matrix  $P, P, P^{-1}, \dot{P} \in \mathfrak{M}_n$ , such that  $P^{-1}(A P - \dot{P}) = B$ ;  $\lambda$  is a characteristic exponent of  $A$  if there is a solution vector  $x(t)$  of  $\dot{x} = A x$  such that  $\lambda = \limsup t^{-1} \log \|x(t)\|$ ;  $\nu$  is a type of  $A$  relative to the characteristic exponent  $\lambda$  if there is a solution  $x(t)$  with the characteristic exponent  $\lambda$  such that  $\nu = \limsup \log \|x(t) \cdot e^{-\lambda t}\| / \log t$ . There is a finite number of  $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  and to each  $\lambda_i$  a finite number of  $\nu, \nu_{i1}, \nu_{i2}, \dots$ . Let  $E(\lambda_i)$  be the space of all solution vectors corresponding to  $\lambda \leq \lambda_i$ ,  $m(\lambda_i) = \dim E(\lambda_i) / E(\lambda_{i-1})$  is the multiplicity of  $\lambda_i$ ; the multiplicity of a type is similarly defined. Theorems 1 and 2: the numbers  $\lambda_i, \nu_{ij}, m(\lambda_i), m(\nu_{ij})$  form a set of invariants of kinematical similarity; this set is complete in the class  $\mathfrak{R}_n \subset \mathfrak{M}_n$  of matrices kinematically similar to constant matrices, and for each  $A \in \mathfrak{R}_n$  there is a unique similar real constant Jordan matrix  $A_J$  displaying the set of invariants. 3.  $A \in \mathfrak{R}_n$  is similar to a diagonal matrix if and only if  $A_J$  is diagonal. 4. A solution of a non-linear system is asymptotically stable if the matrix of the variational equations belongs to  $\mathfrak{R}_n$  and its characteristic exponents have negative real parts (this theorem is an immediate corollary of Ljapunov's theorem on systems having regular linear parts.). 3. If  $A \in \mathfrak{M}_n$  commutes with  $\int A(t) dt$ ,  $A = A_p + A_0$ ,  $A_0$  constant commuting with both  $A$  and  $\int A(t) dt$ ,  $\int A_p(t) dt \in \mathfrak{M}_n$ , then  $A$  is similar to  $A_0$  and  $A_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t A(t) dt$ . Corollaries:

If  $A$  is almost periodic,  $A_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t A(t) dt$ , if  $A, \int A(t) dt$  and  $A_0$  commute and  $\int (A - A_0) dt \in \mathfrak{M}_n$ , then  $A \sim A_0$ ; if  $A$  is almost periodic, commutes with  $\int A dt$  and has an absolutely convergent Fourier series whose characteristic frequencies are bounded away from zero, then  $A$  is similar to zero. 6. If  $A \in \mathfrak{M}_n$  is normal and  $m(t), M(t)$  are the minimum and maximum of the real parts of the characteristic roots of  $A$ , then the characteristic exponents  $\lambda_i$  satisfy

$$\limsup t^{-1} \int_0^t m(t) dt \leq \lambda_i \leq \limsup t^{-1} \int_0^t M(t) dt. \quad J. L. Massera.$$

**Putnam, C. R.:** On dynamical systems with one degree of freedom. Canadian J. Math. 7, 280—283 (1955).

Conservando le ipotesi di una precedente ricerca (questo Zbl. 56, 85) l'A. esamina in particolare il caso  $n = 2$ , nel quale il sistema ivi considerato può scriversi ('')  $\dot{p} = -\partial H / \partial q$ ,  $\dot{q} = \partial H / \partial p$  ('' =  $d/dt$ ), con  $H = H(p, q)$  dotata di derivate



seconde continue. L'A. dimostra che se  $\Omega$  è un insieme invariante di misura finita non nulla, tolti al più i punti  $(p, q)$  di un insieme  $Z$  di misura nulla, ogni altro punto di  $\Omega$  appartiene ad una caratteristica periodica (eventualmente singolare) di  $(')$ . L'insieme  $Z$  è poi sicuramente vuoto se  $\text{mis } \Omega \Sigma > 0$  per tutti i cerchi  $\Sigma$  aventi il centro in punti di  $\Omega$ . Si deduce anche che i punti singolari di  $(')$  se stabili (secondo Liapunov, per  $-\infty < t < +\infty$ ) corrispondono ad effettivi estremi relativi della funzione  $H(p, q)$ . R. Conti.

**Krasnosel'skij, M. A. und S. G. Krejn:** Über das Prinzip der Mittelbildung in der nicht-linearen Mechanik. Uspechi mat. Nauk 10, Nr. 3(65), 147—152 (1955) [Russisch].

Es wird ein Satz bewiesen, der die Verallgemeinerung eines Satzes von N. N. Bogoljubov auf eine umfassendere Klasse von Differentialgleichungen darstellt.  $D$  sei ein abgeschlossenes Gebiet des  $m$ -dimensionalen Euklidischen Raums.  $X(t, x)$  bezeichne eine Funktion, deren Werte  $m$ -dimensionale Vektoren sind. Sie sei für  $0 \leq t < \infty$  und  $x \in D$  definiert, gleichmäßig beschränkt und in  $x$  gleichmäßig stetig. Für jedes  $x \in D$  existiere der zeitliche Mittelwert  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N X(t, x) dt = X_0(x)$ . Betrachtet werden die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen  $dx/dt = \varepsilon X(t, x)$  und  $dy/dt = \varepsilon X_0(y)$  mit derselben Anfangsbedingung  $x(0) = y(0) = x_0$ . Für  $\varepsilon = 1$  gebe es eine eindeutige Lösung  $y(t)$ , die für  $0 \leq t \leq T$  in  $D$  liege. Dann existiert für ein beliebiges  $\eta > 0$  ein  $\varepsilon_0 > 0$  so, daß für  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  die Lösungen  $x(t)$ , die der Anfangsbedingung genügen, sich von  $y(t)$  um weniger als  $\eta$  unterscheiden, wenn  $0 \leq t \leq T/\varepsilon$  ist. W. Schulz.

**Miščenko, E. F. und L. S. Pontrjagin:** Periodische Lösungen von Differentialgleichungssystemen, die zu unstetigen Lösungen benachbart sind. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 889—891 (1955) [Russisch].

Let  $(1')$ :  $\varepsilon \dot{x} = f(x, y)$ ,  $\dot{y} = g(x, y)$ ,  $x, y$  vectors,  $\varepsilon$  small. Assume that the degenerate system  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = g$  has a relaxation oscillation. The authors give approximations for a periodic solution of  $(1')$  in the neighborhood of the relaxation oscillation. This generalizes previous results by J. Haag [Ann. Sci. École norm. sup., III. Sér. 60, 35—64, 65—111 (1943); 61, 73—117 (1944)] and A. A. Dorodnicyn (this Zbl. 34, 356). J. L. Massera.

**Leontovič, E. und A. Majer:** Über ein Schema, das die topologische Struktur der Zerlegung in Trajektorien bestimmt. Doklady Akad. Nauk SSSR 103, 557—560 (1955) [Russisch].

Certain schemata of the behavior of the trajectories of a system  $\dot{x} = P(x, y)$ ,  $\dot{y} = Q(x, y)$  in the neighborhood of (i) each singular point, (ii) each continuum formed by trajectories which are either  $\omega$ - or  $\alpha$ -limits of trajectories or boundaries of regions of closed trajectories, (iii) the boundary of the region  $G$  considered. These schemata together with the reciprocal relations of position of the above mentioned elements give a description which characterizes the topological structure of the set of trajectories in  $G$ . The precise definitions are very difficult to summarize (in the paper itself the schema of the boundary is not specified). J. L. Massera.

**Krasovskij, N. N.:** Über die Stabilität der Bewegung im kritischen Fall einer verschwindenden Wurzel. Mat. Sbornik, n. Ser. 37(79), 83—88 (1955) [Russisch].

Let  $\dot{x} = X(x)$  be a system of differential equations,  $X$  having continuous partials,  $X(0) = 0$ ,  $J(x)$  the Jacobian matrix. Assume  $J(0)$  has one vanishing characteristic root, the others having negative real parts. Then, if in a certain neighborhood of 0, all the characteristic roots of  $J(x)$ ,  $x \neq 0$ , have negative real parts, the solution  $x = 0$  is asymptotically stable; if there are characteristic roots with positive real parts at each point of a certain neighborhood,  $x = 0$  is unstable. J. L. Massera.

Krasovskij, N. N.: Über Bedingungen für die Umkehrung der Sätze von A. M. Ljapunov über die Instabilität für stationäre Systeme von Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR **101**, 17—20 (1955) [Russisch].

Let  $\dot{x} = X(x)$ ,  $X(0) = 0$ ,  $x$  being an  $n$ -vector. 1. A necessary and sufficient condition for the existence of  $V(x) \in C^1$  such that  $dV/dt$  is defined (positive or negative), is that there is a neighborhood of 0 containing no whole trajectory (with the exception of 0 itself). 2. If  $x = 0$  is unstable, a necessary and sufficient condition for the existence of  $V \in C^1$  such that  $dV/dt$  is positive definite and  $V$  assumes positive values in any neighborhood of 0, is that there is a neighborhood not containing a whole trajectory. 3. If the condition in theorem 2 is satisfied, there is a scalar  $\eta(x) > 0$  such that if  $\|R(x)\| \leq \eta(x)$ , 0 is unstable for  $\dot{x} = X + R$ . 4. If  $V$  is a function assuming non-negative values in any neighborhood of 0 and if a set  $H$  exists not containing any whole positive half-trajectory and such that  $dV/dt = 0$  in  $H$ ,  $> 0$  outside  $H$ , then 0 is unstable. 5. A necessary and sufficient condition for the instability of  $x = 0$  is that there is a  $V \in C^1$  assuming positive values in the neighborhood of 0 and such that  $dV/dt = \lambda V + W$ ,  $W \geq 0$ ,  $\lambda$  positive constant. Only sketchy proofs are given. J. L. Massera.

Szmydt, Z.: Sur l'allure asymptotique des intégrales de certains systèmes d'équations différentielles non linéaires. Ann. Polon. Math. **1**, 253—276 (1955).

Consider in  $E_n$ :  $\dot{x} = Ax$  and  $\dot{y} = Ay + f(y, t)$  where  $A$  is a constant matrix,  $f(y, t)$  satisfies assumptions guaranteeing the uniqueness of the solutions  $y$ , and  $\|f(y, t)\| \leq h(t) \|y\|$ . The author, using the topological method of Wazewski (this Zbl. **32**, 350) answers in the affirmative the question as to whether there corresponds to every  $x$  a  $y$  such that  $y - x = o(\|x\|)$  as  $t \rightarrow \infty$ . More precisely, let  $A$  have  $w$  distinct eigenvalues  $\lambda_i$  of multiplicity  $p_i$  and assume  $\operatorname{Re}(\lambda_1) \geq \dots \geq \operatorname{Re}(\lambda_{q-1}) > \operatorname{Re}(\lambda_q) = \dots = \operatorname{Re}(\lambda_{q+r-1}) > \operatorname{Re}(\lambda_{q+r}) \geq \dots \geq \operatorname{Re}(\lambda_w)$ . Let  $k$  be an integer,  $0 \leq k \leq s = \max(p_q - 1, \dots, p_{q+r-1} - 1)$ , let  $s_j = \min(k, p_j - 1)$ ,  $j = q, \dots, q + r - 1$ , and put  $p = p_{q+r} + \dots + p_w + s_q + \dots + s_{q+r-1}$  if  $q + r - 1 < w$  and

$p = s_q + \dots + s_{q+r-1}$  if  $q + r - 1 = w$ . If  $\int_0^\infty t^s h(t) dt < \infty$  then corresponding to every  $x$  for which  $\|x\| t^\alpha \exp(\beta t) \rightarrow \xi$ ,  $0 < \xi < \infty$ , as  $t \rightarrow \infty$ , where  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta < \operatorname{Re}(\lambda_q)$  or  $0 \leq \alpha \leq k$ ,  $\beta = \operatorname{Re}(\lambda_q)$ , there exists for  $p > 0$  ( $p = 0$ ) an at least  $p$ -parameter family of solutions (at least one solution),  $y$ , such that

$$(y - x)/t^k \exp(\operatorname{Re}(\lambda_q) t) \rightarrow 0$$

as  $t \rightarrow \infty$ . Two extensions to the case  $A = \operatorname{diag}(\lambda_j(t))$  are also proved.

H. A. Antosiewicz.

Yoshizawa, Taro: On the stability of solutions of a system of differential equations. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A **29**, 27—33 (1955).

Let  $dy/dx = F(x, y)$ ,  $0 \leq x < \infty$ , be a system where only continuity of  $F$  is assumed,  $F(x, 0) = 0$ . The stability and uniform stability of the solution  $x = 0$  is equivalent to the existence of certain (generalized) Ljapunov functions, which are merely assumed to be continuous or uniformly continuous for  $y = 0$  and non-increasing along the solutions. The strong stability introduced by Okamura [Proc. phys.-math. Soc. Japan, III. Ser. **25**, 514—523 (1943)] is also briefly discussed. J. L. Massera.

Lewis, D. C.: Families of periodic solutions of systems having relatively invariant line integrals. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 181—185 (1955).

Etant donné un système différentiel (1)  $dx^i/dt = X_i(x^1, \dots, x^n)$  où  $\partial X_i/\partial x^j$  existent, si ce système possède un invariant intégral  $\int_C A_i dx^i$ , il en existe une fonction de seconde classe  $H$  définie par l'équation  $\partial H/\partial x^i = (\partial A_i/\partial x^j - \partial A_j/\partial x^i) X_j$  et  $H = c$  est une intégrale première de (1). Dans l'hypothèse que  $A_i$  sont aussi de la deuxième classe l'A. démontre le théorème: Si (1) admet une solution de deuxième

classe périodique dépendant de  $m$  constantes arbitraires  $c^1, \dots, c^m$ , on a les formules  $(\partial h / \partial c^i) (\partial T / \partial c^i) - (\partial h / \partial c^j) (\partial T / \partial c^j) = 0$  où  $h$  est la valeur de l'intégrale première pour la solution périodique et  $T$  est la période, ce qui signifie que  $T$  est fonction de  $h$  si  $h$  n'est pas indépendant de  $c^1, \dots, c^m$ . Le cas où  $h$  est indépendant est aussi considéré. Le théorème était connu pour les systèmes lagrangiens (ou hamiltoniens). Dans la généralisation actuelle il est valable en particulier pour les systèmes Pfaffiens de Birkhoff.

G. Vranceanu.

**Hirasawa, Yoshikazu:** On singular perturbation problems of non-linear systems of differential equations. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli **3**, 115–122 (1955).

Si considera il sistema di equazioni differenziali contenenti il parametro  $\varepsilon$

$$(a) \quad \begin{cases} dx_i/dt = f_i(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n, t; \varepsilon), & (i = 1, \dots, m) \\ \varepsilon dx_j/dt = f_j(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n, t; \varepsilon), & (j = m+1, \dots, n) \end{cases}$$

sotto condizioni del seguente tipo: Il sistema degenerato che si ottiene da (a) per  $\varepsilon = 0$ , possiede una soluzione  $x_k = X_k(t)$ , ( $k = 1, \dots, n$ ), ove le funzioni  $X_k(t)$  sono continue, insieme con le derivate del primo ordine per  $0 \leq t \leq l$ . Le funzioni  $f_k(x_1, \dots, x_n, t; \varepsilon)$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) sono continue nel campo  $D$ :  $|x_k - X_k(t)| \leq d$ , ( $k = 1, \dots, n$ ),  $0 \leq t \leq l$ . Le funzioni  $f_i(x_1, \dots, x_n, t; 0)$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) soddisfano a una condizione di Lipschitz rispetto a  $x_1, \dots, x_n$ ; mentre le funzioni  $f_j(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n, t; 0)$ , ( $j = m+1, \dots, n$ ) soddisfano a una condizione di Lipschitz rispetto a  $x_1, \dots, x_m$  e inoltre non dipendono da  $x_{m+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$  e soddisfano alla disuguaglianza

$$[1/(\bar{x}_j - x_j)] \{f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, \bar{x}_j, x_{j+1}, \dots, x_n, t; 0) - f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n, t; 0)\} < -L.$$

Quando  $\varepsilon \rightarrow 0$   $f_k(x_1, \dots, x_n, t; \varepsilon)$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) converge a  $f_k(x_1, \dots, x_n, t; 0)$  uniformemente in  $D$ . Allora, date  $n$  funzioni  $h_k(\varepsilon)$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) che tendono a zero con  $\varepsilon$ , si dimostra che il sistema (a) ammette una soluzione  $x_k(t; \varepsilon)$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) ( $0 \leq t \leq l$ ), che soddisfa alla condizione iniziale  $x_k(0; \varepsilon) = X_k(0) + h_k(\varepsilon)$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo. Inoltre, quando  $\varepsilon$  tende a zero,  $x_k(t; \varepsilon)$  converge uniformemente a  $X_k(t)$  nell'intervallo  $0 \leq t \leq l$ . La dimostrazione è basata su un procedimento seguito da M. Nagumo (questo Zbl. **22**, 137) per un'equazione differenziale del secondo ordine.

S. Cinquini.

**Ważewski, T.:** Sur les intégrales de branchement des systèmes des équations différentielles ordinaires. Ann. Polon. Math. **1**, 338–345 (1955).

On considère un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre, aux seconds membres continus dans un ensemble ouvert  $W$  et admettant pour chaque  $P \in W$  une intégrale unique issue de  $P$ . Une intégrale  $A$  de ce système est dite intégrale de branchement, s'il existe une suite d'intégrales qui se condense à la fois sur  $A$  et sur une intégrale  $B$  disjointe de  $A$ . L'A. démontre que l'ensemble  $K$  des points de  $W$  situés sur les intégrales de branchement est de première catégorie de Baire. La démonstration s'appuie sur une généralisation, pour les fonctions admettant des valeurs infinies, du théorème bien connu sur l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction de première classe de Baire. J. Szarski.

**Zubov, V. L.:** Zur Theorie der zweiten Methode A. M. Ljapunovs. Doklady Akad. Nauk SSSR **100**, 857–859 (1955) [Russisch].

Let  $f(p, t)$  be a dynamical system in a metric space  $R$ . The invariant closed set  $F$  ( $f(F, t) = F$ ,  $-\infty < t < +\infty$ ) is said to be stable (S) if, given  $\varepsilon > 0$ , there is a  $\delta > 0$  such that  $\varrho(p, F) < \delta$  implies  $\varrho[f(p, t), F] < \varepsilon$  for  $t \geq 0$ ; similar definitions are given for asymptotic (AS) and uniform-asymptotic stability (UAS). The set  $A$  of all points  $p$  such that  $\varrho[f(p, t), F] \rightarrow 0$  when  $t \rightarrow +\infty$  is called domain of asymptotic stability of  $F$ ;  $A$  is open and its boundary is invariant. 1. If  $F$  is AS and has a compact neighborhood it is UAS. 2. If  $F$  is UAS there is a  $V(p)$  defined in  $A$  and having a total derivative  $V' = \lim \{V[f(p, t)] - V(p)\}/t$  such that: a) for any  $k > 0$  there is a  $\gamma > 0$  such that  $-1 < V(p) < -\gamma$  if  $k < \varrho(p, F)$  and  $V' > 0$



uniformly when  $p \rightarrow F$ , and b)  $V' = \varphi(p)(1 + V)$ ,  $\varphi \rightarrow 0$  when  $\varrho(p, F) \rightarrow 0$  and for any  $\alpha > 0$  there is a  $\beta > 0$  such that  $\varphi > \beta$  when  $\varrho > \alpha$ . 3. If  $p_0$  belongs to the boundary of  $A$  and not to  $F$ ,  $p_i \rightarrow p_0$ ,  $p_i \in A$ , then  $V(p_i) \rightarrow -1$ . 4. If there are  $\Gamma$  and  $\varphi$  satisfying the assumption of theorem 2, then  $F$  is UAS and a continuous decreasing function  $L(t)$  exists such that for sufficiently small  $\varrho(p, F)$ ,  $\varrho[f(p, t), F] < L(t)$ . In a special although quite general case it is possible to choose  $V \in C^r$ . No proofs are given.

*J. L. Massera.*

**Filippov, A. F.:** Über die Stabilität von Differenzengleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR **100**, 1045–1048 (1955) [Russisch].

Consider a differential equation  $Lu = f$  in a region  $D$  with boundary conditions  $l(u) = \varphi$  on the boundary  $\Gamma$  of  $D$  and let  $R_h u_h = f$  and  $r_h(u_h) = [\varphi]_h$  be the corresponding difference equations on a net of width  $h$ . Let  $\|u\|_{A_h}$  be a norm for functions on the net, which, when  $h$  tends to zero, tends to a norm  $\|u\|_A$  for functions in  $D$ . Let  $\|f\|_{B_h} \rightarrow \|f\|_B$  and  $\|[\varphi]_h\|_{C_h} \rightarrow \|\varphi\|_C$  be similar norms for functions defined in  $D$  and on  $\Gamma$  respectively. It is observed, roughly, that if the difference equation has a unique solution for sufficiently small  $h$  which depends continuously in the  $A$ -norm on the data normed by  $B$  and  $C$ , and this solution, when  $h \rightarrow 0$ , approximates a solution of the original equation, then the latter solution exhibits the same continuous dependence on the data, the norms being  $A$ ,  $B$  and  $C$ .

*L. Gårding.*

**Koval', P. I.:** Über die Stabilität der Lösungen von Systemen von Differenzengleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR **103**, 549–551 (1955) [Russisch].

Das betrachtete System hat, in Matrizenform geschrieben, die Gestalt  $x_{s+1} = A_s x_s + b_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ). Die Lösung heißt asymptotisch stabil, wenn für jeden Lösungsvektor  $\{x_s\}$  der homogenen Gleichung die Beziehung  $\lim_{s \rightarrow \infty} \|x_s\| = 0$

besteht; sie heißt stabil, wenn alle diese Normen beschränkt sind, andernfalls instabil. Es sei der Grenzwert der Matrizen  $A_s$  vorhanden und gleich  $A$ . Verf. zeigt, daß asymptotische Stabilität vorliegt, wenn alle Eigenwerte von  $A$  dem Betrage nach kleiner als eins sind; ist auch nur ein Eigenwert dem Betrage nach größer als eins, so ist die Lösung instabil. Der Satz über einfache Stabilität ist etwas komplizierter. Für die Beweise wird das System auf die Gestalt  $y_{s+1} = (W_s + B_s) y_s$  ( $W_s$  eine Diagonalmatrix) transformiert, dessen Verhalten man leicht übersehen kann.

*W. Hahn.*

**Wright, E. M.:** A non-linear difference-differential equation. J. reine angew. Math. **194**, 66–87 (1955).

Verf. gibt eine detaillierte Untersuchung der nichtlinearen Gleichung (1)  $y'(x) = -\alpha y(x-1)[1 + y(x)]$ . Eine Lösung mit  $\alpha > 0$  ist eindeutig für  $x > 0$  festgelegt durch Vorgabe von  $y(x)$  in  $(-1, 0)$ ; dort soll  $y$  beschränkt und Lebesgue-integrierbar sein. Für alle  $x > 0$  ist  $y(x) \geq -1$ , je nachdem  $y(0) \geq -1$  ist. Bei  $y(0) < -1$  strebt  $y \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow \infty$  und bei  $y(0) > -1$  ist  $y(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  beschränkt. Für  $y(0) > -1$  und  $\alpha \leq 3/2$  ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ . Verf.

untersucht die „assozierte lineare Gleichung“  $z'(x) = -\alpha z(x-1)$  mit der zugehörigen transzendenten Gleichung  $se^s + \alpha = 0$ . Es wird die genaue Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung mit positivem Realteil (für  $\alpha < \pi/2$  ist die Anzahl Null) und eine asymptotische Formel für die Imaginärteile aufgestellt. Wenn für ein  $\alpha \neq (2k + 1/2)\pi$  für eine Lösung gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ , so ist  $y = O(e^{-cx})$

mit passendem  $c > 0$ , und für solche Lösungen lassen sich asymptotische Entwicklungen angeben. Weiter sei

$$y_1(x) = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{n\alpha x}, \quad y_2(x) = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n e^{n\alpha x},$$

wobei die  $c_n$  mit  $c_1 = 1$  durch die Rekursionsformel  $(n-1)c_n = \sum_{m=1}^{n-1} c_m c_{n-m} e^{-mx}$  bestimmt sind. Dann sind  $y_1(x-x_0)$  und  $y_2(x-x_0)$  für beliebiges  $x_0$  Lösungen von (1), und zwar ist  $y_2(x-x_0)$  für  $x > \pi/2$  beschränkt, geht aber nicht gegen null für  $x \rightarrow \infty$ . Es werden noch weitere Lösungen in Reihengestalt angegeben. Nun sei  $y(x)$  eine Lösung von (1) für alle reellen  $x$ .  $y(x)$  ist dann analytisch in einem Streifen endlicher Breite, der die  $x$ -Achse enthält. Wenn  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$  ist, so hat  $y(x)$  die Gestalt  $-1$  oder  $y_1(x-x_0)$  oder  $y_2(x-x_0)$ . Ist  $y$  eine andere Lösung, so gilt  $-1 < y < e^\alpha - 1$  für alle  $x$  und die Nullstellen von  $y$  sind nach links nicht beschränkt; für  $\alpha \leq 3/2$  ist dann  $y \equiv 0$ . L. Collatz.

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

**Papy, Georges:** Algèbre tensorielle et algèbre différentielle extérieure. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **41**, 356–369 (1955).

Es wird gezeigt, daß die Algebra der alternierenden Differentialformen in einem Punkte einer  $X_n$  der Klasse  $C^2$  die größte Algebra ist, die eine invariante Differentiation zuläßt. Die verwendete Methode gestattet, die maximale Algebra dieser Art zu definieren für jede  $X_n$ , die im Ehresmannschen Sinne definiert ist mit Hilfe eines Atlases, kompatibel mit der Pseudo-Gruppe  $A_1^n$  derjenigen lokalen Automorphismen der  $R^n$  (Zahlenraum), die kontinuierlich differenzierbar sind. Am Schluß wird auf einige Verallgemeinerungen hingewiesen, sowie auf die Arbeit desselben Verf. [Bull. Soc. math. Belgique **6**, 62–69 (1954)]. J. A. Schouten.

**Jongmans, F.:** Étude des périodes des formes harmoniques. Bull. Soc. math. France **83**, 89–102 (1955).

Exposition de certaines parties de Hodge, Proc. London math. Soc., III. Ser. **1**, 104–117 (1951), avec certains compléments. H. Guggenheimer.

**Gaffney, Mathew P.:** Hilbert space methods in the theory of harmonic integrals. Trans. Amer. math. Soc. **78**, 426–444 (1955).

Es sei  $M$  eine kompakte orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . In  $M$  seien die Operatoren  $\delta$  und  $\Delta$  durch die Gleichungen

$$\delta \equiv (-1)^{np+n+1} * d * \quad \text{und} \quad \Delta \equiv d\delta + \delta d$$

erklärt [vgl. de Rham, Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. math. phys. **22**, 135–152 (1946)]. Ist  $H^p$  der Hilbertraum aller meßbaren  $p$ -Formen mit dem inneren Produkt  $(\alpha, \beta) = \int \alpha * \beta$  und  $\Delta$  die Abschließung von  $\Delta$  in  $H^p$ , so wird gezeigt:  $\Delta$  ist selbstadjungiert und  $(\Delta + E)^{-1}$  ist vollstetig. Haupthilfsmittel für den Beweis der Vollstetigkeit des Operators  $(\Delta + E)^{-1}$  ist dabei ein Satz von Rellich über mittlere Konvergenz [Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. **1930**, 30–35 (1930)]. Aus der Selbstadjungiertheit von  $\Delta$  folgt dann in Verbindung mit einem verallgemeinerten Weylschen Lemma der Zerlegungssatz von de Rham und Bidal sowie das Theorem von Hodge. Anschließend wird die Selbstadjungiertheit von  $\Delta$  für eine Klasse offener Riemannscher Mannigfaltigkeiten bewiesen. E. Heinz.

**Malgrange, Bernard:** Formes harmoniques sur des espaces de Riemann à  $ds^2$  analytique. C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 1958–1960 (1955).

Es sei  $\Omega$  eine nicht kompakte, reell-analytische, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $E_\Omega$  bezeichne den Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen auf  $\Omega$  und  $D'_\Omega$  den Raum der Distributionen über  $\Omega$ . Ferner sei  $D_\Omega$  (bzw.  $E'_\Omega$ ) die Teilmenge der Funktionen von  $E_\Omega$  (bzw. der Distributionen von  $D'_\Omega$ ) mit kompaktem Trägerbereich. — Der Verf. hat folgende Sätze bewiesen: 1. Zu jeder offenen Menge  $\theta \subset \subset \Omega$  gibt es stets eine stetige Abbildung  $E: E'_\theta \rightarrow D'_\theta$ , so daß  $E\Delta f = f$  für jedes  $f \in E'_\theta$  ist. 2.  $\Delta E_\Omega = E_\Omega$ ,  $\Delta D'_\Omega = D'_\Omega$

3. Es sei  $\theta \subset \Omega$  eine offene Menge. Dann läßt sich jede in  $\theta$  harmonische Funktion ( $\Delta f = 0$ ) dann und nur dann im Innern von  $\theta$  gleichmäßig durch in  $\Omega$  harmonische Funktionen approximieren, wenn  $\Omega - \bar{\theta}$  keine kompakten zusammenhängenden Komponenten enthält. — Dabei bezeichnet  $\Delta$  den Laplace- (Beltrami-) Operator. Aussage 3. steht in Analogie zu dem bekannten Satz von H. Behnke und K. Stein (dies. Zbl. 38, 235), daß unter der in 3. angegebenen topologischen Bedingung sich jede in einem Teilgebiet  $\theta$  einer nicht kompakten Riemannschen Fläche  $\Omega$  gegebene holomorphe Funktion nach in  $\Omega$  holomorphen Funktionen entwickeln läßt. Der Verf. behauptet, die Sätze 2 und 3 auch für allgemeinere Operatoren als  $\Delta$  beweisen zu können.

H. Grauert.

• Petrowski, I. G.: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1955. 296 S. DM 17,—.

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in dies. Zbl. 38, 255.

• Centre Belge de Recherches Mathématiques: Second Colloque sur les Équations aux dérivées partielles; tenu à Bruxelles du 24 au 26 mai 1954. Liège: Georges Thone; Paris: Masson & Cie 1955. 132 p.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

Borok, V. M.: Lösung des Cauchyschen Problems für einige Typen von linearen partiellen Differentialgleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 36 (78), 281—298 (1955) [Russisch].

Proofs of results announced before (this Zbl. 56, 317). The equation

$$(1) \quad u_t = P(t, i \partial / \partial x) u,$$

where  $u$  is a vector-valued function of the real variables  $t, x_1, x_2, \dots$  and  $P$  is a square matrix whose elements are differentiations with respect to  $x = (x_1, x_2, \dots)$  with coefficients depending continuously on  $t$ , reduces to (2)  $v_t = P(t, \xi) v$ , where  $v$  is the Fourier transform of  $u$ . The equation (1) is said to be hyperbolic if uniform convergence on compact subsets of a solution and its derivatives at one time imply the same convergence at any later time. Let  $Q(t, t_0, \xi)$  be the solution of (2) which for  $t = t_0$  reduces to the unit matrix. It is shown that (1) is hyperbolic if and only if, for every  $t$  and  $t_0$ ,  $Q$  is of at most polynomial growth in  $\xi$  and  $Q$  also is the restriction to real argument of an entire function of exponential type. [Reviewer's remark. This result is contained in more general results by L. Schwartz (this Zbl. 42, 331).] When  $P$  does not depend on  $t$ , the condition for hyperbolicity is transformed into a condition on the roots of  $P(\xi)$ . [Reviewer's remark. In this case, (1) is hyperbolic if and only if the polynomial  $\det(\tau E - P(i\xi))$ , ( $E$  a unit matrix;  $\tau, \xi_1, \dots$  complex variables) is hyperbolic with respect to the first variable in the sense of the reviewer (this Zbl. 45, 202).]

L. Gårding.

Žitromirskij, Ja. I.: Das Cauchysche Problem für Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit Differentialoperatoren vom Besselschen Typus. Mat. Sbornik, n. Ser. 36 (78), 299—310 (1955) [Russisch].

Proofs of results announced before (this Zbl. 56, 317).

L. Gårding.

Thomée, Vidar: Estimates of the Friedrichs-Levy type for a hyperbolic equation with three characteristics. Math. Scand. 3, 115—123 (1955).

Sia  $V$  una regione chiusa del piano euclideo  $x_1, x_2$  ed abbia un contorno  $S$  composto di archi regolari. Siano  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tre costanti reali, siano  $a_{ik} = a_{ik}(x_1, x_2)$  ( $i, k = 1, 2$ ),  $b_i = b_i(x_1, x_2)$  ( $i = 1, 2$ ),  $c = c(x_1, x_2)$ ,  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$  funzioni reali e continue in  $V$  e si consideri l'equazione (')  $L u = \varphi$  dove  $L$  è l'operatore differenziale iperbolico del terzo ordine definito da

$$L = (D_2 - \alpha_1 D_1) (D_2 - \alpha_2 D_1) (D_2 - \alpha_3 D_1) + \sum_{i,k=1}^2 a_{ik} D_i D_k + \sum_{i=1}^2 b_i D_i + c,$$

$D_i = \partial / \partial x_i$ . L'A. dimostra che se  $S$  soddisfa ad opportune condizioni dipendenti dalle costanti  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (vale a dire dalle caratteristiche associate ad  $L$ ) non può



esistere, tra le funzioni  $u$  dotate di derivate terze continue in  $V$ , più di una soluzione di (') per cui sia  $dku/dy^k = \varphi_{ik}$  su  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Con  $S_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) si indica l'insieme dei punti di  $S$  nei quali la normale esterna  $\nu$  ad  $S$ , di coseni direttori  $\nu_1, \nu_2$ , rende negativi i dei 3 fattori  $(\nu_2 - \alpha_1 \nu_1)(\nu_2 - \alpha_2 \nu_1)(\nu_2 - \alpha_3 \nu_1)$  e non negativi gli altri  $3 - i$ . Con  $dku/dy^k$  ( $0 \leq k < i$ ) si indicano derivate eseguite lungo la normale  $\nu$  ed infine le  $\varphi_{ik}$  ( $0 \leq k < i$ ) sono funzioni assegnate. Questo tipo di problema al contorno è suggerito dalla dinamica dei gas. L'A. riesce inoltre a stabilire una maggiorazione di  $\int_V \left( \sum_{i,k=1}^2 u_{ik}^2 + \sum_{i=1}^2 u_i^2 + u^2 \right) dV$  in funzione della  $\varphi$  e dei dati al contorno.

R. Conti.

**Castoldi, Luigi:** Sulla più generale soluzione ondosa dell'equazione di d'Alembert. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **24**, 145—151 (1955).

L'A. détermine, dans un espace riemannien  $R_n$ , les conditions imposées aux fonctions spatiales  $q(P)$  et  $A(P)$  par la condition que la fonction  $\psi(P, t) = A(P) f[q(P) - ct]$ ,  $f$  arbitraire, soit une intégrale de l'équation de d'Alembert  $\Delta \psi - c^{-2} \partial^2 \psi / \partial t^2 = 0$ . Il montre que les trajectoires orthogonales des surfaces  $\varphi(P) = \text{const.}$  doivent être des géodésiques de  $R_n$ ; par ailleurs, on doit avoir  $\Delta(A\varphi) = 0$ , d'où l'A. déduit une expression explicite de  $A$ , comportant une fonction arbitraire.

Ch. Blanc.

**Sbrana, Francesco:** Un nuovo procedimento per l'integrazione delle equazioni dell'elastodinamica e dell'elettromagnetismo. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **24**, 142—159 (1955).

Mit Hilfe einer Transformation der Form

$$\iiint_{\Sigma} U(Q, t) \frac{\exp(\omega R)}{R} d\Sigma(Q) = u(P, t; \omega)$$

mit  $R = \overline{PQ}$  und  $\omega = c + i\lambda$  [ $c \geq 0$ ,  $\lambda$  variabel in  $(-\infty, +\infty)$ ] leitet Verf. eine allgemeine Integralformel her zur Lösung der ungedämpften, inhomogenen Wellengleichung in einem räumlichen Gebiet  $\Sigma$  mit regulärem Rand. Die Integration der Gleichungen der Elastodynamik und der Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik werden hierauf zurückgeführt und weitere Anwendungen angekündigt.

M. J. De Schwarz.

**Karol', I. L.:** Randwertaufgaben für eine Gleichung vom gemischten elliptisch-hyperbolischen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR **101**, 793—796 (1955) [Russisch].

Various boundary problems for the equation  $u_{xx} + y u_{yy} + \alpha u_y = 0$ , ( $\alpha > 0$ ), are considered, involving Dirichlet boundary conditions in the upper half-plane and a condition  $u_{xx} + \alpha u_y = 0$  on the  $x$ -axis.

L. Gårding.

**Giorgi, Ennio de:** Un esempio di non-unicità della soluzione del problema di Cauchy, relativo ad una equazione differenziale lineare a derivate parziali di tipo parabolico. Rend. Mat. e Appl. **14**, 382—387 (1955).

L'A. costruisce un esempio di equazione

$$\partial^2 w / \partial t^2 = a(t, x) \partial^4 w / \partial x^4 + b(t, x) \partial^2 w / \partial x^2 + c(t, x) w$$

avente coefficienti  $a(t, x)$ ,  $b(t, x)$ ,  $c(t, x)$  indefinitamente derivabili nella striscia  $T(0 \leq t \leq 1, -\infty < x < +\infty)$ , per la quale il problema di Cauchy  $\partial^h w / \partial t^h|_{t=0} = 0$  ( $h = 0, 1, \dots, 7$ ) ammette, oltre la soluzione identicamente nulla in  $T$ , (un'altra e quindi) infinite soluzioni indefinitamente derivabili in  $T$ .

R. Conti.

**Slobodeckij, L. N.:** Potentialtheorie für parabolische Gleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR **103**, 19—22 (1955) [Russisch].

Soit

$$(A_0) \quad u'_t - M u \equiv u'_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, X) u''_{x_i x_j} - \sum_{j=1}^n b_j(t, X) u'_{x_j} - c(t, X) u = 0,$$

$0 \leq t \leq T$  une équation aux dérivées partielles à coefficients complexes. Les

variables indépendantes  $x_1, \dots, x_n, t$  sont supposées réelles. On suppose que  $(A_0)$  est du type parabolique, c'est à dire qu'il existe un nombre positif  $\delta$  tel que

$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq \delta \sum_{j=1}^n x_j^2$  pour tout système de nombres réels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (définition de I. Petrowsky). Étant donnée une surface  $\Gamma$  du type de Liapunoff, l'A. construit les intégrales  $W(t, X)$  et  $V(t, X)$ , analogues aux potentiels de simple resp. de double couche. Ces intégrales satisfont à l'équation  $(A_0)$  hors de  $(\Gamma) \times [0, T]$  et s'annulent pour  $t = 0$ . Aux points  $X_0 \in \Gamma$  ont lieu les formules de discontinuité

$$\lim_{X \rightarrow X_0} V(t, X) = \pm \frac{1}{2} \mu(t, X_0) + V(t, X_0), \quad \lim_{X \rightarrow X_0} P' W(t, X) = \mp \mu(t, X_0) + P' W(t, X_0),$$

avec

$$P' w(t, X) = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [a_{ij}(t, X) w] - b_j(t, X) w \right\} \cos(n_0, x_j),$$

$n_0$  étant la normale à  $\Gamma$  au point  $X_0$ . Ces propriétés des intégrales  $V$  et  $W$  permettent de résoudre les problèmes aux limites (problèmes de Fourier) relatifs à  $(A_0)$ . L'A. définit aussi la fonction de Green relative à l'équation  $(A_0)$  et à un domaine donné.

*M. Krzyżański.*

**Vekua, I. N.:** Über eine Methode zur Lösung von Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR **101**, 593–596 (1955) [Russisch].

Mittels der Transformation  $u = S_0 \varrho \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_n} G(x, \xi) \varrho(\xi) d\xi$ , wobei  $S_0 \varrho$  die Lösung der Randaufgabe:

$$\Delta^n u = \varrho \in L^p(\Omega_n), \quad p \geq 1; \quad R_\nu(u) = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

wird die allgemeine partielle Differentialgleichung:

$$(1) \quad F(x, u, D^1 u, \dots, D^n u) = 0, \quad D^p \stackrel{\text{def}}{=} \partial^p / \partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_p}$$

mit den Randbedingungen (R)  $R_\nu(u) = 0$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) auf die folgende Funktionalgleichung für  $\varrho$ :

$$(2) \quad F(x, S_0 \varrho, \dots, S_2 \varrho) = 0, \quad \text{wobei } S_k \varrho \stackrel{\text{def}}{=} D^k S_0 \varrho,$$

zurückgeführt. Diese letzte Gleichung kann man mit Hilfe des Banach-Caccioppoli-Prinzips zu lösen versuchen. Da die differentiellen Eigenschaften von  $S_0 \varrho$  gut bekannt sind, darf man auf diese Weise allgemeine Aussagen über Existenz und Regularitäten der verallgemeinerten Lösungen von (1), (R) erwarten. Die obige Methode wird angewandt auf die quasilineare elliptische Gleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen in  $\Omega_2$ .  $\Omega_2$  ist ein auf den Einheitskreis  $\Gamma: x^2 + y^2 < 1$  regulär transformierbares Gebiet. Die Einführung der komplexen Veränderlichen  $z = x + i y$  führt die letztgenannte Gleichung auf

$$(3) \quad u_{zz} + \operatorname{Re} [A(z, u, u_z) u_{zz}] + B(z, u, u_z) = 0$$

zurück. Voraussetzungen: 1°  $A$  und  $B$  sind meßbar für  $z \in \Gamma$ ,  $-\infty < u < \infty$ ; 2° es existiert eine solche Konstante  $q(M) < 1$ , daß für  $|u| + |v| < M$  für fast alle  $z \in \Gamma$ :  $|A(z, u, v)| \leq q(M)$ ;  $B(z, 0, 0) \in L^p(\Gamma)$ ,  $p > 2$  gilt.

3°  $|A(z, u_1, v_1) - A(z, u_2, v_2)| \leq A_0(z) |u_1 - u_2| + A_1(z) |v_1 - v_2|$ ,  $A_0, A_1$  sind meßbar,  $0 \leq \operatorname{vrai sup} A_i(z) = M_i < \infty$ ,  $i = 0, 1$ .

4°  $|B(z, u_1, v_1) - B(z, u_2, v_2)| \leq B_0(z) |u_1 - u_2| + B_1(z) |v_1 - v_2|$ ,  $B_0, B_1 \in L^p(\Gamma)$ ,  $p > 2$ . 5° Die  $\|B_i\|_p$  sind hinreichend klein. Behauptung: Die Randaufgabe (3),  $u|_{\partial\Gamma} = 0$  besitzt eine einzige verallgemeinerte Lösung  $u(z) = \int_{\Gamma} G(z, \zeta) \varrho(\zeta) d\zeta d\eta = S_0 \varrho$ ,  $G = 2\pi^{-1} \lg |z - \zeta| / |1 - z\bar{\zeta}|$ , dabei ist  $u \in C_{\beta}^1(\Gamma)$  und der Hölderexponent  $\beta = (p-2)/p$ . Für die lineare Gleichung:

$$(4) \quad \sum_{i,k=1}^2 a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{\nu=1}^2 b_{\nu} u_{x_{\nu}} + f_1 u = f_2$$

erhält man die Fredholmsche Alternative bei sehr schwachen Voraussetzungen über die Koeffizienten:  $\det (a_{jk}) \geq k > 0$ ,  $a_{11} + a_{22} = 1$ . Die  $a_{jk}$  sind beschränkt und meßbar;  $b_v, f_k \in L^p(\Gamma)$ ,  $p > 2$ . Wenn außerdem  $a_{ik}, b_v, f_k \in C_x^m(\Gamma)$ , dann genügt die Lösung von (4),  $u|_{\Gamma} = 0$  einer Hölderbedingung  $u \in C_x^{m+2}$  mit dem Exponenten  $\alpha$ . K. Maurin.

**Maurin, K.:** Lösbarkeit der Randwertaufgaben für allgemeine stark-elliptische Systeme mit Hilfe des Galerkinschen Verfahrens. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 207—212 (1955).

It is known that Dirichlet's problem in a bounded region for an elliptic differential operator  $Q$  with real principal part and suitably regular coefficients can be reduced to a Fredholm equation, which again, by Galerkin's method can be approximated by a finite set of linear equations. The author interpretes these equations in terms of the Dirichlet data and thus arrives at a constructive method for solving Dirichlet's problem. Using earlier results (this Zbl. 56, 320) he also shows that the solution is in  $C^{2m}$  if the operator  $Q$  is of order  $2m$  and the coefficients of a derivative of order  $j$  in  $Q$  are in  $C^{2m+j}$ , the data on the boundary belong to a function in  $C^{2m}$  and the source function satisfies a Hölder condition. The same results hold for strongly elliptic systems. L. Gårding.

**Cronin, Jane:** The Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations. Pacific J. Math. 5, 335—344 (1955).

Verf. betrachtet die Gleichung (E)  $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = \psi(x, y)$ , wobei  $F$  analytisch in allen seinen Variablen ist. Sei  $R$  ein beschränkter (ebener) Bereich, dessen Berandung  $S$  der Klasse  $C^h$  angehört. Mit  $E_{x,n}$  und  $e_{x,n}$  seien die normierten Ringe der auf  $R \cup S$  bzw. auf  $S$  definierten Funktionen bezeichnet, die  $x$ -Hölderstetige  $n$ -te Ableitungen besitzen. Es werde nun angenommen, daß die Gleichung (E) für  $\psi = \psi_0$  ( $\psi_0 \in E_{x,1}$ ) eine Lösung  $z_0$  ( $z_0 \in E_{x,3}$ ) mit Randwerten  $\varphi_0(\xi)$  ( $\varphi_0 \in e_{x,3}$ ;  $\xi \in S$ ) besitzt. Ferner werde vorausgesetzt, daß  $F$  bez.  $z_0$  vom elliptischen Typ ist und  $z_0$  für  $\psi = \psi_0$  eine isolierte Lösung von (E) darstellt. Verf. untersucht dann folgendes Dirichletsche Problem: (Gegeben seien  $\psi(x, y)$  ( $\psi \in E_{x,1}$ ) und eine Randfunktion  $q(\xi)$  ( $q \in e_{x,3}$ ,  $\xi \in S$ ) derart, daß  $\psi - \psi_0$  und  $q - \varphi_0$  genügend klein (in den Normen von  $E_{1,x}$  bzw.  $e_{x,3}$ ) sind. Besitzt dann (E) eine Lösung  $z(x, y)$  ( $z \in E_{x,3}$ ) mit  $z|_S = q$ ? Statt dieses Problem direkt zu untersuchen, betrachtet Verf. in Anknüpfung an frühere Arbeiten (dies. Zbl. 38, 258; 41, 237; 50, 343; 56, 342) eine Funktionalgleichung, von welcher (E) einen Spezialfall darstellt. Es wird zunächst ein reeller Banach-Raum  $\mathfrak{X}$  eingeführt; Verf. betrachtet dann die Gleichung (1)  $(I + C + T)x = y$ , wo  $x, y \in \mathfrak{X}$ ,  $I$  die Identität und  $C$  eine lineare vollstetige Transformation bedeutet. Die Transformation  $T$  erfülle die Bedingungen: 1.  $T(0) = 0$ , 2. es gibt eine Umgebung  $U$  von 0 und eine Konstante  $\beta$  ( $\beta > 0$ ) derart, daß für  $u, v \in U$  die Ungleichheit  $\|T(u) - T(v)\| \leq \beta (\|u\| + \|v\|) \cdot \|u - v\|$  gilt, 3.  $T$  ist eine analytische Funktion von  $x$ . — Um nun auch komplexe Lösungen des ursprünglichen Randwertproblems zu erfassen, wird sodann eine „komplexe“ Erweiterung der Gleichung (1) vorgenommen, indem  $I, C$  und  $T$  passend auf eine komplexe Erweiterung  $\mathfrak{Y}$  des reellen Banach-Raumes  $\mathfrak{X}$  fortgesetzt werden. Beim Studium der dann (1) entsprechenden Gleichung (2)  $(\mathcal{I} + \mathcal{C} + \mathcal{T})\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$  ( $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{Y}$ ) kann Verf. nun an frühere eigene Ergebnisse anknüpfen. Es ergibt sich dann durch Übergang zum Ausgangsproblem, daß (E) mindestens eine (komplexe) Lösung  $z(x, y)$ , (mit  $z|_S = \varphi$ ) für alle  $\psi$  und  $\varphi$  besitzt, die den Funktionen  $\psi_0$  und  $\varphi_0$  genügend benachbart sind. Ferner gewinnt Verf. eine untere Schranke für die Anzahl der verschiedenen Lösungen und gibt schließlich unter Benutzung des früher eingeführten Begriffs der Vielfachheit einer Lösung eine hinreichende Bedingung dafür, daß das betrachtete Problem mindestens eine reelle Lösung besitzt. H. Pachale.

**Louhivaara, Ilppo Simo:** Über das erste Randwertproblem für die Differentialgleichung  $u_{xx} + u_{yy} + qu + f = 0$ . Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I 183, 33 S. (1955).



Der Verf. beweist den folgenden Satz: Die erste Randwertaufgabe:

$$L u = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + q(x) u = f,$$

wo  $(u - g)$  am Rande von  $\Omega_2$  verschwinden soll im Sinne von Friedrichs-Courant, ist dann und nur dann lösbar, wenn die Randfunktion  $g$  der Relation:

$$\int_{\Omega_2} \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - q g \cdot \bar{\psi} \right] dx = \int_{\Omega_2} f \cdot \bar{\psi} dx = (f, \psi)$$

identisch für jede Lösung  $\psi$  des homogenen Problems  $L \psi = 0$ ,  $\psi|_{\partial\Omega_2} = 0$  genügt. [Bemerkung des Ref.: Wie aus einer wichtigen Abhandlung von F. E. Browder, Ann. Math. Studies **33**, 15–51 (1954), folgt, darf man einen viel allgemeineren Satz aussprechen: Wenn  $L$  ein gleichmäßig starkelliptisches Operatorsystem der Ordnung  $2k$  in einem beschränkten Bereich  $\Omega_n$  ist, dann ist für die Lösbarkeit der Randwertaufgabe  $L u = f$ ,  $(u - g) \in \mathfrak{H}_k$  ( $\mathfrak{H}_k$  ist der Raum der mit allen Ableitungen der Ordnung  $< k$  am Rande von  $\Omega_n$  verschwindenden Funktionen) notwendig und hinreichend, daß die Randvektorfunktion  $g$  ( $f, g, u, \psi$  sind Vektorfunktionen mit  $r$  Komponenten) der Relation

$$(L g, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} (f, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_n} \sum_{i=1}^r f_i(x) \overline{\psi_i(x)} dx$$

identisch für jede Lösung  $\psi$  der homogenen adjungierten Randaufgabe  $L^+ \psi = 0$ ,  $\psi \in \mathfrak{H}_k$  genügen.] K. Maurin.

**Prodi, Giovanni:** Sull'equivalenza tra la seconda formula di Green e la corrispondente equazione di Fredholm per l'equazione  $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ . Rend. Sem. mat. Univ. Padova **24**, 103–122 (1955).

Sia  $\sigma$  la frontiera di un campo piano limitato  $\tau$ , verificante le ordinarie ipotesi della teoria del potenziale. Siano  $A(M)$  e  $B(M)$  due funzioni definite su  $\sigma$  e ivi linearmente integrabili. Indichi  $v(M, P)$  la soluzione fondamentale dell'equazione:

(1)  $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ . Detta  $v_M$  la normale interna a  $\sigma$  in  $M$  e posto

$$(2) \quad u(P) = \int_{\sigma} [A(M) \partial v(M, P) / \partial v_M - B(M) v(M, P)] d_M \sigma,$$

l'A. dà le condizioni necessarie e sufficienti perchè dall'essere quasi ovunque su  $\sigma$ :

(3)  $\lim_{P \rightarrow M} u(P) = 0$  (essendo  $M$  un punto di  $\sigma$  e tendendo  $P$  ad  $M$  sulla normale

esterna a  $\sigma$  in  $M$ ) segua: (4)  $u(P) = 0$ , per ogni  $P$  esterno a  $\tau$ . Egli si accorge che non sempre la (3) implica la (4). Infatti il problema esterno di Dirichlet per la (1) nella classe delle funzioni rappresentate come la (2) ammette autovalori.

G. Fichera.

**Payne, L. E.:** Inequalities for eigenvalues of membranes and plates. J. rat. Mech. Analysis **4**, 517–529 (1955).

$D$  sei zunächst ein konvexer einfach zusammenhängender abgeschlossener Bereich mit der Randkurve  $C$  in der  $(x, y)$ -Ebene. Ferner seien  $\lambda_j, \mu_j, A_j$  die der Größe nach geordneten Eigenwerte der drei Aufgaben  $\Delta u + \lambda u = 0$ ,  $u = 0$  auf  $C$ ,  $\Delta v + \mu v = 0$ ,  $\partial v / \partial \nu = 0$  auf  $C$ ,  $\Delta W + A W = 0$ ,  $W = \partial W / \partial \nu = 0$  auf  $C$  ( $\nu$  = innere Normale auf  $C$ ,  $0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \dots$ ). Polya (dies. Zbl. **46**, 324) hatte bereits  $\mu_2 < \lambda_1$  gezeigt. Verf. beweist, indem er die Eigenwerte als Minima von Quotienten bekannter quadratischer Integralformen ansetzt und in diese geeignete Funktionen einsetzt:

$$\mu_2 < \lambda_1 - 2/(\varrho h)_{\max}; \quad \mu_3 < \lambda_1 - 1/(\varrho h)_{\max}; \quad \mu_{n+2} < \lambda_n \text{ für } n > 1.$$

Dabei ist  $\varrho$  der Krümmungsradius von  $C$  und der Wert von  $h$  in einem Punkt  $P$  von  $C$  ist der Abstand eines willkürlichen Koordinatenanfangspunktes in  $D$  von der Tangente an  $C$  in  $P$ . Weiter wird die Weinsteinsche Vermutung  $\lambda_2 \leq A_1$  bewiesen,

wobei  $D$  nicht konvex zu sein braucht. Hier steht das Gleichheitszeichen genau im Falle eines Kreisbereiches. Verf. vermutet allgemeiner  $\lambda_{n+1} \leq A_n$ . *L. Collatz.*

**Komatu, Yûsaku:** On boundary value problems for a rectangle. *Kôdai math. Sem. Reports* **7**, 8—14 (1955).

Für die vermischte Randwertaufgabe der Potentialtheorie in einem Rechteck, welche hier auf ein erstes Randwertproblem zurückgeführt wird, wird in Weiterführung analoger Arbeiten des Verf. eine Lösung mit Hilfe von  $\sigma$ -Funktionen gegeben. — Ref. hat 1932 die Lösung durch  $\vartheta$ -Funktionen angeschrieben (dies. Zbl. **4**, 115).

*H. Hornich.*

**Friedlander, F. G. and Joseph B. Keller:** Asymptotic expansions of solutions of  $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ . *Commun. pure appl. Math.* **8**, 387—394 (1955).

Gli AA. indicano un procedimento con cui si può ricavare, per l'equazione del titolo, una soluzione assintotica della forma:

$$u = v \exp(i k \Phi - k^x \chi), \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x, y, z)}{k^{\lambda_n}}$$

dove  $\chi$  ( $0 < \chi \leq \frac{1}{2}$ ) e  $\lambda_n$  ( $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ ) sono costanti.

*D. Graffi.*

● **Brelot, Marcel:** Contributions to potential theory. (Technical Note No. 2.)

Lawrence, Kansas: University of Kansas, Department of Mathematics 1955. 149 p.

Cet ouvrage comprend cinq parties. Partie I: Study and extensions of the Dirichlet principle. [Cette partie est publiée en Français aux Ann. Inst. Fourier **5**, 371—419 (1955).] On se place sur un espace  $\mathfrak{E}$  de Brelot-Choquet (cf. Brelot-Choquet, ce Zbl. **46**, 327). Rappelons que  $\mathfrak{E}$  est un espace topologique connexe, tel que 1) à chaque point  $P$  est associé un voisinage ouvert  $V_P$  et un homéomorphisme  $\mathfrak{H}_P$  sur un ouvert  $V'_P$  de  $R^r$  (ou même  $\bar{R}^r$ , déduit de  $R^r$  par compactification à l'aide d'un point à l'infini); 2. si deux ouverts  $V_{P_1}, V_{P_2}$  ont une intersection non vide  $A$ , l'homéomorphisme  $\mathfrak{H}_{P_2} \circ \mathfrak{H}_{P_1}^{-1}$  est a) une isométrie (directe ou inverse), on note alors  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_i$  b) ou bien, si  $r = 2$ , une correspondance conforme (directe ou inverse), on note alors  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_c$ . Un espace  $\mathfrak{E}$  est appelé espace de Green s'il existe une fonction surharmonique non constante sur  $\mathfrak{E}$  (les notions de fonctions harmoniques, surharmoniques, etc. . . , sur  $\mathfrak{E}$  sont définies à l'aide des cartes locales). Sur un espace de Green, existe une fonction de Green. On suppose désormais que  $\mathfrak{E}$  est un espace de Green. Soit  $G_P(M)$  la fonction de Green sur  $\mathfrak{E}$  de pôle en  $P$ . Le point  $P$  étant fixé (non à l'infini) on appelle lignes de Green les arcs de Jordan ouverts maximaux, tangents à chaque point à  $\text{grad } G \neq 0$ . Soit  $\mathfrak{Q}$  l'espace compact des lignes de Green issues de  $P$ ,  $dg$  la mesure de Green sur cet espace (cf. Brelot-Choquet, loc. cit.). L'A. utilise également la notion de radiale [cf. Brelot, Ann. sci. École norm. Sup., III. Sér. **61**, 301—332 (1944)]; soit  $\Sigma_\lambda$  la surface  $G_P(M) = \lambda > 0$ ; soit  $\mathfrak{Q}_\lambda$  l'ensemble des  $l \in \mathfrak{Q}$  qui coupent  $\Sigma_\lambda$ ; on montre (Brelot-Choquet) que  $\mathfrak{Q}_\lambda$  est ouvert dans  $\mathfrak{Q}$  et que  $\mathcal{C} \mathfrak{Q}_\lambda$  est de  $dg$ -mesure nulle. Soit  $v$  une fonction définie (quasi partout) sur  $\mathfrak{Q}$ . On définit  $v_\lambda$  sur  $\mathfrak{Q}_\lambda$  par  $v_\lambda(l) = v(l \cap \Sigma_\lambda)$ ,  $l \in \mathfrak{Q}_\lambda$ . Supposons que la fonction  $v_\lambda$  ainsi définie sur  $\mathfrak{Q}$  soit  $dg$ -sommable ( $\in L^1(\mathfrak{Q}, dg)$ ). On dira que  $v$  admet une radiale, notée  $\overleftrightarrow{v}$ , si, lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $v_\lambda$  converge dans  $L^1(\mathfrak{Q}, dg)$ , la limite étant par définition  $\overleftrightarrow{v}$ . Sur un espace  $\mathfrak{E}$

on peut définir de façon intrinsèque un espace  $\overset{(1)}{L^2}$  de formes différentielles de degré 1 de carré sommable. On désigne par BL l'espace (de Beppo Levi) des distributions  $T$  sur  $\mathfrak{E}$  telles que  $dT \in \overset{(1)}{L^2}$ . On prend sur BL la semi-norme égale à la norme de  $dT$  dans  $\overset{(1)}{L^2}$ . L'espace séparé associé est un espace de Hilbert. L'A. étudie brièvement cet espace (No 11 à 14); de façon plus précise, il étudie l'espace BLD (Beppo-Levi-Deny) des fonctions qui sont limites quasi partout et en seminorme d'une suite de fonctions indéfiniment différentiables de BL. Le but essentiel de l'A. est d'obtenir une décomposition canonique de l'espace BL (ou BLD) en somme de l'espace des fonctions harmoniques BL, et de l'espace des fonctions BL qui sont „nulles au bord“;

on obtiendra ainsi une vaste généralisation du principe classique de Dirichlet. Pour arriver à ce résultat, le premier point (fondamental) est le suivant: si  $K$  est un compact fixé quelconque de  $\mathfrak{E}$ , munissons BL de la norme dont le carré est  $\|dT\|^2 + \int_K |T|^2$  (on choisit une carte locale si  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_e$ ). Alors BL est un espace de Hilbert. Théorème I. Tout élément  $v$  de BL (ou BLD) admet une radiale  $\underline{v}$ . L'application  $v \rightarrow \underline{v}$  est continue de BL dans  $L^1(\mathcal{Q}, dg)$ . L'A. donne ensuite des théorèmes de stabilité relativement au problème de Dirichlet (résolu par la méthode de Perron-Brelot). Ensuite (cf. Th. 10 de l'A.): Théorème II. Tout élément  $f$  de BL admet une décomposition unique  $f = u + h$ ,  $h$  étant harmonique BL, et  $u$  étant dans BL avec  $\underline{u} = 0$ . Ceci est le théorème fondamental. Il est complété par Théorème III. Le sous-espace de BL formé des  $u$  avec  $\underline{u} = 0$  coïncide avec l'espace [noté  $\hat{D}^1$  dans Deny-Lions, Ann. Inst. Fourier **5**, 305—370 (1955); dans cet article, on a  $\mathfrak{E} =$  ouvert de  $R^n$ ] adhérence dans BL (muni de la semi-norme) des fonctions indéfiniment différentiables à support compact. Parmi les applications, signalons Théorème IV. Dans un espace de Green à 2 dimensions dont  $\text{grad } G_P$  pour un pôle  $P$  n'a qu'un nombre fini de zéros (exemple: une surface de Riemann hyperbolique à connexion finie) il existe une fonction harmonique indifférente (cf. pour cette notion: Brelot, ce Zbl. **56**, 324) unique qui admet comme radiale (de pôle  $P$ ) une fonction  $\varphi \in L^1(\mathcal{Q}, dg)$ . Partie II. Existence theorem for  $n$ -capacities. [Article publié sous forme identique aux Ann. Inst. Fourier **5**, 297—304 (1955).] Soit  $\mathfrak{E}_0$  un espace de Green (cf. Partie I). Un compact de  $\mathfrak{E}_0$  est dit „élémentaire“, s'il est l'image dans une carte locale d'une boule (cas  $\mathfrak{E}_i$ ) ou d'un domaine ayant pour frontière une courbe analytique de Jordan (cas  $\mathfrak{E}_e$ ). Un compact de  $\mathfrak{E}_0$  est „simple“ s'il est réunion d'un nombre fini de compacts „élémentaires“ disjoints. Alors: Théorème: On donne  $\mathfrak{E}_0$ , un entier  $N$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  compacts (que l'on peut choisir „simples“) mutuellement disjoints, chacun de capacité 1, la capacité de leur réunion différant de  $N$  d'au plus  $\varepsilon$ . Partie III. A new proof of the fundamental theorem of Kellog-Evans on the set of irregular points in the Dirichlet problem. L'A. donne une démonstration rapide et élémentaire du théorème suivant: l'ensemble des points irréguliers (pour le problème de Dirichlet) est réunion dénombrable de compacts de capacité nulle. Partie IV. On the behavior of harmonic functions in the neighborhood of an irregular boundary point. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $R^r$  (plus généralement un espace de Green). Soit  $Q$  un point frontière irrégulier. Une suite  $M_n$ ,  $M_n \in \Omega$ ,  $M_n \rightarrow Q$ , est dite „maximale“ si, pour la fonction de Green  $G_{P_0}(M)$  de pôle  $P_0$ , on a:  $G_{P_0}(M_n) \rightarrow \limsup_{M \rightarrow Q} G_{P_0}(M) > 0$  ce qui est indépendant de  $P_0$ . Soit  $u$  une fonction harmonique, bornée, dans  $\Omega$  au voisinage de  $Q$ . Alors  $u$  admet une pseudolimite  $\lambda$  en  $Q$  [i. e. une limite dans la topologie finie de Cartan cf. Brelot, Bull. Sci. math., II. Sér. **68**, 301—332 (1944)]. L'A. montre le Théorème. Pour toute suite „maximale“  $M_n \rightarrow Q$ , on a:  $u(M_n) \rightarrow \lambda$ . Extensions et applications diverses. Partie V. On associated functions and measures. Soit  $\lambda_0$  une mesure de Radon à support compact,  $F$  une fonction continue réelle sur un domaine  $\Omega$  de  $R^r$ . On dit que  $\lambda_0$  et  $F$  sont associées si  $\int F d\lambda = 0$  pour toute mesure  $\lambda$  déduite de  $\lambda_0$  par similitude,  $\lambda$  étant à support dans  $\Omega$ . Problème (Choquet-Deny): trouver, pour un domaine  $\Omega$ , les  $\lambda_0$  et  $F$  associées. Ce problème est résolu pour  $\tau = 2$  par Choquet-Deny, Bull. Soc. math. France **72**, 118—140 (1944); pour  $\tau \geq 2$  par Schwartz, id. p. 141—165, à l'aide d'une première version de sa théorie des distributions. L'A. reprend ici la démonstration de Choquet-Deny. Théorème: si  $F$  est harmonique dans  $\Omega$ , non polynome, toutes les mesures associées sont les  $\lambda_0$  normales, i. e. dont le potentiel (logarithmique si  $\tau = 2$ , newtonien si  $\tau \geq 3$ ) est à support compact. L'A. détermine ensuite les fonctions associées à une mesure non normale. Dans ses démonstrations, l'A. utilise: soit  $H_n$  les polynômes harmoniques de degré  $n$ ,  $Y_n$  les fonctions de Laplace sur la sphère unité; pour tout  $n$ ,



un système indépendant de  $H_n$  (ou  $Y_n$ ) peut être déduit d'une seule de ces fonctions par des rotations convenables autour de l'origine. Pour ce point, cf. Brelot-Choquet, Centre Belge Rech. math., Colloque 2, 45—66 (1955). *J. L. Lions.*

**Choquet, Gustave: Theory of capacities.** Ann. Inst. Fourier 5, 131—295 (1955).

Verf. gibt eine ausführliche, mit Beweisen versehene und durch weitere Ergebnisse vermehrte Darstellung seiner von ihm früher skizzierten Theorie der Kapazitäten. Chap. I. bringt eine Theorie der Borelschen und analytischen Mengen in topologischen (Hausdorffschen) Räumen; Chap. II behandelt die Newtonschen und Greenschen Kapazitäten im  $R^n$ . Weiter behandeln: Chap. III Alternierende und monotone Funktionen sowie Kapazitäten. Chap. IV Erweiterung und Verengung von Kapazitäten, Chap. V Operationen mit Kapazitäten, z. B. rechts-stetige  $\cup$ -Homomorphismen u. a., Chap. VI Kapazitätibilität und Fundamentaltheoreme. (betr. Definitionen usw. vgl. man zu Chap. I dies. Zbl. 42, 54; zu Chap. II dies. Zbl. 43, 317; zu Chap. III—VI dies. Zbl. 46, 57). Im letzten (umfangreichsten) Chap. VII handelt es sich um extremale Elemente in konvexen Kegeln und um Integraldarstellungen. Zugrunde gelegt werden Vektorräume  $L$  von Funktionen, deren Werte reelle Zahlen oder Vektoren sind. Ist  $L$  ein lokal konvexer Hausdorffscher Raum, so ist die abgeschlossene konvexe Hülle des Systems  $e(C)$  der extremen Elemente einer kompakten, konvexen Teilmenge  $C$  von  $L$  identisch mit  $C$  (Krein-Milman); zu beliebigem  $x_0 \in C$  existiert ein Maß  $m_0 \geq 0$  in  $e(C)$  mit  $x_0$  als Massenmittelpunkt. Falls  $C$  ein Kegel ist, erhält man daraus Integraldarstellungen für die Funktionen des Kegels. Für die Eindeutigkeit dieser Darstellung ist notwendig, daß der betrachtete Kegel ein Verband ist, wobei die Ordnung  $<$  in  $C$  erklärt ist durch:  $a < b$  falls  $b = a + c$ . Es folgen Beispiele, unter anderem positive, wachsende Funktionen; positive, wachsende Bewertungen, speziell auch additive Funktionen, über einem distributiven Verband; positive alternierende Funktionen unendlicher Ordnung in geordneten Semigruppen, bei deren Untersuchung die „Exponentialfunktionen“  $p$ , erklärt durch  $0 \leq p \leq 1$  und  $p(xy) = p(x) \cdot p(y)$ , eine Rolle spielen (wobei  $xy$  das in der Semigruppe gebildete Produkt). Weiter folgen unter anderem Integraldarstellungen für nicht-negative Kapazitäten der Ordnung  $A(\infty)$  bzw.  $M(\infty)$  nebst wahrscheinlichkeitstheoretischer Deutung. Den Schluß bilden Untersuchungen über Relationen zwischen alternierenden Funktionen der Ordnung 2 und Pseudonormen. *Otto Haupt.*

**Brelot, M.: Existence theorem for  $n$ -capacities.** Ann. Inst. Fourier 5, 297—304 (1955).

Es sei  $E_0$  ein Greenscher Raum (betr. die Definition vgl. z. B. dies. Zbl. 46, 327). Es wird gezeigt: Zu einer beliebigen natürlichen Zahl  $N$  und beliebigem  $\varepsilon > 0$  existieren  $N$  paarweise fremde kompakte Teilmengen  $M_\nu$  von  $E_0$  derart, daß die Kapazität eines jeden  $M_\nu$  gleich 1 ist und die Kapazität ihrer Vereinigung  $\cup M_\nu$  um weniger als  $\varepsilon$  von  $N$  abweicht; überdies kann jedes  $M_\nu$  als „einfach“ gewählt werden, d. h. als Vereinigung endlich vieler, fremder, kompakter Teile, deren jeder — kurz gesagt — homöomorphes Bild einer abgeschlossenen Sphäre ist. — Auf verschiedene Erweiterungen dieses Ergebnisses wird hingewiesen, u. a. auf folgende: Zu vorgegebenen  $N$  Kapazitäten  $k_\nu$  gibt es  $N$  fremde, einfache kompakte Mengen  $M_\nu$  derart, daß  $M_\nu$  die Kapazität  $k_\nu$  und  $\cup M_\nu$  eine von  $\sum k_\nu$  beliebig wenig abweichende Kapazität besitzt. *Otto Haupt.*

**Dinghas, Alexander: Konvexitätseigenschaften von Mittelwerten harmonischer und verwandter Funktionen.** Math. Z. 63, 109—132 (1955).

Soit  $H^n$  le demi-espace  $x_1 > 0$  de l'espace euclidien  $R^n$  rapporté aux coordonnées cartésiennes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; on pose  $x_1 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \cos \theta$ . La classe  $L_0$  est formée des fonctions  $u$  uniformes dans  $H^n$ , deux fois continûment dérivables et sous-harmoniques (au voisinage de chaque point où elles sont finies)

et telles que  $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) \leq 0$ , où  $Q$  est un point frontière quelconque de  $H^n$  situé à distance finie. La classe  $L_2$  est formée des fonctions sous-harmoniques limites de suites décroissantes de fonctions appartenant à  $L_0$ . Pour une fonction de  $L_2$ , on introduit la valeur moyenne  $m_k(r)$  de  $u^{2k} \cos^{2(1-k)} \theta$  sur la demi-sphère de rayon  $r$ , centrée à l'origine et située dans  $H^n$ . L'A. montre que, pour  $k \geq 1$ ,  $m_k^{1/k}(r) r^{n-2}$  est une fonction convexe de  $r^n$  et que  $m_k^{1/2k}(r)/r$  est une fonction convexe de  $1/r^n$ . Il donne la propriété limite correspondant à  $k \rightarrow +\infty$ . — L'A. considère ensuite les classes  $L_0^*$  et  $L_2^*$  définies comme  $L_0$  et  $L_2$  avec cette différence que  $H^n$  est remplacé par  $R^n$  et que la condition à la frontière disparaît. Pour une fonction de  $L_2$ , il introduit la valeur moyenne  $\mu_k^{2k}(r)$  de  $u^{2k}$  sur la sphère de rayon  $r$  centrée à l'origine ( $k \geq 1$ ). Il montre que, pour  $n > 2$ ,  $\mu_k(r)$  est une fonction convexe de  $1/r^{n-2}$  et  $\mu_k(r) r^{n-2}$  est une fonction convexe de  $r^{n-2}$ , tandis que, pour  $n = 2$ ,  $\mu_k(r)$  est une fonction convexe de  $\log r$ . Il donne les propriétés limites correspondant à  $k \rightarrow +\infty$ .

*J. Dufresnoy.*

**Duffin, R. J.: Continuation of biharmonic functions by reflection.** Duke math. J. **22**, 313—324 (1955).

Sei  $E^*$  eine offene Menge mit der Eigenschaft, daß  $(x, y, z) \in E^*$  die Aussage  $(-x, y, z) \in E^*$  impliziert; sei ferner  $Q$  der Durchschnitt von  $E^*$  mit der Ebene  $x = 0$  und  $E$  der Durchschnitt von  $E^*$  mit dem Halbraum  $x > 0$ . Es werde angenommen, daß  $w(p)$  in  $E$  biharmonisch ist und (\*)  $w(p)/x$  gegen Null geht bei Annäherung von  $p$  gegen einen beliebigen Punkt von  $Q$ . Verf. zeigt, daß dann  $w(p)$  eine biharmonische Fortsetzung auf  $E^*$  besitzt, die der Identität  $w(-x, y, z) = -w(x, y, z) + 2x \partial w(x, y, z) / \partial x - x^2 \Delta w(x, y, z)$  genügt. An Stelle der Randbedingung (\*) werden ferner andere, aus der Praxis resultierende Bedingungen betrachtet und ähnliche Resultate gewonnen. Die Beweismethode besteht darin, unter Benutzung der vorgegebenen biharmonischen Funktion  $w(p)$  zwei harmonische Hilfsfunktionen einzuführen. Wegen der jeweils für  $w(p)$  geltenden Randbedingungen erkennt man dann, daß sich die Hilfsfunktionen mittels des Schwartzschen Spiegelungsprinzips fortsetzen lassen. Da andererseits  $w(p)$  durch die Hilfsfunktionen ausdrückbar ist, resultiert hieraus eine Fortsetzung für  $w(p)$ . Anschließend überträgt der Verf. unter Benutzung der Inversionsmethode das anfangs betrachtete Problem auf den Fall der Fortsetzung einer biharmonischen Funktion über den Rand einer Kugel. Schließlich wird die langsame kontinuierliche Strömung einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit betrachtet. Verf. zeigt, daß die Geschwindigkeit biharmonisch und der Druck harmonisch ist und daß ferner eine solche Strömung mittels dreier harmonischer Funktionen dargestellt werden kann. Hieraus resultiert eine Fortsetzung der Strömung über eine ebene Wand hinaus, falls dort die Geschwindigkeit verschwindet.

*H. Pachale.*

**Morrey jr., Charles B. and James Eells jr.: A variational method in the theory of harmonic integrals.** Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 391—395 (1955).

In der vorliegenden Note werden zur Herleitung der bekannten Sätze über harmonische Integrale Hilfsmittel angegeben, welche auf den direkten Methoden der Variationsrechnung beruhen. Außerdem werden Differenzierbarkeitssätze über harmonische Felder aufgestellt, die u. a. den Zerlegungssatz von Kodaira erweitern. Als Haupthilfsmittel für die Beweise werden die Resultate der Autoren über Lösungen elliptischer Systeme herangezogen.

*E. Heinz.*

**Jörgens, Konrad: Harmonische Abbildungen und die Differentialgleichung  $rt - s^2 = 1$ .** Math. Ann. **129**, 330—344 (1955).

Es wird zunächst in § 1 dieser Arbeit ein Satz von L. Bers (dies. Zbl. **43**, 159) über harmonische Abbildungen zweifach zusammenhängender Gebiete neu be-

wiesen und quantitativ verschärft (Satz 1 und Satz 2). Mit diesen Hilfsmitteln werden dann in § 2 die isolierten Singularitäten eindeutiger Lösungen der Differentialgleichung  $r t - s^2 = 1$  untersucht. Es wird u. a. gezeigt: Jede in  $R^2 < x^2 + y^2 < \infty$  zweimal stetig differenzierbare Lösung  $z = z(x, y)$  der Differentialgleichung  $r t - s^2 = 1$  besitzt für  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  die asymptotische Darstellung

$$z(x, y) = \frac{1}{2} Q(x, y) + A x + B y + C \log |Q(x, y)| + O(1)$$

mit  $Q(x, y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2$ ,  $a c - b^2 = 1$ . Ist insbesondere  $R = 0$ , so ist entweder  $z(x, y)$  ein Polynom zweiten Grades, oder es gibt eine lineare Transfor-

mation der Variablen  $x, y, z$ , so daß sich  $z(x, y)$  in der Form  $z(x, y) = \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{1+\sigma^2} d\sigma$  darstellen läßt.

E. Heinz.

### Variationsrechnung:

Šilova, G. I.: Existenz des absoluten Minimums mehrfacher Integrale der Variationsrechnung. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 699–702 (1955).

On considère le problème de l'existence d'un minimum absolu des intégrales

$$\int_{\Omega} F(x^i; t, p^i) d\Omega, \text{ où sont } p^i = \partial f / \partial x^i, d\Omega = dx^1 \dots dx^n, i = 1, \dots, n.$$

Bernštein [Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 832 (1941)] a témoigné l'existence de solutions analytiques pour  $n = 2$ , en cas que les fonctions  $F$  sont soumises aux conditions spéciales. De ce travail on peut dire que la fonction  $F$  est soumise à la condition

suivante  $F(x, f, p) = F(x^i, f, p^i) \geq m \left\{ \sum_{i=1}^n (p^i)^2 \right\}^{\alpha/2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  où sont  $\alpha$  et  $m$

des nombres positifs qui ne dépendent pas des  $x^i, f, p^i$ . En ce cas Tonelli a montré l'existence de solutions continues pour  $n = 2$  et  $\alpha > 2$  et Sigalov pour  $n = \alpha = 2$ . Morrey a montré l'existence de solutions générales pour  $\alpha > 1$ . Cependant, l'auteur en ce travail donne une courte preuve de l'existence de solutions continues pour  $\alpha = n > 2$ . Tout d'abord, en supposant que  $\bar{G}$  est domaine d'espace euclidien

$R_n$ ,  $n > 2$ , borné par  $G'$ , quand les fonctions  $f(x)$ ,  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \bar{G}$  se ramènent à la classe  $A^\alpha$ , où est  $\alpha > 1$ , on donne quelques définitions et propriétés

des fonctions linéaires en pièces. Soit  $\bar{G} \subset R_n$ ,  $n > 2$  un domaine avec les frontières régulières,  $\psi(x)$  une fonction déterminée sur  $G'$ ,  $|\psi| \leq M$ , et soient les fonctions  $F(f, x, p)$ ,  $F_{p^i}(x, f, p)$ ,  $i = 1, \dots, n$  déterminées quand  $x \in \bar{G}$ ,  $|f| \leq M$  et continues on obtient ce théorème: „S'il existe une fonction admissible [avec les conditions, si  $f(x)$ ,  $x \in G$  se ramène à la classe  $A^n$ ,  $|f| \leq M$ ,  $f(x) = \psi(x)$  quant  $x \in G'$  et  $(f, G, F) =$

$\int_{\bar{G}} F(x, f, p) d\Omega < +\infty$ ] il existe aussi une même fonction  $f_0(x)$  donnant à l'intégrale  $(f, G, F)$  un minimum absolu dans une classe des fonctions admissibles“.

Alors est

$$(f_0, G, F) = \inf \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, G_k, F) \right\}.$$

La preuve se confirme par la méthode classique s'appuyant sur un théorème d'élection donné par l'A., dont la preuve se repose sur le théorème général de L. Young.

D. Rašković.

Fréchet, Maurice: Existence de la différentielle d'une intégrale du calcul des variations. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 2036–2038 (1955).

Alla tecnica introdotta da Eulero e da Lagrange che consiste nell'appoggiare lo studio di un funzionale  $F[z(x)]$  a quello di una funzione di un parametro  $\alpha$ , l'A. sostituisce quella, propria del calcolo funzionale, che poggia sulla nozione di differenziale di un funzionale. Riprendendo alcune considerazioni di G. A. Bliss [Proc. nat. Acad. Sci. USA 1, 173–177 (1915)] che fanno uso della nozione di differenziale



introdotta da Volterra, l'A. esamina il problema della differenziabilità di un integrale semplice del calcolo delle variazioni facendo uso della nozione di differenziale da lui stesso introdotto, e ormai classica. Egli dimostra che l'integrale:  $I[z(x)] = \int_a^b f[x, z(x), z'(x)] dx$ , il quale non è differenziabile nel senso detto quando  $z(x)$  si considera in uno spazio metrico ove la metrica è quella lagrangiana di ordine zero, è invece dotato di differenziale primo e secondo quando la metrica è quella lagrangiana del primo ordine e la funzione  $f(x, z, t)$  soddisfa ad opportune ipotesi di derivabilità. Si ritrova così l'espressione classica della variazione prima e seconda di  $I[z]$  con un significato più ricco di contenuto di quanto accade nella teoria classica del calcolo delle variazioni.

G. Stampacchia.

**Leighton, Walter and Allan D. Martin: Quadratic functionals with a singular end point.** Trans. Amer. math. Soc. 78, 98—128 (1955).

Gli AA. riprendono e completano una precedente ricerca di Morse e Leighton (questo Zbl. 15, 27), considerando il funzionale (singolare per  $x = 0$ )

$$J(y)|_e^b = \int_e^b [r(x) y'^2(x) - p(x) y^2(x)] dx,$$

ove  $r(x)$ ,  $p(x)$  sono funzioni continue per  $0 < x < d$  ed è  $0 < e < b < d$ . Viene indicata con  $F$  la classe delle funzioni  $y = y(x)$  continue in  $(0 < x \leq b)$  con  $y(b) = 0$ , per le quali  $y(x)$  è assolutamente continua e  $y'(x)$  è integrabile (secondo Lebesgue) in ogni intervallo parziale chiuso di  $0 < x \leq b$ ; e con  $A$  la sottoclasse costituita da quelle funzioni di  $F$  per le quali  $y(x)$  è continua per  $0 \leq x \leq b$  con  $y(0) = 0$ . Gli AA. stabiliscono condizioni necessarie e sufficienti, affinché risulti  $\liminf_{x=0} J(y)|_x^b \geq 0$  sia al variare di  $y(x)$  in  $F$ , sia al variare di  $y(x)$  in  $A$ .

S. Cinquini.

**Pucci, Carlo: A proposito di un problema isoperimetrico.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 17, 345—346 (1955).

Zu dem Variationsproblem, unter allen mit einer senkrechten Symmetrieebene und nach Lebesgue quadrierbarer Oberfläche versehenen Körpern gegebenen Volumens, deren horizontale Querschnitte untereinander ähnlich und einfach zusammenhängend sind sowie rektifizierbaren Rand besitzen, den Körper  $D$  von kleinster Oberfläche  $FD$  zu bestimmen, werden der Beweis der Existenz und der Eindeutigkeit der Lösung angekündigt und einige Gedanken desselben skizziert. Wenn  $\sigma$  und  $L$  bzw. Flächeninhalt und Umfang des größten horizontalen Querschnitts des Körpers  $D$  sind, muß

$$3L \cdot \text{Volumen von } D = 2\sigma \cdot \text{Inhalt von } FD$$

gelten.

M. J. de Schwarz.

**Fricke, A.: Bemerkungen zu einer Variationsaufgabe.** Elemente Math. 10, 61—65 (1955).

Ref. stellte gelegentlich die Aufgabe, aus einem quadratischen Blatt an den Ecken vier krummlinig begrenzte Zwickel auszuschneiden, derart, daß der durch Aufbiegen der verbleibenden Seitenteile entstehende Behälter maximalen Inhalt bekomme. Verf. setzt für diese „verallgemeinerte Schachtelaufgabe“, die mit einem bekannten Eulerschen Variationsproblem (inhaltsgrößte Drehfläche zu gegebener Meridianlänge) äquivalent ist, nach geringfügiger Modifikation die Behandlung als Isoperimetrieproblem ausführlich auseinander. Als Profil der Behälterwände tritt eine elastische Linie auf.

W. Wunderlich.

### **Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:**

• Riesz, Frédéric et Béla Sz.-Nagy: Leçons d'analyse fonctionnelle. 3. éd. Paris: Gauthier-Villars 1955. Budapest: Akadémiai Kiadó VIII, 488 p. 3000 fr.

Die vorliegende dritte Auflage (für die 1. Auflage vgl. dies. Zbl. 46. 331) ist um einen Anhang von B. Sz.-Nagy erweitert, in dem die von M. A. Neumark begonnene Theorie der Erweiterungen der in einem Hilbertschen Raum  $\mathfrak{H}$  erklärten linearen Operatoren in einem geeigneten größeren Raum  $H$  dargestellt wird. Es handelt sich um folgende Sätze: Jede im Sinne von Neumark verallgemeinerte Spektralschar in  $\mathfrak{H}$  ist die Projektion einer gewöhnlichen Spektralschar eines geeigneten  $H$ . Zu jedem selbstadjungierten  $A$  mit  $0 \leq A \leq I$  in  $\mathfrak{H}$  bzw. zu jeder Kontraktion  $T$  ( $\|T\| \leq 1$ ) läßt sich  $H$  so bestimmen, daß  $A$  bzw.  $T$  die Projektion einer Projektion  $P$  bzw. eines unitären Operators  $U$  aus  $H$  ist. Es läßt sich sogar erreichen, daß  $T^n$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$  die Projektion von  $U^n$  ist. Jede einparametrische Halbgruppe isometrischer Operatoren in  $\mathfrak{H}$  ist die Projektion einer Halbgruppe unitärer Operatoren eines  $H$ . Schließlich werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür abgeleitet, daß ein beschränkter Operator eine normale Erweiterung besitzt. Alle diese Sätze werden durch Spezialisierung aus einem allgemeinen Theorem abgeleitet, das neu ist und eine Verallgemeinerung eines Satzes von Gelfand und Rajkov darstellt, wonach jede stetige, positiv definite Funktion auf einer lokalkompakten topologischen Gruppe in der Form  $(U_\xi f_0, f_0)$  gegeben werden kann,  $U_\xi$  eine unitäre Darstellung der Gruppe in einem Hilbertschen Raum  $\mathfrak{H}$ ,  $f_0$  fest in  $\mathfrak{H}$ .

G. Köthe.

**Grothendieck, Alexandre: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.** Mem. Amer. math. Soc. 16, 190 and 140 p. (1955).

Es kann auf die ausführliche Besprechung der Vorankündigung in dies. Zbl. 55, 97 verwiesen werden.

G. Köthe.

**Collins, Heron Sherwood: Completeness and compactness in linear topological spaces.** Trans. Amer. math. Soc. 79, 256—280 (1955).

Ce travail se divise en trois parties. Dans la première, l'A. apporte quelques compléments aux résultats connus de Šmulian, Eberlein et Grothendieck sur la compacité faible dans un espace localement convexe  $X$ : un ensemble  $M \subset X$  est dit faiblement compact en moyenne si pour toute suite  $(x_n)$  dans  $M$ , il existe  $x \in X$  tel que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  pour toute  $f \in X'$  (dual de  $X$ ). L'A. montre que si  $X$  est complet pour la topologie de Mackey  $\tau(X, X')$ , un ensemble faiblement compact en moyenne est relativement faiblement compact dans  $X$ . Dans la seconde partie, l'A. considère les topologies qui, sur toute partie équilibrée de  $X'$ , induisent la même topologie que la topologie faible  $\sigma(X', X)$ . Il montre qu'en général la plus fine de ces topologies n'est pas localement convexe, et que la plus fine des topologies localement convexes ayant cette propriété n'est pas une  $\mathcal{S}$ -topologie (i. e. une topologie de convergence uniforme sur une famille  $\mathcal{S}$  de parties bornées de  $X$ ). Enfin, la troisième partie est une étude de la notion d'espace  $X$  pleinement complet, c'est-à-dire tel que, dans  $X'$ , toute variété linéaire dont l'intersection avec tout polaire  $U^0$  d'un voisinage de 0 dans  $X$ , est fermée pour la topologie faible  $\sigma(X', X)$ , est elle-même fermée pour cette topologie. Il est connu que si  $X$  est pleinement complet, il est complet, et la réciproque est vraie si  $X$  est métrisable, mais non en général. L'A. montre que tout sous-espace fermé d'un espace pleinement complet est pleinement complet, ainsi que tout espace quotient par un sous-espace fermé; mais ni les produits ni les sommes directes topologiques (infinies) d'espaces pleinement complets ne sont nécessairement pleinement complets. J. Dieudonné.

**Bartle, Robert G.: On compactness in functional analysis.** Trans. Amer. math. Soc. 79, 37—57 (1955).

La plupart des résultats de ce travail sont connus ou sont des paraphrases de résultats connus, dans des situations parfois un peu plus générales. L'A. s'occupe surtout des relations entre la notion de compacité dans des espaces fonctionnels, pour diverses topologies, et la notion de „convergence quasi-uniforme“ d'Arzela.

Divers résultats sur les espaces de Banach et les espaces de fonctions continues sont des cas particuliers de théorèmes donnés sous leur forme générale par A. Grothendieck, dans un mémoire qui n'est pas cité dans la bibliographie de l'A. (ce Zbl. 50, 109).

J. Dieudonné.

**Lovaglia, A. R.: Locally uniformly convex Banach spaces.** Trans. Amer. math. Soc. 78, 225—238 (1955).

A normed linear (vector) space is „locally uniformly convex“ (l. u. c.) if, and only if, given  $\varepsilon > 0$  and an element  $x$  with  $\|x\| = 1$ , there exists  $\delta(\varepsilon, x) > 0$  such that  $\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon, x)$  whenever  $\|x - y\| \geq \varepsilon$  and  $\|y\| = 1$ . Th. 1. 1. If  $\{B_n\}$  is a sequence of l. u. c. Banach spaces, the space  $P_2(B_n)$  of all sequences  $x = \{x^n\}$ ,  $x^n$  in  $B_n$ , for which  $S_2(x) = \sum \|x^n\|_n^2 < \infty$ , provided with the norm  $\|x\| = \sqrt{S_2(x)}$  is a l. u. c. Banach space. The normed linear spaces  $B$  and  $B_1$  are said to be „isomorphic“ if, and only if, there exists a one-to-one linear (continuous) transformation of  $B$  onto  $B_1$ . If  $B_n$  is the  $n$ -dimensional (Minkowskian) space  $L^n$ ,  $P_2(B_n)$  is not isomorphic to any uniformly convex space. An example shows that l. u. c. is stronger than strict convexity. The norm in a Banach space  $B$  is called „weakly differentiable“ at  $x_0 \in B$  if, and only if,  $\lim_{h \rightarrow 0} (\|x_0 + hx\| - \|x_0\|)/h$

exists for every  $x \in B$ . If the convergence to the limit is uniform in the unit sphere  $U: \|x\| \leq 1$ , of  $B$ , the norm is said to be „strongly differentiable“ at  $x_0$ . Th. 2. 2. If  $B$  is l. u. c. and linear (continuous) functionals attain their maximum on  $U$ , then the norm is strongly differentiable in the adjoint (dual) space  $\bar{B}$ . Th. 2. 3. If  $\bar{B}$  is l. u. c., then the norm is strongly differentiable in  $B$ .  $B$  is said to be „weakly l. u. c.“ if, and only if,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x_0\| = 2$ ,  $\|x_n\| = \|x_0\| = 1$ , implies  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_0(x_n) = \|x_0\|$ ,

where  $f_0 \in \bar{B}$ ,  $\|f_0\| = 1$  and  $f_0(x_0) = \|x_0\|$ . Th. 2. 4. If  $B$  is weakly l. u. c. and the norm in  $\bar{B}$  is strongly differentiable, then  $B$  is l. u. c. Th. 2. 6. If the norm in  $B$  is strongly differentiable, and linear functionals attain their maximum on  $U$ , and  $\bar{B}$  is weakly l. u. c., then  $\bar{B}$  is l. u. c. A basis  $\{x_i\}$  for  $B$  is said to have 1° property (A) if, and only if,  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$  converges whenever  $\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|$  is bounded

for all  $n$ , 2° property ( $\bar{A}$ ) if, and only if, for every  $f \in \bar{B}$ , the limit of the norm  $\|f|_n\|_n$  of  $f$  on the closure of the span of  $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$  exists and  $= 0$ . Th. 3. 1. If  $B$  has a basis  $\{x_i\}$  having property (A), then  $B$  is isomorphic to a l. u. c. space. Th. 3. 2. If  $B$  has a basis  $\{x_i\}$  with property ( $\bar{A}$ ), then  $B$  is isomorphic to a weakly l. u. c. space.

Chr. Pauc.

**Klee jr., V. L.: Separation properties of convex cones.** Proc. Amer. math. Soc. 6, 313—318 (1955).

A  $\varphi$ -cone is a closed convex cone in a topological vector space  $E$  with vertex at the zero vector  $\varphi$  of  $E$ . It is proved that if  $A$  and  $B$  are  $\varphi$ -cones in a locally convex  $E$ ,  $A$  is locally compact, and  $A \cap B = \{\varphi\}$ , then  $A$  and  $B$  can be separated by a hyperplane. More precisely, there exists a continuous linear functional  $f$  with  $f \leq 0$  on  $A$ ,  $f \geq 0$  on  $B$ , and  $f < 0$  on the part of  $A$  that is not in  $-A$ . If  $B$  is also locally compact, then  $f$  may be chosen so that in addition  $f > 0$  on the part of  $B$  that is not in  $-B$ . This stricter separation is also obtained if local compactness of  $B$  is replaced by the condition that  $E$  is normed and separable. Examples are given to show that the conditions in these theorems cannot be substantially weakened.

F. F. Bonsall.

**Warner, Seth and Alexander Blair: On symmetry in convex topological vector spaces.** Proc. Amer. math. Soc. 6, 301—304 (1955).

Soient  $E$  un espace localement convexe,  $E'$  son dual,  $\Sigma$  un recouvrement de  $E$  par des ensembles bornés,  $E'_\Sigma$  l'espace  $E'$  muni de la  $\Sigma$ -topologie. Les AA. disent que



$E$  est  $\Sigma$ -symétrique si les polaires dans  $E$  des ensembles bornés de  $E'_\Sigma$  forment un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie initiale: cette notion est intermédiaire entre celle d'espace tonnelé (où  $\Sigma$  est l'ensemble des parties finies de  $E$ ) et celle d'espace intratonnelé (ou quasitonnelé), où  $\Sigma$  est l'ensemble de toutes les parties bornées de  $E$ . On peut énoncer des propriétés exactement analogues à celles des espaces tonnelés, pour les espaces  $\Sigma$ -symétriques. Les AA. remarquent enfin que, si  $E$  est un espace de Banach non réflexif, son dual  $E'$ , muni de  $\tau(E', E)$ , est semi-réflexif, mais non intratonnelé.

J. Dieudonné.

**Blair, Alexander:** Continuity of multiplication in operator algebras. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 209—210 (1955).

Es sei  $X$  ein lokalkonvexer Vektorraum.  $A$  eine Algebra von stetigen linearen Abbildungen von  $X$  in sich, die alle Abbildungen mit endlichdimensionalem Bildraum umfaßt. Es wird bewiesen, daß  $X$  ein normierter Raum ist, wenn die Multiplikation in  $A$  stetig ist bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Teilmengen von  $X$ .

G. Köthe.

**Schaefer, Helmut:** Positive Transformationen in lokalkonvexen halbgeordneten Vektorräumen. Math. Ann. **129**, 323—329 (1955).

This short note, which will be followed soon by a more elaborate treatment of the same subject, states and proves two extremely interesting theorems. The Fixpunktsatz of Schauder is, as it is well known, holding in Banach spaces only. The author shows that, under certain conditions, it can be extended to locally convex, complete, Hausdorff spaces provided they are ordered in the sense of Bourbaki. In such spaces  $p$ -completely continuous transformations may be defined: they are linear or non linear transformations mapping the intersection  $C \cap U$  of the cone of the non negative vectors,  $C$ , into a neighbourhood  $U$  of the origin. If  $T(M)$  does not contain the origin whenever  $\overline{M}$  does not, where  $M \subset C$ , the transformation is said to be strongly positive. In case such a transformation is linear, a certain study of the real spectrum, which is always bounded, makes it easy to prove the existence of at least one eigenvalue and of one positive eigenvector associated with it. In the non linear case, a stronger semi-norm  $p$  satisfying the condition  $p(x+y) \geq \sup(p(x), p(y))$  has to be introduced. It yields the desired result by application of Tychonoff's Fixpunktsatz.

C. Racine.

**Schaefer, Helmut:** Über die Methode der a priori-Schranken. Math. Ann. **129**, 415—416 (1955).

J. Schauder proved [Studia math. **2**, 7—9 (1930)] that the envelope of a compact, closed set in a Banach space is, in the sense of Bourbaki, precompact. He deduced easily from this proposition that a continuous transformation whose domain is a convex, closed subset  $H$  of a Banach space and whose range is a compact subset of  $H$  has a fixed point. N. Bourbaki has proved that the same proposition holds in a locally convex, complete, Hausdorff vector space (see N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, p. 6, this Zbl. **50**, 107). The author of this paper shows that this generalization of the first theorem of Schauder implies a similar generalization of the second. He shows also that in a locally convex, complete, Hausdorff vector space a completely continuous transformation (in the sense of Leray) either has one fixed point, or has an unbounded set of such points.

C. Racine.

**Darbo, Gabriele:** Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **24**, 84—92 (1955).

Die Arbeit behandelt eine Verallgemeinerung des Schauderschen Fixpunktsatzes [Studia math. **2**, 171—180 (1930)]. Zunächst wird  $\alpha(X)$  erklärt als die untere Grenze der positiven Zahlen  $\varepsilon$ , für die eine Zerlegung der abgeschlossenen Menge  $X$  eines vollständigen metrischen Raumes  $\Sigma$  in endlich viele Teile mit einem Durch-

messer  $< \varepsilon$  möglich ist. Es folgt eine Verallgemeinerung des Cantorsche Durchschnitssatzes: Ein nicht leerer kompakter Durchschnitt  $Y = X_1 X_2 \cdots X_n \cdots$  kann nachgewiesen werden, wenn für die abgeschlossenen, nicht leeren Teilmengen  $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$  von  $\Sigma$  gilt  $\lim \alpha(X_n) = 0$ . Unter einer  $\alpha$ -Kontraktion versteht man eine stetige Transformation  $x' = \xi(x)$  eines metrischen Raumes  $\Sigma$  auf sich selbst, wenn 1. eine abgeschlossene Menge aus  $\Sigma$  wieder auf eine abgeschlossene Menge abgebildet wird und 2. wenn für  $X \subset \Sigma$  und  $X' = \xi(X)$  gilt  $\alpha(X') \leq k_\xi \alpha(X)$  mit  $0 \leq k_\xi < 1$ . Mittels der in linearen, normalen Räumen geltenden Hilfssätze: a) eine abgeschlossene Menge  $X$  und ihre konvexe Hülle  $X^*$  haben den gleichen Durchmesser, b)  $\alpha(X) = \alpha(X^*)$ , wird das Haupttheorem bewiesen: Sei  $\xi$  eine  $\alpha$ -Kontraktion, definiert über einer konvexen Menge  $X$  eines vollständigen linearen und normalen Raumes. Sei  $\xi(X)$  abgeschlossen und  $\xi(X) \subset X$ , dann existiert mindestens ein Fixpunkt. Für die Anwendungen wichtig ist das Vergleichstheorem: Ist  $\xi$  eine  $\alpha$ -Kontraktion und  $\eta$  eine beliebige Transformation eines metrischen Raumes  $\Sigma$  und gilt für den Abstand  $(x_1, x_2)$  eines beliebigen Punktepaares  $x_1, x_2$  aus  $\Sigma$  stets  $(\eta(x_1), \eta(x_2)) \leq (\xi(x_1), \xi(x_2))$ , so ist  $\eta$  auch eine Kontraktion mit  $k_\eta \leq k_\xi$ . Weiter wird für Linearkombinationen mit reellen, konstanten Koeffizienten, sowie für zusammengesetzte  $\alpha$ -Kontraktionen die Abschätzung des Moduls  $k$  abgeleitet.

F. Selig.

**Sebastião e Silva, José:** Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni. Rend. Mat. e Appl. **14**, 388—410 (1955).

Modificate le nozioni di limite proiettivo e di limite induttivo di spazi localmente convessi, l'A. definisce gli spazi  $(M^*)$  e  $(LN^*)$ . Spazio  $(M^*)$  è ogni spazio localmente convesso esprimibile come limite proiettivo di una successione di spazi normati  $S_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) per rapporto ad applicazioni  $g_{m,n}$  tali che, qualunque sia  $n$ ,  $g_{n,n+1}$  trasformi la sfera di  $S_{n+1}$  in una parte relativamente compatta di  $S_n$ . Spazio  $(LN^*)$  è ogni spazio localmente convesso esprimibile come limite induttivo canonico di una successione  $(S_n)$  regolare di spazi normati, ove la successione  $(S_n)$  si chiama regolare quando: (I) per ogni  $n$   $S_n$  appartiene a  $S_{n+1}$  e la topologia di  $S_{n+1}$  induce in  $S_n$  una topologia meno fine di quella di  $S_n$ ; (II) qualunque sia  $n$ , la sfera di  $S_n$  è relativamente compatta in  $S_{n+1}$ . Vengono studiate le proprietà di  $(M^*)$  e  $(LN^*)$  e i rapporti tra queste due categorie di spazi attraverso il passaggio al duale.

S. Cinquini.

**Sebastião e Silva, J.:** Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions. Univ. Lisboa, Revista Fac. Si., II. Ser. A **4**, 79—186 (1955).

Die Schwartzsche Theorie der Distributionen läßt sich, wie Ref. (dies. Zbl. **50**, 338) gezeigt hat, in einfacher Weise auf rein „algebraischem“, konstruktivem Wege begründen. In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. eine breit angelegte Darstellung dieser Konstruktion und verbindet sie mit einer „axiomatischen“ Charakterisierung der Distributionen. Hierauf gründet er eine naturgemäße Einführung der topologischen Struktur des Distributionenraumes und eine besonders abgerundete „lineare“ Analyse der Distributionen. — § 1: L'extension algébrique. Die Konstruktion der additiven Gruppe  $\mathcal{E}_\omega(A)$  der Distributionen endlicher Ordnung über einem beschränkten Intervall  $A \subset \mathbb{R}^n$  wird einem allgemeinen algebraischen Erweiterungsproblem untergeordnet. Eine verallgemeinerte limite-projective-Bildung führt zur dann additiven Gruppe  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$  der (allgemeinen) Distributionen über einer beliebigen offenen Punktmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Sachlich findet sich dabei gegenüber der zitierten Arbeit des Ref. nichts wesentlich Neues. Der Paragraph schließt mit einer axiomatischen Charakterisierung der Distributionentheorie. Die ersten 6 Axiome sind naturgemäß und unmittelbar einleuchtend. Zur eindeutigen Charakterisierung der Distributionentheorie müssen jedoch zwei Minimalforderungen hinzukommen. Die in den Axiomen 7, 8 gegebene Formulierung derselben findet Ref. indessen wenig befriedigend; man kann sie leicht als Sätze aus wesentlich

„invarianteren“ Postulaten herleiten. — § 2: Le prolongement topologique. Entsprechend dem Vorgehen in § 1 erscheint die Einführung der topologischen Struktur von  $\mathfrak{C}_\omega(\mathcal{A})$  als Spezialfall eines allgemeinen topologischen Fortsetzungsprozesses. Die Topologie von  $\mathfrak{C}_\pi(\mathcal{Q})$  wird wieder durch Bildung des limite projective gewonnen. Die Haupteigenschaften dieser Topologie folgen aus Arbeiten des Verf. über lokal konvexe lineare Räume, deren Topologie durch ihre konvergenten Folgen definiert werden kann (dies. Zbl. 53, 83; vorsteh. Referat). — § 3: L'analyse linéaire des distributions. Dieser Paragraph ist auf eine „Integraldarstellung“ der Distributionen gegründet:

$$T = \int_{\Omega} T_u \delta(u) du, \quad T \in \mathfrak{C}_\pi(\mathcal{Q}).$$

Dabei sei  $\delta(u) \in \mathfrak{C}_\pi(\mathcal{Q})$  die Dirac-Distribution in bezug auf den Punkt  $u \in R^n$ ; das Integral wird durch Approximation von  $T$  mittels unbeschränkt differenzierbarer Funktionen erklärt. Das ist eine interessante Interpretation der bekannten Faltungsgleichung  $T = T * \delta$ . — Mit Hilfe analog gebildeter Integrale gibt Verf. weiter die allgemeine Form einer stetigen linearen Abbildung  $\Phi$  von  $\mathfrak{C}_\omega(\mathcal{A})$  in einen beliebigen vollständigen, lokal konvexen, linearen Raum  $E$  (der allgemeine Fall einer in  $\mathfrak{C}_\pi(\mathcal{Q})$  definierten Abbildung wird weitgehend hierauf zurückgeführt):

$$\Phi(T) = \int_{\mathcal{A}} T_u \varphi(u) du \quad \text{mit } \varphi(u) = \Phi[\delta(u)].$$

Als erste Anwendung dieser Formel ergibt sich die Dualität von  $\mathfrak{C}_\pi(\mathcal{Q})$  und dem Schwartzschen  $(D_{\mathcal{Q}})$ , und als zweite Anwendung werden die Faltungen mit festen Distributionen als die einzigen linearen stetigen Abbildungen des Distributionsraumes in sich ermittelt, die mit den Ableitungen vertauschbar sind. *H. König.*

**Sebastião e Silva, J.:** Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions. *Gaz. Mat., Lisboa* 15, Nr. 59, 6—10 (1954).

Kurzer Ausszug aus einer gleichnamigen ausführlichen Darstellung des Verf. (vgl. vorstehendes Referat), im wesentlichen aus deren umfangreicher Einleitung und dem Axiomensystem des Verf. für die Theorie der Distributionen aus § 1 bestehend. *H. König.*

**Ślówikowski, W.:** A generalization of the theory of distributions. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* 3, 3—6 (1955).

Der Grundgedanke dieser Arbeit ist, ebenso wie der der vorstehend referierten von J. Sebastião e Silva, die Konstruktion der Schwartzschen Distributionen in einen allgemeinen algebraischen Erweiterungs- und topologischen Fortsetzungsprozeß einzuordnen. Das „Fundamental Algebraic Theorem“ ermöglicht die Konstruktion der Distributionen endlicher Ordnung, wie auch die der Mikusińskichischen Operatoren (dies. Zbl. 38, 278) und des Quotientenkörpers eines Integritätsbereiches. Das „Fundamental Topological Theorem“ liefert, wie bei J. Sebastião e Silva, die topologische Struktur der Distributionen endlicher Ordnung. Beide Sätze werden ohne Beweis angegeben. — Ref. sieht indessen in der Aufstellung dieses Formalismus für die Distributionstheorie keinen Fortschritt gegenüber seiner Begründung (dies. Zbl. 50, 338); insbesondere gewinnt man damit, zumal bei mehreren unabhängigen Variablen, keine unmittelbar einleuchtende Motivierung der gewählten Konstruktion. *H. König.*

**Kahane, Jean-Pierre:** Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles. *Ann. Inst. Fourier* 5, 39—130 (1955).

Soit  $C$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur la droite réelle muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Pour  $f \in C$  soit  $\tau(f)$  le sous-espace vectoriel fermé de  $C$  engendré par des translatées  $f(x+a)$  ( $-\infty < a < \infty$ ) de  $f(x)$ . Si  $\tau(f) \neq C$ , la fonction  $f$  est dite moyenne-périodique (L. Schwartz, ce Zbl. 30, 150).  $f$  est donc moyenne-périodique si et seulement si il existe une mesure



de Radon  $\mu$ , à support compact et telle que  $(*) \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) d\mu(x) = 0$  pour  $-\infty < a < \infty$ . La transformée généralisée de Fourier-Carleman  $F(w)$  d'une fonction moyenne-périodique  $f$  est définie de la manière suivante: pour  $\mu$  satisfaisant  $(*)$  posons  $g(x) = \int_{-\infty}^0 f(y) d\mu(y-x)$  et soit  $G(w) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-wx} g(x) dx$ ,  $M(w) =$

$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-wx} d\mu(x)$ , alors  $F(w) = G(w)/M(w)$ . Si  $f(x) = O(e^{ax})$ , alors  $F(w)$

n'est autre que la transformée de Carleman (L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent, Uppsala 1944).  $F(w)$  est une fonction méromorphe et  $x^p e^{i\lambda x} \in \tau(f)$  si et seulement si  $\lambda$  est un pôle de  $F(w)$  d'ordre  $\geq p$ . D'ici suit la possibilité de la synthèse harmonique, découverte par L. Schwartz (loc. cit.):  $\tau(f)$  est engendré par les  $x^p e^{i\lambda x}$  qu'il contient. D'autres résultats sur les fonctions moyenne-périodiques sont aussi obtenus. — Soit  $A$  une suite de nombres complexes  $\lambda$  distincts et  $\Omega$  un ensemble ouvert du plan complexe.  $H_{\Omega}$  étant l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans  $\Omega$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact  $\subset \Omega$ , soit  $H_{\Omega}(A)$  le sous-espace fermé engendré par les  $e^{i\lambda z}$  avec  $\lambda \in A$ . L'auteur s'occupe du problème de trouver un ouvert  $G \supset \Omega$  tel que toute fonction de  $H_{\Omega}(A)$  se prolonge en une fonction de  $H_G(A)$ . Ce problème a été déjà considéré par Leontiev (ce Zbl. 45, 351) et l'A. retrouve une partie de ses résultats moyennant une méthode qui est basée sur la théorie due à Pólya des fonctions du type exponentiel (voir Boas, Entire functions, New York 1954, Chap. V.). Il y a des résultats, trop compliqués pour être énoncés en détail ici, dans chacun des cas suivants: 1°  $A$  négative, 2°  $A$  contenue dans un angle saillant, 3°  $A$  symétrique s'accumulant angulairement sur l'axe réel; à chacun de ces cas correspond un théorème lorsque  $A$  est mesurable et un autre lorsque  $A$  est de densité supérieure finie. [Si  $N(t) = \sum_{|\lambda| \leq t} 1$ ,  $D(t) = t^{-1}N(t)$ , la densité supérieure (resp. inférieure) est  $D^+ = \limsup_{t \rightarrow \infty} D(t)$  (resp.  $D_- = \liminf_{t \rightarrow \infty} D(t)$ ); si  $D^+ = D_- = D$ , alors  $A$  est dit mesurable de densité  $D$ ]. Voici un cas particulier intéressant dans le cas 3°:  $A^*$  étant la densité maximum de Pólya de  $A$ , définie par  $A^* = \lim_{\xi \rightarrow 1-0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \{(N(t) - N(\xi t))/(t - \xi t)\}$ , toute

fonction analytique sur l'intervalle  $(-A, A)$  et approchable par les  $e^{i\lambda x}$  ( $\lambda \in A$ ), est prolongeable en une fonction analytique sur toute la droite et approchable par les  $e^{i\lambda x}$  ( $\lambda \in A$ ), dès que  $2A > \pi A^*$ . (Il y a un théorème analogue pour les fonctions qui au lieu d'être analytiques ne sont que suffisamment dérivables.) D'ici suit la preuve d'une conjecture de L. Schwartz [Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 6, 111—174 (1942)]:  $L$  étant la borne supérieure des  $A$  tels que le système  $e^{i\lambda x}$  ( $\lambda \in A$ ) soit total dans  $C(-A, A)$ , on a  $2L = \pi A^*$ . — Soit  $C(A)$  le sous-espace fermé de  $C$  engendré par les  $e^{i\lambda x}$  ( $\lambda \in A$ ). On suppose les  $\lambda$  rangés en ordre non décroissant en module. Etant donné  $I(\alpha) > 0$  on dit qu'une classe  $K$  de fonctions est quasi-ana-

lytique- $I(\alpha)$  (q.-a.- $I(\alpha)$ ) si  $\int_0^{\alpha} |f(x)| dx < I(\alpha)$ ,  $f \in K$ , impliquent  $f(x) = 0$ .

L'auteur se pose le problème de donner des conditions pour que  $C(A)$  soit une classe q.-a.- $I(\alpha)$ . Voici quelques résultats: 1. Soit  $\sum_{\lambda \in A} |\lambda|^{-1} < \infty$  et supposons qu'une des conditions suivantes est satisfaite: A)  $A$  est symétrique et réelle, B)  $A$  est symétrique et la suite  $|\lambda_{2j}|/j$  non-décroissante, C)  $|\lambda_j|/j^2$  est non-décroissante. Soit  $l_j > 0$ ,  $l_j \rightarrow \infty$ ,  $\sum l_j/|\lambda_j| < \infty$ . Si  $\liminf_{\alpha \rightarrow 0} (I(\alpha)/\alpha \min_n (l_1 \cdots l_n \alpha^n)) < \infty$ , alors

$C(A)$  est q.-a.- $I(\alpha)$ . 2. Soit  $A$  réelle et posons  $\bar{D}(r) = r^{-1} \int_0^r D(t) dt$ . Soit  $r(\alpha)$  une fonction décroissante ( $0 < \alpha < \alpha_0$ ) et  $\alpha(r)$  sa fonction inverse. Si pour une infinité

de valeurs  $r \rightarrow \infty$  on a  $\lambda(r) \geq 2\pi \overline{D}(r)$ , alors les fonctions bornées de  $C(1)$  forment une classe q.-a.- $I(\lambda)$  pour  $I(\lambda) = e^{-\lambda r(\alpha)}$ . Ce théorème contient les résultats antérieurs de Levin et Lefschetz, Levin (ce Zbl. 36, 55), Hirschman et Jenkins (ce Zbl. 38, 45). 3. Soient  $\lambda$  et  $\alpha(r)$  comme dans le cas précédent. Si  $D' < \infty$  et

$\limsup_{r \rightarrow \infty} \int_0^r t^{-1} \{\alpha(t) - \pi D(t)\} dt < \infty$  alors la même conclusion subsiste. — Un

autre groupe de théorèmes concerne la quasi-analyticité au sens de Denjoy-Carleman: on donne des conditions pour que si une fonction indéfiniment dérivable appartient à  $C(1)$  et satisfait à  $f^{(n)}(x) \leq M_n$ ,  $f^{(0)}(0) = 0$ , alors on ait  $f(x) = 0$ . Des théorèmes réciproques sont aussi donnés. — A la fin du travail l'auteur généralise de plusieurs manières différentes un résultat de W. H. J. Fuchs (cf. Boas, loc. cit., p. 157). Voici un des énoncés: Soit  $\lambda$  positive et vérifiant  $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$ .

Soit  $k(r)$  une fonction non-décroissante telle que  $\limsup_{r \rightarrow \infty} \int_0^r t^{-1} \{k(t) - D(t)\} dt < \infty$ .

Soit  $\Psi(\xi)$  ( $\xi = \xi + i\eta$ ) une fonction holomorphe dans le demiplan  $\xi > 0$ , vérifiant  $\Psi(\lambda_n) = 0$  et  $\log |\Psi(\xi)| \leq \psi(\xi)$ . Si en posant  $q(u) = \max_{\xi > 0} (u\xi - \psi(\xi))$  on a

$$\int_0^\infty q(u) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^u d\alpha / k(\varphi'(\lambda)) \right\} du = \infty,$$

alors  $\Psi(\xi) = 0$ . Ces résultats s'appliquent immédiatement aux problèmes suivants:

1. l'approximation des fonctions continues, nulles à l'infini, par des combinaisons linéaires de  $x^{k_n} P(x)$ , 2. l'unicité du problème des moments généralisé de Stieltjes  $\left( \int_0^\infty x^{k_n} d\mu(x) = M_n \right)$  et de Hamburger  $\left( \int_{-\infty}^\infty x^{k_n} d\mu(x) = M_n \right)$ , 3. la quasi-analyticité généralisée sur la droite entière (c.-à.-d. si  $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$  pour  $-\infty < x < \infty$  et  $f^{(k_n)}(0) = 0$  impliquent  $f(x) = 0$ ). — La rédaction trop sommaire rend la lecture du travail très difficile et il y a un grand nombre de fautes d'impression.

J. Horváth.

**Lorentz, G. G.:** Majorants in spaces of integrable functions. Amer. J. Math. 77, 484—492 (1955).

If  $X$  is a certain space of integrable functions over  $(0, 1)$ ,  $X$  is said to have the Hardy-Littlewood property (or shortly  $X \in HLP$ ) if  $f \in X$  always implies, that the function

$$\theta(x; f) = \sup_{0 \leq y \leq 1} \int_x^y f(t) dt / (y - x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

exists almost everywhere and  $\theta(f) \in X$ . The most general spaces  $X$  considered by the author are the Köthe-Toeplitz spaces  $X(C)$  defined as follows. Let  $C$  be some class of integrable nonnegative functions  $c(x)$  on  $(0, 1)$ , which contains a function greater than a positive constant. A function  $f(x)$  belongs to  $X(C)$  and has norm  $\|f\|$  if

$$\|f\| = \sup_{c \in C} \int_0^1 |f(x)| c(x) dx < \infty.$$

$C$  is called rearrangement-invariant if with each  $c(x) \in C$  any of its rearrangements (see for example G. G. Lorentz, Bernstein Polynomials, this Zbl. 51, 50) also belong to  $C$ . Special cases of spaces  $X(C)$  with rearrangement-invariant  $C$  are spaces  $A(\Phi)$ ,  $M(\Phi)$  (see G. G. Lorentz, op. cit.) and Orlicz spaces  $L_\Phi$ . The authors problem is to give necessary and sufficient conditions for  $C$  in order that a Köthe-Toeplitz space  $X(C)$  should have the Hardy-Littlewood property. The author obtains the following theorems: (1) If  $C$  is rearrangement-invariant, then  $X(C) \in HLP$  if and

only if for some constant  $A$ ,  $\|\tilde{c}\|_{X'} \leq A$  for all  $c \in C$ . Here is  $\tilde{c}(x) = \int_x^1 c(t) t^{-1} dt$

and  $X'$  denotes the dual space of  $X$  (i. e. the space of all integrable functions  $g$  such that  $\int_0^1 f g dx$  exists for all  $f \in X(C)$ . (2) A space  $A(\Phi)$  has the Hardy-Littlewood property if and only if  $\limsup_{a \rightarrow 0} \Phi(2a)/\Phi(a) < 2$ . (3) A space  $M(\Phi)$  has the Hardy-

Littlewood property if and only if, for some constant  $A$ ,  $\int_0^a \Phi(x) x^{-1} dx \leq A \Phi(a)$ , for  $0 \leq a \leq 1$ . (4) A space  $L_\Phi$  has the Hardy-Littlewood property if and only if the conjugate function  $\Psi$  satisfies  $\Psi(2b) \leq M\Psi(b)$  ( $b \geq b_0$ ) for some constants  $M$  and  $b_0 > 0$ . K. Tandori.

**Rooney, P. G.:** An application of some spaces of Lorentz. Canadian J. Math. **7**, 314—321 (1955).

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction  $f(s)$  définie pour  $s > 0$  soit transformée de Laplace d'une fonction appartenant à l'un des espaces  $A(x)$ ,  $M(x)$  de Lorentz (ce Zbl. **35**, 356) sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ . Ces conditions font intervenir les opérateurs d'inversion de Widder-Post

$$L_{k,t} f(s) = (-1)(k!)^{-1} (k/t)^{k+1} f^{(k)}(k/t). \quad J. Dixmier.$$

**Alexiewicz, A. and W. Orlicz:** On a theorem of C. Carathéodory. Ann. Polon. Math. **1**, 414—417 (1955).

**C:** Banach space of the continuous functions  $\varphi = \varphi(u)$  defined on  $[\alpha, \beta]$ .  $S$ : dense subset of  $[\alpha, \beta]$ .  $s(t)$ : (Lebesgue) measurable function defined on  $[a, b]$ .  $\varphi(t, u)$ : function defined for  $t \in [a, b]$ ,  $u \in [\alpha, \beta]$ , continuous in  $u$  for fixed  $t$  and measurable in  $t$  for fixed  $u \in S$ .  $\varphi(t, -)$  is regarded as a mapping of  $[a, b]$  into  $C$  (vector-valued function). The set  $\Gamma$  of the functionals  $\gamma_v$  defined as  $\gamma_v \varphi = \varphi(v)$  for  $v \in S$  being such that  $\|\gamma_v\| = 1$  and  $\sup \|\gamma_v \varphi\| = \|\varphi\|$ , a theorem of B. J. Pettis (this Zbl. **21**, 326) asserts the Bochner measurability of  $\varphi(t, -)$ . More precisely, assuming  $|\varphi(t, u)| \leq s(t)$ , there exist  $(t, u)$ -continuous functions  $\varphi_n(t, u)$  such that  $|\varphi_n(t, u)| \leq s(t)$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\alpha \leq u \leq \beta} |\varphi_n(t, u) - \varphi(t, u)| = 0$  for almost

every  $t \in [a, b]$ . The purpose of the paper is to use this approximation theorem to give a new proof of the following theorem of C. Carathéodory: If  $s(t)$  is summable and  $|\varphi(t, u)| \leq s(t)$ , then there exists a function  $y(t)$ ,  $p < t < q$ , satisfying the differential equation  $y' = \varphi(t, y)$  almost everywhere and passing through the point  $(\tau, \eta)$ .  $p$  and  $q$  are expressed in terms of  $s(t)$ . Sketch of the proof: Consider the equation  $y' = \varphi_n(t, y)$ ,  $y(\tau) = \eta$ , and its solution  $y_n(t)$ . Arzela's theorem applied to the differential equation in integral form yields a sequence  $\{y_{n_k}(t)\}$  converging uniformly to the desired function  $y(t)$  on every interval interior to  $(p, q)$ .

Chr. Pauc.

**MacNeerney, J. S.:** Stieltjes integrals in linear spaces. Ann. of Math., II. Ser. **61**, 354—367 (1955).

This is a study of Stieltjes-type integrals among functions from the real numbers (i) to a linear topological space  $S$ , and (ii) to a class  $B$  of continuous linear transformations from  $S$  to  $S$ . Let  $S$  be a linear normed complete or LNC space (Banach space) with the norm of a point  $x$  of  $S$  denoted by  $\|x\|$ . For  $T$  in  $B$  and  $x$  in  $S$ ,  $Tx$  denotes the image of  $x$  under  $T$ ;  $B$  is an LNC space with norm  $|T| = \text{LUB } \|Tx\|$  for  $\|x\| \leq 1$ . For functions to  $S$  or to  $B$ , the concepts of boundedness and bounded variation, as well as continuity, are interpreted in terms of the norm in  $S$  or in  $B$ , respectively. If  $E, F, G$  is a triple of functions from the real numbers to  $B$  and  $h$  is a function from the real numbers to  $S$  and  $[a, b]$  is a closed number interval, then

$\int_a^b G \cdot dh$  and  $\int_a^b F \cdot dG \cdot h$  is a Riemann-type limit in  $S$  of appropriate approxi-

mating sums, while  $\int_a^b E \cdot dF \cdot G$  is the element  $T$  of  $B$  defined by  $Tx =$



$\int_a^b E(u) \cdot dF(u) \cdot [G(u) x]$  for  $x$  in  $S$ . The contents of this paper are as follows:

(I) Some elementary theorems about these integrals are given. (II) The theory of Wall (this Zbl. 55, 92) of harmonic matrices is extended to a theory of harmonic operators. The relation (A)  $M(s, t) = 1 - \int_s^t dF(u) \cdot M(u, t)$  defines a one-to-one correspondence between the class of harmonic operators  $M$  and the class of continuous functions  $F$  from the real numbers to  $B$ , of bounded variation on each interval, such that  $F(0) = 0$ . The concept of continuous product, as a Riemann-type limit in  $B$ , is used to obtain the relation  $M(a, b) = \prod_a^b (1 + dF)$  for real  $a, b$ , where  $M$  and  $F$  correspond as in (A). (III) The non-linear integral equation

$$P(t) = Q - \int_k^t P \cdot dF_{21} \cdot P - \int_k^t P \cdot dF_{22} - \int_k^t dF_{11} \cdot P - \int_k^t dF_{12},$$

where each  $F_{ij}$  satisfies the same conditions as  $F$  of (A), is studied. (IV) Derivatives of Nevanlinna (this Zbl. 51, 343) are connected with path integrals in  $S$  and it is proved that if  $D$  is a locally convex, connected set in  $S$  and  $G$  is a continuous function from  $D$  to  $B$ , then, in order that there exist a point function  $f$  from  $D$  to  $S$  such that  $f' = G$ , it is necessary and sufficient that  $\int_0^1 G(z) \cdot dz = 0$  for each function  $z$  from the number interval  $[0, 1]$  to  $D$ , continuous and of bounded variation on  $[0, 1]$ , such that  $z(0) = z(1)$ . E. Frank.

**Henstock, R.:** Linear functions with domain a real countably infinite dimensional space. Proc. London math. Soc., III. Ser. 5, 238—256 (1955).

The author establishes the following theorems, in which the space of all real bounded sequences  $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  is denoted by  $(m)$ , and  $Q_\omega$  denotes the subset in which  $x_n \leq \frac{1}{2}$  for every  $n$ ; in  $Q_\omega$  there is defined a measure  $L_\omega(E)$  of a set  $E$ , while  $L_n(E)$  denotes the measure in a linear  $n$ -dimensional subspace of  $(m)$ . Theorem 1: The necessary and sufficient condition on a real sequence  $\{a_n\}$ , in order that  $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$  should be convergent almost everywhere in  $Q_\omega$ , is that

$\sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty$ . —  $J(\xi)$  denotes a real linear function, measurable but not necessarily

continuous in  $Q_\omega$ , defined and finite for some real bounded sequences  $\xi$ ; if this function depends on a real parameter  $t$ , it is denoted by  $J(t, \xi)$ . The  $\xi$  with  $x_n = 1$  and  $x_m = 0$  ( $m \neq n$ ) is denoted by  $\Phi^n$ . Theorem 2: A linear measurable function  $J(\xi)$  that exists in a set of positive measure in  $Q_\omega$  exists almost everywhere in  $Q_\omega$

and satisfies  $\sum_{n=1}^\infty J^2(\Phi^n) < \infty$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} J(\xi_n'') = 0$  almost everywhere in  $Q_\omega$ ,

where  $\xi_n'' = \{0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, \dots\}$ . Conversely, if  $J(\xi)$  satisfies the above two conditions, then  $J(\xi)$  is defined finitely, for almost all  $\xi$  of  $Q_\omega$ , by the series

$\sum_{n=1}^\infty J(\Phi^n) x_n$ , where  $\xi = \{x_n\}$ . Corollary: A linear function  $J(\xi)$  is bounded

in the Hilbert space  $\sigma_2$  of sequences with real  $x_n$  and convergent  $\sum_{n=1}^\infty x_n^2$  if, and

only if, it can be extended to a set of positive measure in  $Q_\omega$ . Theorem 3: Let  $J(t, \xi)$  be linear in  $\xi$  and measurable in  $(t, \xi)$  for  $t \geq 0$  and  $\xi$  in  $Q_\omega$ . If to almost all  $\xi$  in  $Q_\omega$  there corresponds a set  $E_1$  of  $t$ , depending on  $\xi$ , and of measure zero, such that (i)  $J(t, \xi)$  exists when  $t$  is not in  $E_1$ , then, for almost all  $t$ ,

$$\|J(t)\|^2 \equiv \sum_{n=1}^\infty J^2(t, \Phi^n) < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J(t, \xi_n'') = 0$$

almost everywhere in  $Q_\omega$ , and conversely: (ii)  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |J(t, \xi)| < \infty$  for  $t$  not in  $E_1$ , then  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|J(t)\| < \infty$ , where we omit a set  $E_2$  of  $t$  of measure zero, i. e., there is an  $M > 0$  such that for all  $t$  not in  $E_2$ , with  $t$  greater than some  $T > 0$ ,  $\|J(t)\| \leq M$ ; (iii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t, \xi)$  exists for  $t$  not in  $E_1$ , then  $J_n^* = \lim_{t \rightarrow \infty} J(t, \Phi^n)$  exists for  $n = 1, 2, \dots$ , and  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|J(t)\| < \infty$ , where in each limit we omit a set of  $t$

of measure zero; and from these,  $\sum_{n=1}^{\infty} (J_n^*)^2 < \infty$ ; (iv)  $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t, \xi) = 0$  for  $t$  not in  $E_1$ , then  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|J(t)\| = 0$ , where  $t$  omits a set of measure zero. The author defines upper and lower thickness of a set  $E$  in  $[0, T)$ , relative to  $T-$ ; their value, when equal, is the thickness of  $E$ .  $E$  is thick if its thickness is 1, and is thin if its thickness is 0. Definitions are also given of  $\limsup_{t \rightarrow T-} \text{ap } f(t)$  and  $\liminf_{t \rightarrow T-} \text{ap } f(t)$ .

**Theorem 4:** Let  $J(t, \xi)$  be linear in  $\xi$ , and measurable in  $(t, \xi)$ , for  $t$  in a thick set  $E_3$ . (i) If for all, or almost all,  $\xi$  in  $Q_\omega$ ,  $J(t, \xi)$  exists when  $t$  lies in a thick set depending on  $\xi$ , then, almost everywhere in  $Q_\omega$ ,  $\|J(t)\| < \infty$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} J(t, \xi_n') = 0$

for each  $t$  in a thick set. Conversely, these two conditions are sufficient for  $J(t, \xi)$  to exist almost everywhere in  $Q_\omega$ , for  $t$  in a thick set. (ii) If  $\limsup_{t \rightarrow T-} \text{ap } |J(t, \xi)| < \infty$

almost everywhere in  $Q_\omega$ , then  $\limsup_{t \rightarrow T-} \text{ap } \|J(t)\| < \infty$ , i. e.,  $\|J(t)\| \leq M < \infty$

for  $t$  in a thick set. (iii) If  $\lim_{t \rightarrow T-} \text{ap } J(t, \xi)$  exists almost everywhere in  $Q_\omega$ , then  $J_n \equiv \lim_{t \rightarrow T-} \text{ap } J(t, \Phi^n)$  exists for  $n = 1, 2, \dots$ , and  $\limsup_{t \rightarrow T-} \text{ap } \|J(t)\| < \infty$ . From

these,  $\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2 < \infty$ . (iv) If  $\lim_{t \rightarrow T-} \text{ap } J(t, \xi) = 0$  almost everywhere in  $Q_\omega$ , then  $\lim_{t \rightarrow T-} \text{ap } \|J(t)\| = 0$ . The next two theorems show that the necessary conditions in

(ii), (iii), (iv) of Theorems 3, 4 are not sufficient. **Theorem 5:** Let  $\{J_n(\xi)\}$  be a sequence of linear functions with  $\|J_n\| < \infty$  for each  $n$ . Then, for almost all  $\xi$  in  $Q_\omega$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |J_n(\xi)| \cdot \|J_n\|^{-1} \log^{-1/2} n \leq K,$$

where  $K$  is an absolute constant independent of the particular sequence  $\{J_n(\xi)\}$ , and  $1/(64 \log 4) \leq K^2 \leq e/4$ . **Theorem 6:** If  $\|J_n\|^2 \leq M$  for  $n = 1, 2, \dots$ , and

if  $a_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ , then  $\exp \{\mu J_n^2(\xi)\} = O(a_n^{-1})$  almost everywhere in  $Q_\omega$ ,

where  $\mu$  is any fixed number less than  $4/(eM)$ . — Finally, the last two theorems are applied to the Borel property. A  $T$ -(or regular) matrix  $(b_{n,k})$  is said to have the

Borel property if  $\theta_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} s_k \rightarrow \frac{1}{2}$  for almost all sequences  $\{s_k\}$  of 0's and 1's.

The author then gives the new result [Theorem 7, (ii)]: If, for each  $\varepsilon > 0$ , there is some series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$  with  $a_n > 0$ , such that  $\sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}^2 = \varepsilon \{\log(a_n^{-1})\}^{-1}$ , then  $(b_{n,k})$  has the Borel property.

R. G. Cooke.

**Blum, E. K.:** A theory of analytic functions in Banach algebras. Trans. Amer. math. Soc. 78, 343—370 (1955).

In this paper, the author develops the theory of analytic functions on commutative Banach algebras over the field of complex numbers. Let  $B$  be such a Banach algebra. Let  $f(z)$  be a function defined in a neighbourhood of a point  $z_0$  in  $B$  with values in  $B$ . Let there exist an element  $f'(z_0)$  in  $B$  such that for every  $\varepsilon > 0$ , there is a  $\delta > 0$  having the property that

$$\|f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)\| \leq \varepsilon \|z - z_0\|$$

for all  $z$  in  $B$  with  $\|z - z_0\| < \delta$ . Then the element  $f'(z_0)$  is called the derivative of  $f(z)$  at  $z_0$ . The function  $f(z)$  is said to be analytic at  $z_0$  if it has a derivative at every point in some neighbourhood of  $z_0$ . With this definition of analyticity due to Lorch [Trans. Amer. math. Soc. **54**, 414—425 (1943)] and which is stronger than Fréchet differentiability, the author recovers several of the classical properties known to be true for analytic functions of a complex variable. The Cauchy integral theorem, the Cauchy formula for the value of the function in terms of a contour integral and the Taylor expansion theorems are all valid for analytic functions as defined above. But when the analogue of Laurent expansion is considered, the limitation imposed by the fact that every Banach algebra other than the system of complex numbers contains non-zero singular elements makes itself felt. All the same, a Laurent expansion theorem is proved with suitable restrictions. The notions of analytic continuation, singularity of analytic function based on this notion, poles and essential singularities are discussed. Unlike that in the classical case, a singularity (termed a plane-singularity in the paper) as defined may never be isolated. For instance this is the case when the set of regular elements is dense in  $B$  and the radical is the single element zero (the author gives examples of Banach algebras where the set of regular elements is dense and where it is non-dense). Under the same conditions, the author proves that  $f(z)$  tends to infinity as  $z \rightarrow b$ , a pole. But Weierstrass theorem regarding essential singularity may fail entirely — it can fail to approach any value of the form  $\lambda e$  ( $e$  is the unit element) for all  $\lambda$  not equal to a specific number. The paper concludes with a detailed discussion of polynomials over  $B$  and rational functions which are reciprocals of polynomials. For a polynomial, the fundamental theorem of algebra (every polynomial of degree  $n$  has  $n$  roots) does not in general hold good. It can happen that there are no zeros and also there can be infinity of zeros. Reciprocals of first degree polynomials and second degree polynomials which are products of linear factors are examined in great detail and it is noted that the theory could be extended to reciprocals of polynomials which could be expressed as a product of linear factors.

V. Ganapathy Iyer.

**Matsushita, Shin-ichi: Positive functionals and representation theory on Banach algebras. I.** J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., Ser. A **6**, 1—18 (1955).

Démonstrations des résultats annoncés dans une note antérieure (ce Zbl. **52**, 121).

A. Revuz.

**Tomita, Minoru: Banach algebras generated by a bounded linear operator.** Math. J. Okayama Univ. **4**, 97—102 (1955).

Soient  $A$  une algèbre de Banach commutative à élément unité, et  $z \in A$ , les fractions rationnelles en  $z$  étant partout denses dans  $A$ . Soit  $\mathfrak{M}$  l'ensemble des sous-algèbres de Banach de  $A$  contenant 1 et  $z$ . Pour  $B \in \mathfrak{M}$ , soit  $\mathfrak{S}_B$  le spectre de  $z$  dans  $B$ . Soit  $\mathfrak{N}$  l'ensemble des parties compactes du plan complexe qui sont réunion de  $\mathfrak{S}_A$  et de composantes connexes du complémentaire de  $\mathfrak{S}_A$ . Alors,  $B \rightarrow \mathfrak{S}_B$  est une application biunivoque de  $\mathfrak{M}$  sur  $\mathfrak{N}$ .

J. Dixmier.

**Keown, E. R.: Reflexive Banach algebras.** Proc. Amer. math. Soc. **6**, 252—259 (1955).

Eine kommutative halbeinfache Banachalgebra  $B$  heißt reflexiv, wenn gilt: a) Die Elemente von  $B$  bilden einen reflexiven Banachraum; b) der konjugierte Raum  $B'$  ist eine kommutative halbeinfache Banachalgebra; c) ist  $I$  ein Ideal in  $B$ , so ist der Annihilator  $A'$  von  $I$  in  $B'$  ebenfalls ein Ideal; ist  $B$  die direkte Summe der Ideale  $I_1$  und  $I_2$  und ist  $x_i = y_i + z_i$ ;  $y_i \in I_1$ ,  $z_i \in I_2$ ,  $i = 1, 2$ , so folgt aus  $\|y_1\| = \|y_2\|$  und  $\|z_1\| = \|z_2\|$  stets  $\|x_1\| = \|x_2\|$ . Es wird bewiesen, daß zu einer kommutativen halbeinfachen separablen reflexiven Banachalgebra  $B$  ein  $p > 1$  und eine Folge von Konstanten  $d_i$  existiert, so daß  $B$  der Banachalgebra der Folgen  $(\varepsilon_i)$  mit koordinatenweiser Multiplikation und  $\|x\| = \left( \sum_{i=1}^{\infty} d_i |\varepsilon_i|^p \right)^{1/p} < \infty$  isomorph wird.

G. Köthe.



Heider, L. J.: A note on a theorem of K. G. Wolfson. Proc. Amer. math. Soc. 6, 305—308 (1955).

Es sei im folgenden  $K$  eine kommutative  $B^*$ -Algebra mit Einselement  $e$ ,  $\|e\| = 1$ , und mit  $\|k^* k\| = \|k\|^2$  für alle  $k \in K$ . Eine (hermitesche) Projektion  $e_\xi$  in  $K$  heißt minimal, wenn  $k e_\xi = \lambda e_\xi$  für alle  $k \in K$  und geeignete komplexe  $\lambda$  gilt. Mit  $X$  sei eine Indexmenge  $\{\xi\}$  bezeichnet, so daß  $e_\xi$  alle minimalen Projektionen von  $K$  durchläuft. Es wird bewiesen:  $K$  ist dann und nur dann norm- und  $*$ -isomorph einer  $B^*$ -Algebra  $B(\bar{X})$ , bestehend aus allen komplexen beschränkten Funktionen auf einer Menge  $\bar{X}$ , wenn das System  $\{e_\xi\}$ ,  $\xi \in X$ , aller minimalen Projektionen in  $K$  folgende Bedingungen erfüllt: a) Zu jedem  $k \neq 0$  aus  $K$  gibt es ein  $e_\xi$  mit  $k e_\xi \neq 0$ , b) Zu jeder Teilmenge  $A \subset X$  existiert eine Projektion  $e_A$  in  $K$  mit  $e_A e_\xi = e_\xi$  für  $\xi \in A$  und  $e_A e_\xi = 0$  für  $\xi \notin A$ . Es kann  $\bar{X}$  gleich  $X$  genommen werden. Diese notwendige und hinreichende Bedingung läßt sich auch so formulieren: Es sei  $C(R)$  die zu  $K$  isomorphe Algebra der komplexen stetigen Funktionen auf dem kompakten Raum  $R$ . Es ist  $C(R)$  dann und nur dann isomorph einer Algebra  $B(\bar{X})$ , wenn in  $R$  eine Menge  $X_0$  dicht ist, deren sämtliche Punkte zugleich offene und abgeschlossene Teilmengen von  $R$  sind, und wenn jede Teilmenge  $Y$  von  $X_0$  in einer zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmenge  $M$  von  $R$  liegt mit  $M \cap X_0 = Y$ . Man kann wieder  $\bar{X}$  gleich  $X_0$  nehmen.

G. Köthe.

Yen, Ti: Trace on finite  $AW^*$ -algebras. Duke math. J. 22, 207—222 (1955).

Soit  $A$  une  $AW^*$ -algèbre. § 2: la décomposition polaire usuelle des opérateurs est établie pour les éléments de  $A$ . § 3:  $A$  est une  $W^*$ -algèbre s'il existe une famille  $(\varphi_a)$  de formes positives sur  $A$ , unitairement invariante, totale [i. e. pour tout  $a > 0$  de  $A$ , il existe  $\alpha$  avec  $\varphi_a(\alpha) \neq 0$ ] et telle que les boules de  $A$  soient complètes pour la topologie définie par les semi-normes  $\varphi_a(x^* x)^{1/2}$ . § 4. Soit (P) la condition: il existe une famille totale de formes linéaires positives complètement additives sur  $A$ . L'A. prouve que, si (P) est remplie,  $A$ , supposée commutative, est une  $W^*$ -algèbre. Ce résultat était connu et vient d'être établi par Kadison sans l'hypothèse de commutativité (non publié). Ce résultat de Kadison diminue la portée de certains résultats des §§ 5—6 [établis pour des  $AW^*$ -algèbres satisfaisant à (P)]. Notons toutefois: soit  $A$  une  $AW^*$ -algèbre de type  $II_1$ , de centre  $Z$ ; s'il existe une application linéaire positive idempotente et complètement additive de  $A$  sur  $Z$ , alors  $A$  possède une trace à valeurs dans  $Z$ . § 7: soit  $Z$  une  $AW^*$ -algèbre commutative; il existe une  $AW^*$ -algèbre de type  $II$  de centre  $Z$  qui admet une trace.

J. Dixmier.

Kadison, R. V.: Isomorphisms of factors of infinite type. Canadian J. Math. 7, 322—327 (1955).

Soit  $M$  un facteur de type  $II_\infty$  dont le commutant est de type  $II_1$ . L'A. définit un homomorphisme canonique du groupe des  $*$ -automorphismes de  $M$  sur le groupe fondamental de  $M$  au sens de Murray-von Neumann, dont le noyau est formé des  $*$ -automorphismes spatiaux. Il existe donc des  $*$ -automorphismes non spatiaux quand  $M$  est approximativement fini, ce qui répond à une question de Griffin (ce Zbl. 51, 343). L'A. étudie si un  $*$ -isomorphisme entre deux anneaux d'opérateurs de type  $II_\infty$  avec commutants de type  $II_1$  est spatial, à l'aide d'un „linking operator“ (cf. Pallu de la Barrière, ce Zbl. 55, 339).

J. Dixmier.

Kadison, Richard V.: On the additivity of the trace in finite factors. Proc. nat. Acad. Sci. USA 41, 385—387 (1955).

Partant de la théorie de la dimension dans les facteurs de type  $II_1$ , l'A. simplifie et modernise la démonstration de l'additivité de la trace donnée par Murray et von Neumann. La démonstration obtenue prend à peine plus d'une page.

J. Dixmier.

Kadison, Richard V.: On the orthogonalization of operator representations. Amer. J. Math. 77, 600—620 (1955).

Soient  $H$  un espace hilbertien,  $G$  un groupe,  $g \rightarrow A_g$  une représentation de  $G$  dans  $H$ . Hypothèse: pour tout système fini  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dans  $H$  et tout système fini  $g_1, g_2, \dots, g_n$  dans  $G$ , il existe une application linéaire  $S$  de  $V$  (sous-espace engendré par les  $x_i$  et les  $A_{g_i} x_i$ ) dans  $H$  telle que  $\|S x_i\| = \|S A_{g_i} x_i\|$  ( $1 \leq i \leq n$ ), et telle que  $1/M \leq \inf \|S x'\|$ ,  $M \geq \sup \|S x\|$  ( $x \in V$ ,  $\|x\| = 1$ ).  $M$  ne dépendant pas des  $x_i$  ni des  $g_i$ . Conclusion:  $g \rightarrow A_g$  est semblable à une représentation unitaire. La réciproque est immédiate. L'A. cherche aussi dans quels cas une représentation d'une  $C^*$ -algèbre est semblable à une  $*$ -représentation, et obtient un critère plus difficile qui ne peut être détaillé ici. *J. Dixmier.*

**Pukánszky, L.: On the theory of quasi-unitary algebras.** Acta Sci. math. 16, 103—121 (1955).

Soient  $A$  une algèbre quasi-unitaire (Dixmier, ce Zbl. 47, 356),  $R^q$  et  $R^d$  les anneaux d'opérateurs associés. L'A. obtient (th. 1) la condition nécessaire et suffisante pour que  $R^q$  et  $R^d$  soient semi-finis, à savoir (avec les notations du travail cité):  $J = M' M^{-1}$ ,  $M' = S M S$ ,  $M' \eta R^q$ ,  $M' \geq 0$ . Soient maintenant  $N$  un anneau d'opérateurs semi-fini.  $H \eta N$  un opérateur auto-adjoint  $\geq 0$  inversible,  $\varphi$  une trace sur  $N$ ; l'A. montre en gros que (à un  $*$ -isomorphisme près),  $N, H, \varphi$  proviennent d'une algèbre quasi-unitaire  $A$ ,  $\varphi$  étant alors la trace canonique sur  $R^q$  (th. 2), et que  $A$  est alors déterminée à un isomorphisme près si elle est maximale (th. 3). Enfin, l'A. simplifie et généralise le critère de finitude de  $R^q$  lié à l'existence d'éléments quasi-centraux (th. 5). *J. Dixmier.*

**Tsuji, Kazô: Representation theorems of operator algebra and their applications.** Proc. Japan. Acad. 31, 272—277 (1955).

This paper is concerned with the extension of the representation theory of M. Tomita (this Zbl. 55, 105) for  $C^*$ -algebras of operators in Hilbert space to include algebras without unit element. The theory is applied to the representation of locally compact groups, but the results are too complicated to state here. Further details are promised in a later publication. *F. F. Bonsall.*

**Stinespring, W. Forrest: Positive functions on  $C^*$ -algebras.** Proc. Amer. math. Soc. 6, 211—216 (1955).

Soient  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  des  $C^*$ -algèbres,  $\mu$  une application linéaire de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{B}$ . On dit que  $\mu$  est positive si  $A \geq 0$  entraîne  $\mu(A) \geq 0$ . Soit  $\mathfrak{A}^{(n)}$  l'algèbre des matrices de degré  $n$  à éléments dans  $\mathfrak{A}$ . En appliquant  $\mu$  à chaque élément d'une matrice de  $\mathfrak{A}^{(n)}$ , on définit une application  $\mu^{(n)}$  de  $\mathfrak{A}^{(n)}$  dans  $\mathfrak{B}^{(n)}$ . On dit que  $\mu$  est complètement positive si  $\mu^{(n)}$  est positive pour tout  $n$ . Soient alors  $\mathfrak{A}$  une  $C^*$ -algèbre à élément unité, et  $\mu$  une application linéaire de  $\mathfrak{A}$  dans l'algèbre des opérateurs d'un espace hilbertien  $H$ , avec  $\mu(1) = 1$ . La positivité complète de  $\mu$  est la condition nécessaire et suffisante pour que  $H$  puisse se plonger dans un espace hilbertien plus grand  $K$ , avec  $\mu(S) P_H = P_H \varrho(S) P_H$ ,  $\varrho$  étant un  $*$ -homomorphisme de  $\mathfrak{A}$  dans l'algèbre des opérateurs de  $K$ . Quand  $\mathfrak{A}$  est commutative, la positivité complète équivaut à la positivité. Le théorème est donc une généralisation d'un théorème de Neumark [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 41, 359—361 (1943)]. *J. Dixmier.*

**Ogasawara, Tôzîrô: A theorem on operator algebras.** J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 18, 307—309 (1955).

Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre. Soient  $A, B$  deux opérateurs  $\geq 0$  de  $A$ . Si  $A \geq B$ , alors  $A^{1/2} \geq B^{1/2}$ . (Résultat dû à Heinz, ce Zbl. 43, 326; la méthode de l'A. est nouvelle, mais le théorème du rapporteur utilisé ne semble pas nécessaire.) Si  $A \geq B$  implique toujours  $A^2 \geq B^2$ ,  $A$  est commutative. *J. Dixmier.*

**Ogasawara, Tôzîrô and Kyôichi Yoshinaga: A non-commutative theory of integration for operators.** J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 18, 311—347 (1955).

Soit  $M$  un anneau d'opérateurs dans un espace hilbertien. § 1. Les A.A. généralisent la notion, due à Segal (ce Zbl. 51, 342), d'opérateur mesurable  $T \eta M$ , en faisant intervenir un idéal bilatère de  $M$  (qui, dans le cas de Segal, est engendré

par les projecteurs finis). Ils donnent un critère de Cauchy pour la convergence presque partout, et complètent les résultats de Segal concernant cette convergence. Théorème 1: tout \*-isomorphisme entre anneaux d'opérateurs se prolonge en un \*-isomorphisme des algèbres d'opérateurs mesurables correspondantes. § 2. Soient  $A$  une algèbre unitaire,  $L$  et  $R$  les anneaux d'opérateurs associés, munis de leurs traces canoniques. Les A.A. définissent les opérateurs de carrés intégrables, puis les opérateurs intégrables, et obtiennent rapidement les propriétés de l'intégrale en faisant largement usage des propriétés de  $A$ . Théorème 3: sur  $L$ , les topologies faible et ultrafaible (resp. forte et ultraforte) coïncident; toute forme linéaire positive normale est du type  $T \rightarrow \langle T x, x \rangle$ . § 3. Faisant usage du théorème 1, les résultats du § 2 sont étendus aux anneaux d'opérateurs semi-finis quelconques, d'où notamment le théorème de convergence monotone de Lebesgue, le théorème de Radon-Nikodym, le théorème de Fisher-Riesz pour les espaces  $L^p$ . Etude des cas où  $L^p \subset L^r$  pour  $p < r$  ou  $p > r$ . J. Dixmier.

**Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi:** On kernel functions. Sci. Reports Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A **5**, 14—19 (1955).

Let  $L$  be a principal left ideal in a ring  $R$  with identity. Let  $R$  possess an involution  $x \rightarrow x^*$  and an „inner product“  $(x, y)$  with its values in  $R$  which is linear in the first variable with respect to elements of  $R$ , symmetric, and definite. An element  $\varphi \in L$  such that  $R\varphi = L$  and  $(\varphi, \varphi)^{-1/2}$  exists is called a complete element. Some elementary theorems are proved for an  $L$  containing a complete element, which are one-dimensional analogues of familiar properties of Hilbert space. The definition of kernel function and the succeeding applications are obscure to the reviewer. The applications seem to be formal proofs of Taylor's theorem in several variables. F. F. Bonsall.

**Jochvidov, I. S.:** Zur Theorie der indefiniten Toeplitzischen Formen. Doklady Akad. Nauk SSSR **101**, 213—216 (1955) [Russisch].

On dit que la suite  $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$  a la propriété  $P_j$  si pour  $n$  assez grand la forme  $\sum_{p,q=0}^n c_{p-q} \xi_p \bar{\xi}_q$  ( $c_{-p} = c_p$ ) contient exactement  $j$  carrés positifs. Une telle suite peut être représentée sous la forme  $c_p = (U^p e_0, e_0)$  dans un espace hilbertien avec la métrique indéfinie

$$(x, x) = |\xi_1|^2 + \dots + |\xi_j|^2 - |\xi_{j+1}|^2 - |\xi_{j+2}|^2 - \dots$$

$U$  étant un opérateur unitaire [voir L. S. Pontrjagin, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **8**, 243 (1944)]. L'A. donne des formules pour le calcul des  $c_p$  à l'aide de la représentation spectrale de  $U$  et d'une équation aux différences finies.

G. Marinescu.

**Calderón, Alberto et Allen Devinatz:** Sur certaines courbes dans l'espace de Hilbert. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 539—541 (1955).

Eine schwachstetige Gruppe orthogonaler Transformationen  $U_t$  in einem reellen Hilbertschen Raum erzeuge aus einem Anfangselement  $f_0$  durch  $f(t) = U_t f_0$  ein bei  $t=0$  unendlich oft differenzierbares  $f(t)$ ; dann ist die Norm von  $f^{(n)}(t) = U_t f^{(n)}(0)$  konstant. Verff. bestimmen umgekehrt zu einem  $f(t)$  mit  $\|f^{(n)}(t)\| = \text{const.}$  eine Gruppe orthogonaler Transformationen, wenn das zu  $\mu_{2n} = \|f^{(n)}(t)\|^2$ ,  $\mu_{2n+1} = 0$  gehörige Momentenproblem eindeutig bestimmt ist. D. Morgenstern.

**Calderón, Albert-P. et Allen Devinatz:** Sur certaines courbes à courbure constante dans l'espace de Hilbert. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 586—587 (1955).

Ist bei den Untersuchungen der vorangehenden Note das Momentenproblem für die  $\mu$ -Werte unbestimmt, so erzeugen die Verff. etwa durch Abänderung in  $t < 0$  ein  $h(t)$  mit  $\|h^{(n)}(t)\| = \text{const.}$ , das nicht von der Form  $U_t h_0$  ist. D. Morgenstern.

**Fourès, Y. and I. E. Segal:** Causality and analyticity. Trans. Amer. math. Soc. **78**, 385—405 (1955).



Let  $H = L^2(G, K)$  be the Hilbert space of all square integrable functions from a real vector space  $G$  of  $n$  dimensions to a complex separable Hilbert space  $K$ . A linear operator  $T$  in  $H$  is called homogeneous if it commutes with translations in  $G$ . Theorem 1. Every closed densely defined homogeneous operator  $T$  is of the form  $F^{-1}tF$ , where  $F$  is the Fourier transformation and  $t$  is multiplication by a function  $t(\xi)$  — called the gain of  $T$  — defined (a. e) in  $G^*$ , the dual of  $G$ , with values in the space of closed densely defined linear operators on  $K$ . — Let  $C$  be a closed convex cone in  $G$  with interior points and  $C^*$  its dual cone.  $T$  is called causal if (1)  $Tf$  has support in  $C$  if  $f \in D_T$  has support in  $C$ ; (2) the set of such  $f$  is dense in  $L^2(C, K)$ . Theorem 2. A continuous homogeneous operator  $T$  is causal with respect to  $C$  if and only if  $t(\xi)$  has a bounded analytic extension  $t(\zeta)$  to  $C^* + iG^*$ . — Theorem 3 gives similar results for closed causal homogeneous operators  $T$  when  $K$  is one-dimensional, but no necessary and sufficient conditions are given. Theorem 4. When  $T$  is a Green's operator, i. e.  $t$  is the inverse of a polynomial  $p$ , causality with respect to a proper cone  $C$  is equivalent to  $p(\xi + i\eta) \neq 0$  when  $\eta \in G^*$  and  $\xi \in$  interior of  $C^*$ . Thus causality implies hyperbolicity but not conversely [condition (2) above may not be true when  $p$  is hyperbolic with respect to  $C^*$ ]. — Finally the domain of dependence of a continuous homogeneous operator  $T$  is defined in the usual way. The proofs of the paper depend on extensions of theorems due to Paley and Wiener concerning functions analytic in a half-plane.

L. Hörmander.

**Bendat, Julius and Seymour Sherman: Monotone and convex operator functions.** Trans. Amer. math. Soc. **79**, 58—71 (1955).

Let  $f(x)$  be a bounded real-valued function defined on an interval  $I$ . If  $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}$  is a bounded self-adjoint operator on a Hilbert space (of finite or countable dimension), and the spectrum of  $A$  is contained in  $I$ ,  $f(A)$  is defined as  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dE_{\lambda}$ . When  $A$  and  $B$  are operators on the same space,  $A \leq B$  means that  $\langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle$  for all  $x$ ; and  $f(A)$  is monotone if this implies  $f(A) \leq f(B)$ . Generalizing some results of Loewner, the authors show that, when  $I$  is open,  $f(x)$  is analytic if  $f(A)$  is monotone; and that, when  $I$  contains the origin and  $f(0) = 0$ ,  $f(A)$  is monotone if and only if  $f(x) = \int_{-1/R}^{1/R} \{x/(1-tx)\} d\psi(t)$ , where  $\psi(t)$  is bounded

and non-decreasing and  $R$  is the radius of convergence of  $\sum_1^{\infty} a_n x^n = f(x)$ .  $f(A)$  is convex if  $f((1-t)A + tB) \leq (1-t)f(A) + tf(B)$  for all pairs of operators  $A, B$  on the same space, and  $0 \leq t \leq 1$ . Relations between monotone and convex functions are obtained; in particular,  $f(A)$  is convex if and only if  $F_{x_0}(A)$  is monotone for each  $x_0$ , where  $F_{x_0}(x) = \{f(x) - f(x_0)\}/(x - x_0)$ .

J. D. Weston.

**Edwards, D. A.: Vector-valued measure and bounded variation in Hilbert space.** Math. Scandinav. **3**, 90—96 (1955).

$X$ : real Hilbert space with zero element  $\theta$ .  $\{\varphi_n\}$ : complete orthonormal basis of  $X$ .  $R^1$ : real line.  $z$ : mapping of  $R^1$  into  $X$ . Covariance function of  $z$ :  $\varrho(t, s) = (z(t), z(s))$ . The main concern of the paper is the construction of a strongly continuous function  $z$  such that  $\varrho(t, s)$  is of Fréchet bounded variation without being of Vitali bounded variation on some interval  $I$ .  $b_{nn} = \pi/2$ ,  $b_{mn} = (m-n)^{-1} \sin \frac{1}{2} \pi (m-n)$  for  $m \neq n$ ,  $m, n = 1, 2, 3, \dots$   $u_n = [n^{1/2} \log(n+1)]^{-1}$ .  $M = \pi \sum_1^{\infty} u_n^2 < \infty$ .

$c_{mn} = b_{mn} u_m u_n$ . It is shown that

$$\left| \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q c_{mn} \varepsilon_m \eta_n \right| \leq M \text{ whenever } -1 \leq \varepsilon_m \leq +1, -1 \leq \eta_n \leq +1,$$

$p, q = 1, 2, 3, \dots$ , while  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{mn}| = \infty$ .  $C$ : bounded linear operator on  $X$  defined by  $(\varphi_m, C\varphi_n) = c_{mn}$ .  $C$  being self-adjoint and non-negative definite there exists a bounded self-adjoint operator  $T$  such that  $T^2 = C$ . For  $x_n = T\varphi_n$ ,  $(x_m, x_n) = c_{mn}$ .  $t_1 = 0$ ,  $t_{m+1} = t_m + 2^{-m}$ .  $z(t_1) = \theta$ ,  $z(t_{m+1}) = z(t_m) + x_m$ ,  $z(\cdot)$  is linear on each of the intervals  $[t_m, t_{m+1}]$ ,  $z(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} z(t_n)$ .  $T = [0, 1]^2$ . *Chr. Pauc.*

**Dunford, Nelson and J. Schwartz: Convergence almost everywhere of operator averages.** Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 229—231 (1955).

$(S, \Sigma, \mu)$ : measure space.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha$ : positive numbers. Th. 1. If  $\{T_i(t)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  is a set of strongly measurable semigroups of operators in  $L_1$ , such that  $|T_i(t)|_1 \leq 1$ ,  $|T_i(t)|_{\infty} \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $t > 0$ , then for  $f \in L_p$ ,  $p > 1$ ,

$$A(\alpha_1, \dots, \alpha_k) f = (\alpha_1 \dots \alpha_k)^{-1} \int_0^{\alpha_1} \dots \int_0^{\alpha_k} T_1(t_1) \dots T_k(t_k) f dt_1 \dots dt_k$$

has a limit a. e. as  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \rightarrow \infty$  independently. Moreover there exists a function  $f^* \in L_p$  dominating all  $A(\alpha_1, \dots, \alpha_k) f$ . Th. 2. If  $\{T(t_1, \dots, t_k)\}$  is a  $k$ -parameter strongly measurable semigroup of operators in  $L_1$ , such that  $|T(t_1, \dots, t_k)|_1 \leq 1$  and  $|T(t_1, \dots, t_k)|_{\infty} \leq 1$  for  $t_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , then for  $f \in L_1$ ,

$$A(\alpha) f = \alpha^{-k} \int_0^{\alpha} \dots \int_0^{\alpha} T(t_1, \dots, t_k) f dt_1 \dots dt_k$$

has a limit a. e. as  $\alpha \rightarrow \infty$ . Only hints to the proofs are given: Th. 1 is reduced to the case  $k = 1$  (cf. this Zbl. **44**, 125), then to the discrete analogue, which is derived from a lemma essentially due to E. Hopf (this Zbl. **55**, 367). Th. 2 is reduced, via a detour through the discrete case to the case of positivity-preserving operators; this case is then treated by induction on  $k$ . *Chr. Pauc.*

**Fullerton, R. E.: An inequality for linear operators between  $L^p$  spaces.** Proc. Amer. math. Soc. **6**, 186—190 (1955).

Soient  $R, S$  deux ensembles,  $J(R), J(S)$  deux algèbres booléennes  $\sigma$ -complètes de sous-ensembles,  $\Phi, \Psi$  deux mesures correspondantes. Dans une note antérieure (ce Zbl. **56**, 339), l'A., exprimant les opérateurs de  $L^p$  à  $L^q$  ( $q = 1$ ) sous forme intégrale, a obtenu pour les normes, les inégalités  $M \leq \|T\| \leq 2M$ , où  $M = \sup_{e \in J(S)} \left\{ \int_R |k(e, t)|^{p'} d\Phi \right\}^{1/p'}$  ( $1/p + 1/p' = 1$ ). Dans la présente note, il établit des inégalités plus faibles pour le cas  $q \neq 1$ :  $\|T\| \leq N = q - \text{var } S \left( \int_R |k(e, t)|^{p'} d\Phi \right)^{1/p'}$ ,  $\|T\| \geq N / \sup \left\{ \sum_{j=1}^m \psi(e_j)^{(p'-1)(q-1)} \right\}^{1/qp'}$  où sup est pris sur toutes les familles finies disjointes d'éléments de  $J(S)$ , de mesure  $\neq 0$ . *G. Marinescu.*

**Ljubič, Ju. I.: Über die Zugehörigkeit der Potenzen eines Operators über einem gegebenen Vektor zu einer gewissen linearen Klasse.** Doklady Akad. Nauk SSSR **102**, 881—884 (1955) [Russisch].

Soit  $T$  un opérateur linéaire (au sens algébrique) dans l'ensemble vectoriel complexe  $E$ ,  $\mathfrak{M}$  un sous-ensemble vectoriel de  $E$ , et  $D_n$  l'ensemble de définition de l'opérateur  $T^n$ . L'A. démontre que les relations  $x \in D_n$  et  $Q(T)x \in \mathfrak{M}$  ( $Q$  étant un polynôme de grade  $n$ ) impliquent  $T^i x \in \mathfrak{M}$  pour  $i = 1, \dots, n-1$  si a) il existe  $n$  valeurs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  distinctes telles que l'équation  $Tx - \lambda_k x = y$  ( $k = 1, \dots, n$ ) ait une solution  $x \in \mathfrak{M}$  pour tout  $y \in \mathfrak{M}$ , b) l'équation  $P(T)x = 0$ , où  $P(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$  a dans  $\mathfrak{M}$  une seule solution  $x = 0$ . — Dans le cas d'un espace normé on obtient une inégalité pour  $\|T^m x\|$ . *G. Marinescu.*

**Hukuhara, Masuo: Sur les valeurs propres des endomorphismes de l'espace vectoriel.** Proc. Japan Acad. **31**, 126—127 (1955).

Soient  $K$  un endomorphisme d'un espace vectoriel, et  $H = f(K)$ , où  $f$  est un polynôme. Relation entre sous-espaces des zéros de  $(K - \lambda)^m$  et de  $(H - \varrho)^n$ .

*J. Dixmier.*

**Temple, G.: An elementary proof of Kato's lemma.** *Mathematika* **2**, 39—41 (1955).

Verf. gibt einem Einschließungssatz für Eigenwerte von T. Kato [*J. Phys. Soc. Japan* **4**, 334 (1949)] die Form: Wenn der selbstadjungierte Operator  $H$  im abgeschlossenen Intervall  $\langle \alpha, \beta \rangle$  keinen Eigenwert besitzt und  $I$  den identischen Operator bedeutet, so ist der Operator  $(H - \alpha I)(H - \beta I)$  positiv definit. Kato hatte seinen Satz mit Hilfe der Spektraldarstellung von  $H$  bewiesen; Verf. beweist diese Tatsache allein unter Benutzung einfachster Tatsachen aus der Theorie der linearen Operatoren in Hilberträumen, indem er den Hilfssatz aufstellt: Wenn der positiv definite selbstadjungierte Operator  $W$  in  $\langle 0, k \rangle$  keinen Eigenwert besitzt, so ist auch  $W - kI$  positiv definit.

*L. Collatz.*

**Graves, Lawrence N.: A generalization of the Riesz theory of completely continuous transformations.** *Trans. Amer. math. Soc.* **79**, 141—149 (1955).

L'A. étend la théorie classique de Riesz au cas suivant:  $E$  et  $F$  étant deux espaces de Banach,  $u$  un homomorphisme de  $E$  sur  $F$ ,  $v$  une application compacte de  $E$  dans  $F$ , on considère les applications  $w_\lambda = u - \lambda v$ . L. Schwartz a démontré (sous des hypothèses plus générales relativement aux espaces  $E$  et  $F$ ; ce *Zbl.* **50**, 333) que  $W_1 = w_\lambda(E)$  est fermé et de codimension finie dans  $F$ ; l'A. redonne une démonstration de ce théorème, puis considère la suite des sous-espaces  $Z_k = u^{-1}(W_k)$ ,  $W_{k+1} = w_\lambda(Z_k)$ ; en adaptant le raisonnement classique de Riesz, il prouve qu'il existe un indice  $k$  tel que  $W_{k+h} = W_k$  pour tout  $h \geq 1$ . Les „valeurs propres“ de  $v$  (relativement à  $u$ ) sont les  $\lambda$  tels que  $w_\lambda(E) \neq F$ ; l'A. prouve que l'ensemble de ces valeurs propres est formé de points isolés, et définit l'ordre d'une valeur propre et une décomposition canonique de  $v$  relative à une valeur propre, suivant le modèle classique.

*J. Dieudonné.*

**Šmul'jan, Ju. L.: Totalstetige Störungen von Operatoren.** *Doklady Akad. Nauk SSSR* **101**, 35—38 (1955) [Russisch].

Der folgende „Fundamentalsatz“ wird bewiesen: Sei  $A(\zeta)$  eine, in einem Gebiet  $G$  der komplexen Ebene reguläre Funktion, deren Werte vollstetige Operatoren eines Banachraumes sind. Ferner sei  $\lambda$  eine komplexe Zahl,  $\lambda \neq 0$ , und bezeichne  $B_\lambda$  die Menge aller derjenigen  $\zeta \in G$ , für die  $A(\zeta)$  den Eigenwert  $\lambda$  besitzt. Dann ist entweder  $B_\lambda = G$ , oder aber  $B_\lambda$  hat in  $G$  keinen Häufungspunkt. — Dieser Satz wird dann zur Untersuchung des Spektrums von Operatoren von der Form  $A - K$  mit vollstetigem  $K$  angewendet. Insbesondere werden auf diesem Weg Sätze von M. S. Livšic über das Spektrum „quasiunitärer“ und beschränkter „quasihermitescher“ Operatoren des Hilbertraumes neu begründet (M. S. Livšic; dies. *Zbl.* **31**, 167; **40**, 353). Ref. bemerkt, daß der obige „Fundamentalsatz“ im wesentlichen mit dem „Lemma“ der folgenden Arbeit übereinstimmt: B. Sz.-Nagy, dies. *Zbl.* **47**, 360.

*B. Sz.-Nagy.*

**Rogosinski, W. W.: On finite systems of linear equations with an infinity of unknowns.** *Math. Z.* **63**, 97—108 (1955).

Seien  $a_i$  aus einem normierten Raum und Zahlen  $C_i$  gegeben ( $i = 1, \dots, n$ ). Gefragt wird nach den minimalen  $B$  (d. h.  $\|B\| = \text{Minimum}$ ) aus dem dualen Raum mit  $B(a_i) = C_i$ . Die Untersuchungen des Verf. beziehen sich hauptsächlich auf den Raum  $l^p$  (Folgenraum) und  $c$  (konvergente Folgen  $x_n$  mit  $\sup_n |x_n|$  als Norm).

*D. Morgenstern.*

**Vorob'ev, Ju. V.: Eine Anwendung der orthogonalen Operatorpolynome auf die Lösung inhomogener linearer Gleichungen.** *Uspechi mat. Nauk* **10**, Nr. 1 (63), 89—96 (1955) [Russisch].

Fortsetzung der Arbeit des Verf., *Uspechi mat. Nauk* **9**, Nr. 1 (59), 83—90



(1954). Es sei  $A$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator im Hilbertschen Raum  $H$ ,  $z_0$  ein Element von  $H$ ,  $H_n$  der durch die Elemente  $A^k z_0$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) aufgespannte Unterraum von  $H$ , und  $P_n$  die orthogonale Projektion auf  $H_n$ . Der Operator  $B_n$  sei folgendermaßen bestimmt:  $B_n^k z_0 = A^k z_0$  für  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ;  $B_n^n z_0 = P_n A^n z_0$ ;  $B_n = 0$  in  $H \ominus H_n$ . Es wird die Frage untersucht, inwieweit  $B_n$  als Annäherung von  $A$  benutzt werden kann zur approximativen Lösung des Problems  $Ax = g$ . (Bemerkung des Ref.: Man hat  $B_n = P_n A P_n$ , woraus u. a. die Selbstadjungiertheit von  $B_n$ , sowie die Ungleichung  $\|B_n\| \leq \|A\|$  unmittelbar folgt.) B. Sz.-Nagy.

**Vajnberg, M. M.: Potentialoperatoren und Variationstheorie nicht-linearer Operatorengleichungen.** Vestnik Moskovsk. Univ. 10, Nr. 2 (Ser. fiz. mat. estest. Nauk Nr. 1), 188—190 (1955) [Russisch].

Bericht von V. V. Nemyckij über die Dissertation des Verf.

**Altman, M.: A generalization of Newton's method.** Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 189—193 (1955).

Beim Newtonschen Iterationsverfahren  $x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n)$  bzw.  $x_{n+1} = x_n - [P'(x_0)]^{-1} P(x_n)$  in  $B$ -Räumen (vgl. Kantorovič, dies. Zbl. 38, 74) benötigt man natürlich die Existenz der auftretenden Inversen. Verf. gibt eine Modifikation des Verfahrens, bei der man mit folgender Forderung auskommt:  $P'(x_0)$  bildet den Urraum  $\mathfrak{X}$  auf den Bildraum  $\mathfrak{Y}$  ab. Genauer arbeitet Verf. mit nachstehenden Voraussetzungen.  $P$  sei eine stetige Abbildung von  $\mathfrak{X}$  in  $\mathfrak{Y}$  (Banachräume). In einer Kugel  $S(x_0, r)$  sei  $P$  Fréchet-differenzierbar. Das Fréchet-Differential  $A = P'(x_0)$  im Punkte  $x_0$  besitze die oben genannten Eigenschaft. Sei  $\mathfrak{X}/\theta$  (mit Elementen  $\mathfrak{x}$ ) der durch die Nullstellenmenge von  $A$  definierte Quotientenraum (also auch ein Banachraum) und  $\mathfrak{A}$  die von  $A$  erzeugte (eindeutige) Abbildung von  $\mathfrak{X}/\theta$  auf  $\mathfrak{Y}$ . Nach einem Satz von Banach ist  $\mathfrak{A}^{-1}$  linear und stetig. Verf. zeigt überdies  $\|\mathfrak{A}^{-1}\| = \|\bar{A}^{-1}\|$  (wo  $\bar{A} = \text{adjungierter Operator}$ ). Er betrachtet nun die Iteration (1)  $\mathfrak{x}_1 = -\mathfrak{A}^{-1} P(x_0)$ ,  $\mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}_{n-1} - \mathfrak{A}^{-1} P(x_0 + x_{n-1})$ , wo  $x_n$  ein Element der Klasse  $\mathfrak{x}_n$  mit  $\|x_n - x_{n-1}\| \leq \|\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_{n-1}\| \cdot (1 + \varepsilon)$  ist (bei  $n = 1$  wird  $\|x_1\| \leq \|\mathfrak{x}_1\| + \varepsilon$  gefordert). Satz 1. Gilt  $\|P(x_0)\| \leq D$ ,  $\|\bar{A}^{-1}\| \leq B$ ,  $\|P'(x) - P'(x_0)\| \leq C$  [für  $x \in S(x_0, r)$ ],  $BC < 1$  und  $BD < r(1 - BC)$ , so konvergiert  $\{x_0 + x_n\}$  gegen eine Lösung der Gleichung  $P(x) = 0$  [die in  $S(x_0, r)$  liegt], wenn  $\varepsilon > 0$  genügend klein ist. — Zwei weitere Sätze behandeln das Iterationsverfahren, wenn  $P'(x)$  einer Lipschitzbedingung genügt bzw.  $P''(x)$  existiert. K. Zeller.

**Slugin, S. N.: Angenäherte Lösung von Operatorgleichungen auf Grund der Methode von S. A. Čaplygin.** Doklady Akad. Nauk SSSR 103, 565—568 (1955) [Russisch].

On énonce une généralisation de la méthode de S. A. Čaplygin, dans les espaces linéaires ordonnés (l'A. ne donne d'autres précisions sur la nature de ces espaces, mais il semble que ce soient des espaces de Kantorovitch). Soit  $P$  une opération définie sur un segment  $[x_0, \bar{x}_0]$  dans l'espace considéré, prenant les valeurs dans le même espace et telle que  $P(x_0) \leq 0 \leq P(\bar{x}_0)$ . Pour tout segment  $[a, b] \subset [x_0, \bar{x}_0]$ , on suppose l'existence des opérateurs additives  $\bar{\Gamma}_{a,b}$ ,  $\underline{\Gamma}_{a,b}$ , tels que

$$\bar{\Gamma}_{a,b}(b - x) \geq P(b) - P(x), \quad \underline{\Gamma}_{a,b}(x - a) \geq P(x) - P(a)$$

(pour  $x \in [a, b]$ ) et majorés par un même opérateur additif  $\Gamma$ ; on suppose de plus l'existence des opérateurs inverses positifs et la continuité monotone de  $\Gamma^{-1}P$ . Les solutions extrémales de l'équation  $P(x) = 0$  sont alors construites par les formules de recurrence

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \bar{\Gamma}_{x_n, \bar{x}_n}^{-1} P(\bar{x}_n), \quad x_{n+1} = x_n - \underline{\Gamma}_{x_n, \bar{x}_n}^{-1} P(x_n).$$

L'A. montre comment on peut obtenir en particulier la méthode de S. A. Čaplygin, généralisation de A. N. Baluev (ce Zbl. 46, 134) et comment on peut appliquer la méthode aux équations différentielles à argument retardé. G. Marinescu.

**Gagua, M.:** Über die Konvergenz der Galerkinschen Methode. Doklady Akad. Nauk SSSR **102**, 665—668 (1955) [Russisch].

$X$  und  $Y$  seien lineare normierte Räume und  $K$  ein beschränkter linearer Operator, der  $X$  auf  $Y$  abbildet.  $X_n$  und  $Y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) seien vollständige Teilräume von  $X$  und  $Y$ , und der beschränkte lineare Operator  $K_n$  bilde  $X_n$  auf  $Y_n$  ab. Es werden verschiedene Abschätzungen für  $\|x - \bar{x}_n\|$  aufgestellt, wenn  $x$  der Gleichung  $Kx = y$  und  $\bar{x}_n$  der Gleichung  $K_n x = y_n$  genügt. Z. B. besteht unter gewissen Voraussetzungen die Abschätzung

$$\|x - x_n\| = O\{E_n(x) + E_n(y) + \varepsilon_n\}.$$

Dabei bedeutet  $E_n(x) = \inf_{x_n \in X_n} \|x - x_n\|$ ,  $E_n(y) = \inf_{y_n \in Y_n} \|y - y_n\|$  ( $x \in X, y \in Y$ ),

$\varepsilon_n(x) = \|Kx - K_n x\|$  ( $x \in X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), und es gilt  $\varepsilon_n(x) \leq \varepsilon_n \|x\|$ . Eine andere Abschätzung bezieht sich auf den Fall, daß  $X_n$  und  $Y_n$  Mengen von Elementen der Form  $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  bzw.  $y = c_1 K x_1 + \dots + c_n K x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) mit beliebigen reellen Konstanten  $a_i, c_i$  sind. W. Schulz.

**Davidenko, D. F.:** Über eine Anwendung der Methode der Variation des Parameters auf die Theorie der nicht-linearen Funktionalgleichungen. Ukrain. mat. Žurn. **7**, 18—28 (1955) [Russisch].

$E$  sei ein vollständiger linearer normierter Funktionalraum von Funktionen  $\varphi(x)$ , die auf einer Punktmenge  $G$  des  $n$ -dimensionalen Raums mit der Norm  $\|\varphi\| = \max_{x \in G} |\varphi(x)|$  definiert sind.  $K(x, \varphi)$  sei ein nicht-linearer Operator in  $E$ , so

daß  $\delta K(x, \varphi) = \int_G Q(x, x', \varphi) \delta \varphi(x') dx'$  gilt, wo  $Q$  ein Funktional von  $\varphi \in E$  ist,

das von  $x, x' \in G$  abhängt. Dann wird bewiesen, daß die Gleichung  $\varphi(x) + \lambda K(x, \varphi) = 0$ , wo  $\lambda$  ein reeller Parameter ist, unter gewissen Bedingungen, bei denen die Fredholmsche Determinante des Kerns  $Q(x, x', \varphi)$  eine Rolle spielt, eine und nur eine Lösung besitzt. W. Schulz.

**Aczél, J.:** Lösung der Vektor-Funktionalgleichung der homogenen und inhomogenen  $n$ -dimensionalen einparametrischen „Translation“ der erzeugenden Funktionen von Kettenreaktionen und des stationären und nichtstationären Bewegungsintegrals. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **6**, 131—140 (1955).

Mit  $x'_v = h_v(x_1, \dots, x_n; t)$ , ( $v = 1, \dots, n$ ), seien die eindeutigen Abbildungen  $\mathfrak{H}_t$  im  $n$ -dimensionalen  $x = (x_1, \dots, x_n)$ -Raum gegeben;  $t$  ist der Parameter dieser Abbildungen. Die Inverse zu  $\mathfrak{H}_t$  werde mit  $x_v = g_v(x'_1, \dots, x'_n; t)$  bezeichnet. Für die Funktionen

$$(A) \quad f_v(x_1, \dots, x_n; t; u) = g_v[h_1(x_1, \dots, x_n; t), \dots, h_n(x_1, \dots, x_n; t); u]$$

( $v = 1, \dots, n$ ) gilt, wie man leicht nachweist, das System von Funktionalgleichungen

$$f_v[f_1(x_1, \dots, x_n; t; u), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n; t; u); v] = f_v(x_1, \dots, x_n; t; v)$$

( $v = 1, \dots, n$ ), vektoriell: (I)  $\mathfrak{f}[\mathfrak{f}(x; t; u); u; v] = \mathfrak{f}(x; t; v)$ . Der Spezialfall  $u = 0$  und  $h_1(x_1, \dots, x_n; t) = H_1(x_1, \dots, x_n) + t$  sowie  $h_\kappa(x_1, \dots, x_n; t) = H_\kappa(x_1, \dots, x_n)$  ( $\kappa = 2, \dots, n$ ) führt auf die Funktionen (B)  $F_v(x_1, \dots, x_n; t) = G_v[H_1(x_1, \dots, x_n) + t, H_2(x_1, \dots, x_n), \dots, H_n(x_1, \dots, x_n)]$ . (Die  $G_v$  sind die Inversen zu den  $H_v$ !) In diesem sogenannten „homogenen Fall“ erbringt die Spezialisierung von (I) die Funktionalgleichung (II)  $\mathfrak{F}[\mathfrak{F}(x; t; v)] = \mathfrak{F}(x; t + v)$ . Wenn von einer Vektorfunktion  $\mathfrak{f}(x; t; v)$  bzw.  $\mathfrak{F}(x; t)$  bekannt ist, daß (I) bzw. (II) auf der Hyperebene  $x_1 = \text{const}$  gilt, so läßt sich unter gewissen weiteren Voraussetzungen nachweisen, daß  $\mathfrak{f}$  bzw.  $\mathfrak{F}$  sich nach (A) und (B) darstellen lassen; über die Gesamtheit dieser Darstellungen wird ein Satz hergeleitet. — Der Ortsvektor  $\mathfrak{f}$  eines im  $n$ -dimensionalen Raume bewegten Punktes hängt von der Zeit  $t$  ab; zur Zeit  $s$  befinde er sich an der Stelle  $x$ ; dies alles werde ausgedrückt mit  $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(x; s; t)$ . Offenbar genügt diese Vektorfunktion der Funktionalgleichung (I). Im Falle einer stationären Bewegung ist der Ortsvektor  $\mathfrak{F}$  nur abhängig von der Zeit  $t$  und einem durchlaufenen Punkt  $x$ , ohne Rücksicht

darauf, wann diese Durchlaufung stattfand; folglich ist  $\tilde{y} = \tilde{y}(x; t)$ . Für diese Vektorfunktion gilt (II). Die jeweilige Geschwindigkeit kann man durch  $h_v(x)$  bzw.  $H_v(x)$  ermitteln. — Wegen weiterer Einzelheiten und Resultate sei auf die Arbeit selber verwiesen.  
H. Töpfer.

### **Praktische Analysis:**

**Todd, John:** Begründung für die Beschäftigung mit numerischer Analysis. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 58, 11—38 (1955).

Verf. fragt, warum so viele, die im Kriege oder aus äußeren Anlässen zur Beschäftigung mit numerischer Analysis kamen, dabei geblieben sind und nicht zu ihren früheren Interessengebieten zurückkehrten. „Unsere Antwort ist, daß numerische Analysis ein anziehender Gegenstand ist, bei dem Mathematik jeder Art entscheidend benutzt werden kann und von dem umgekehrt auch viele Zweige dieser Wissenschaft Nutzen ziehen können.“ Verf. will an einigen einfachen Beispielen zeigen, wie interessante Fragen die numerische Analysis bietet und daß man heute keine Trennung mehr zwischen theoretischer und praktischer numerischer Analysis ziehen kann, daß Übergänge bestehen bis zur „ultramodernen numerischen Analysis“, einer „Art Abenteuer mit schnellen automatischen Rechananlagen“. Seine Beispiele behandeln: Auswertung von Polynomen  $f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$  durch möglichst wenige elementare Rechenoperationen, Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit von Folgen  $x_n$  durch Bilden einer neuen Folge

$$\bar{x}_{n+2} = x_{n+2} - (x_{n+2} - x_{n+1})^2 / (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n),$$

Interpolation nach Everett und mit Comries Rückwurf (Beispiel einer 4-stelligen Tafel für  $\sin x$  im Intervall  $\langle 0, 2 \rangle$  mit nur 5 Funktionswerten), Eigenwerte endlicher Matrizen, Beziehungen zwischen den Eigenwerten eines symmetrischen Kernes und denen einer approximierenden Matrix nach Wielandt, Stabilität beim Differenzenverfahren, Spieltheorien mit Beispielen, Monte-Carlo-Methode, und einige weitere Gebiete wie biologische Anwendungen, perfekte Differenzenmengen in der kombinatorischen Analysis, zahlentheoretische, topologische Fragen, u. a.

L. Collatz.

**Todd, John:** Motivation for working in numerical analysis. Commun. pure appl. Math. 8, 97—116 (1955).

Eine etwas kürzere Fassung des vorstehend referierten Aufsatzes (in deutscher Sprache).

L. Collatz.

**Traenkle, C. A.:** Determination of the root systems of algebraic equations by affinity transforms. Quart. appl. Math. 13, 1—18 (1955).

Eine algebraische Gleichung  $\sum_{i=0}^n a_i z^i = 0$  besitze komplexe Wurzeln, und zu einem konjugierten Wurzelpaar seien die Wurzelparameter  $p_d$  ( $d = 0, 1$ ) des Quadratfaktors  $z^2 + p_1 z + p_0$  angenähert bekannt. Zu ihrer Verbesserung wird nach Division  $\sum_{i=0}^n a_i z^i = \left( \sum_{j=2}^n b_j z^j \right) \cdot (z^2 + p_1 z + p_0) + b_1 z + b_0$  für die von den Resten  $b_1, b_0$  abhängigen Korrekturen  $\Delta p_d$  ein linearer Näherungsansatz  $\Delta p_d = k_{d1} b_1 + k_{d0} b_0$  gemacht. Die Koeffizienten  $k_{dj}$  werden durch Errechnen von  $\Delta b_j$ -Werten zu angenommenen  $\Delta p_d$ -Werten bestimmt, und zwar entweder teils graphisch unter Arbeiten in einer  $b_0, b_1$ -Ebene, oder rein rechnerisch. Das graphische Vorgehen ist auch für grobe nichtlineare Änderungen noch anwendbar. Für die Wurzelparameter  $p_d$  werden einige Schätzwerte angegeben. Es werden Rechenschemata angegeben und durch Zahlenbeispiele erläutert. — Sodann wird der Einfluß variierter Koeffizienten  $a_i$  auf die Wurzelparameter  $p_{dh}$  ( $d = 0, 1$ ;  $h$  = Nummer des Wurzelpaares) durch Aufstellen der linearen Näherungsbeziehungen untersucht und die formelmäßige und numerische Bestimmung der zugehörigen Matrixelemente durchgeführt. Die Frage der Doppelwurzeln wird als Grenzfall behandelt.

R. Zurmühl.



**Forsythe, G. E. and E. G. Straus:** On best conditioned matrices. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 340—345 (1955).

Die „Bedingungszahl“ [condition number, bei Betrachtungen aus der praktischen Analysis von J. Todd (dies. Zbl. **34**, 376) eingeführt] einer positiv definiten hermiteschen Matrix  $A$  ist  $P(A) = 1/\lambda$ , wobei  $\lambda$  der größte und  $\lambda$  der kleinste Eigenwert von  $A$  ist.  $T$  sei ein Element einer Klasse  $C$  regulärer linearer Transformationen und es sei  $AT = T^*AT$ . Verff. nennen  $A$  „bestbedingt“ (best-conditioned) bezüglich  $C$ , wenn  $P(AT) \geq P(A)$  für alle  $T \in C$ . Sind  $S_1$  und  $S_2$  zwei Mengen von Einheitsvektoren  $x$  bzw.  $y$ , so heißen  $S_1$  und  $S_2$  „durch  $C$  trennbar“, wenn es ein  $T \in C$  und ein  $k$  gibt mit  $x^* R x < k < y^* R y$ ,  $R = (T^*)^{-1} T^{-1}$ . Sind  $S_1$  und  $S_2$  die Mengen der Einheitseigenvektoren von  $A$  zu  $\lambda$  bzw.  $\lambda$  und sind  $S_1$  und  $S_2$  nicht durch  $C$  trennbar, so ist  $A$  bezüglich  $C$  bestbedingt. (Eine Umkehrung dieses Satzes gilt unter einer Zusatzvoraussetzung). Eine Anwendung hiervon lautet: Eine positiv definite Matrix der Form  $Q = \begin{pmatrix} I_p & B \\ B^* & I_q \end{pmatrix}$  mit  $I_p, I_q$  als Einheitsmatrizen ist bestbedingt bezüglich der Klasse der Transformationen, deren zugehörige Matrizen Diagonalmatrizen sind. L. Collatz.

**Derwidué, L.:** Une méthode mécanique de calcul des vecteurs propres d'une matrice quelconque. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **24**, 150—171 (1955).

Hier wird eine Methode zur mechanischen Berechnung von Eigenvektoren einer beliebigen numerischen Matrix dargelegt. Die Methode „ne prétend pas à l'originalité“, aber sie ist sehr geschickt aus bekannten Umformungen und Kunstgriffen zusammengestellt und praktisch wohl durchdacht, so daß sie in ihrer Art als interessant zu betrachten ist. Der leicht lesbare Text ist leicht zu verwenden. Die Methode besteht aus den Umformungen der charakteristischen Determinante auf einfachere Formen und dann der Herleitung der gesuchten Eigenvektoren aus diesen. Dabei ist für jeden Schritt die entsprechende Schematisierung angegeben, die sofort die Anwendung von Rechennaschinen erlaubt. Ein numerisches Beispiel ist vollständig durchgerechnet. T. P. Angelitch.

**Eltermann, Heinz:** Fehlerabschätzung bei näherungsweise Lösung von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Z. **62**, 469—501 (1955).

In questo lavoro l'A., ispirandosi al noto metodo di Perron [Math. Ann. **67**, 471 (1915)] della funzione „maggiorante“ e della funzione „minorante“ relativo a un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, descrive un procedimento che egli chiama dei „einschließenden Röhrenbereiche“ mediante il quale, assegnato il sistema  $y'_i = f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), se  $y_i = Y_i(x)$  è una sua soluzione approssimata, e  $y_i = y_i(x)$  è una soluzione esatta ( $x_0 \leq x < x_1$ ) e  $z_i = z_i(x) = y_i(x) - Y_i(x)$  è l'errore, si possa dedurre, sotto opportune condizioni, una limitazione del tipo  $p(z_1, z_2, \dots, z_n) \leq g(x)$ ,  $x_0 \leq x < x_1$  in cui  $p(z_1, z_2, \dots, z_n)$  indica una funzione continua positiva che si annulla solo e solo se tutti i  $z_i$  sono nulli, e  $g(x)$  è una funzione che si cerca di determinare. L'A. prende particolarmente in esame il caso in cui le  $f_i$  soddisfano a una disuguaglianza „debole“ di Lipschitz del tipo:  $\text{signum } (y - Y) \{f(x, y) - f(x, Y)\} \leq L(x; |y - Y|)$ . Egli deduce, fra l'altro, tenui generalizzazioni dei noti criteri di unicità di Nagumo [Japanese J. Math. **3**, 107—112 (1926)], di Osgood [Monatsh. Math. Phys. **9**, 331—345 (1898)] e di Scorza-Dragoni [Rend. Circ. mat. Palermo **54**, 430—448 (1930)]. L. Giuliano.

**Hellman, O.:** Die Anwendung des Matrizen bei Eigenwertaufgaben. Z. angew. Math. Mech. **35**, 300—315 (1955).

Die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen  $dr/dt - Ar = 0$  [Matrix  $A(t)$ , Vektor  $r$  mit den Komponenten  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ ] kann in der Gestalt  $r(t) = \Omega_0^t(A) r(0)$  geschrieben werden, wobei der „Matrizant“  $\Omega_0^t$  durch die Matrizenreihe

$I + \int_0^t A d\tau + \int_0^t A d\tau_1 \int_0^{\tau_1} A d\tau_0 + \dots$  gegeben ist ( $I = \text{Einheitsmatrix}$ ). Bei einer

Eigenwertaufgabe wird die Differentialgleichung  $u^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t, \lambda) u^{(j)} = 0$  umgeschrieben in ein System  $dz(t)/dt + A z = 0$ . Die Randbedingungen mögen die Form haben  $\alpha z(0) + \beta z(1) = 0$ ; dann sind die Eigenwerte aus der Gleichung  $\det[\alpha + \beta \Omega_0^{-1}(-A)] = 0$  zu bestimmen. Es gibt eine einfachere Form des Matrixanten, wenn die Matrix (was bei den technischen Anwendungen öfters vorkommt) nur  $n$  Elemente  $\neq 0$  enthält. Anwendungen auf Torsions- und Biegeschwingungen von Stäben mit mehreren numerischen Beispielen, bei denen die (im wesentlichen nur Integrationen erfordernde) Methode gute Näherungswerte für die Eigenwerte liefert.

*L. Collatz.*

**Tatarkiewicz, K.:** Une méthode d'estimation de l'erreur dans le procédé de Ritz. *Ann. Polon. Math.* **1**, 346—359 (1955).

Il s'agit de trouver une méthode utilisable d'évaluation de l'erreur  $r_n = \max |y_n - y|$  dans la résolution approchée du problème  $(p y')' - q y = f$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ , par la méthode de Ritz. Si  $q(x) > 0$ ,  $p(x) \geq \bar{p} > 0$ , l'A. montre que l'on a  $r_n \leq K \cdot M_n$ , où  $M_n = \int_0^1 |(p y_n')' - q y_n - f| dx$  et  $K$  une constante avec

$$\frac{1}{K} \leq \int_0^1 (p u_n'^2 + q u_n^2) dx, \quad \text{où } u_n = \frac{1}{r_n} (y - y_n).$$

Ainsi  $M_n$  est connu dès que l'on a calculé la solution approchée  $y_n$ ; par contre, une évaluation de  $K$  peut être donnée sous diverses formes, selon les hypothèses faites sur  $p$  et  $q$ . On a par exemple, sous les hypothèses indiquées plus haut, l'évaluation

$$K = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dx}{p(x)} \quad \text{ou encore} \quad K = \frac{1}{4\bar{p}}; \quad \text{si on suppose de plus } q(x) \geq \bar{q} > 0, \text{ on}$$

peut aussi prendre  $1/K = 2\sqrt{\bar{p}\bar{q}}$ .

*Ch. Blanc.*

**Pöschl, Theodor:** Über eine Verbesserung der Ritzschen Methode. *Z. angew. Math. Mech.* **35**, 333—334 (1955).

Kurze Inhaltsangabe der nachstehend referierten Arbeit.

*W. Schulz.*

**Pöschl, Th.:** Über eine mögliche Verbesserung der Ritzschen Methode. *Ingenieur-Arch.* **23**, 365—372 (1955).

An Hand mehrerer Beispiele beschreibt Verf. ein Verfahren zur Lösung von Randwertaufgaben von Differentialgleichungen, bei dem die Näherungsfunktionen nicht wie beim Ritzschen Verfahren nur die vorgegebenen Randbedingungen, sondern auch noch Kollokationsbedingungen für einen oder mehrere Punkte des gegebenen Bereiches erfüllen. Wenn als Näherungsfunktionen Polynome gewählt werden, so muß der Grad der Polynome erhöht werden, damit den zusätzlichen Bedingungen genügt werden kann. Vielfach läßt sich so durch ein einziges Polynom fast dieselbe Genauigkeit erreichen wie sonst für zwei und manchmal sogar drei Näherungspolynome. Die vorgeschlagene Abänderung ist auch für andere Methoden (z. B. das Galerkinsche Verfahren) zu verwerten. Konvergenzuntersuchung und Fehlerabschätzung für das neue Verfahren werden nicht durchgeführt.

*W. Schulz.*

**Azbelev, N. V.:** Zur Frage der Erweiterung der Methode von Čaplygin über die Grenze der Anwendbarkeit des Satzes von den Differentialgleichungen hinaus. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **102**, 429—430 (1955) [Russisch].

Es werden Näherungslösungen für  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1})$  mit  $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) gesucht. Bei der Methode von Čaplygin werden zwei Funktionen  $\bar{z}(x)$  und  $\underline{z}(x)$  konstruiert, die den Ungleichungen  $\bar{z} > y > \underline{z}$  genügen.

Verf. gibt einen Satz an, nach dem man Vergleichsfunktionen  $z(x)$  findet, für die die Ungleichungen  $z^{(k)} > y^{(k)}$  bzw.  $z^{(k)} < y^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) in einem gegebenen Intervall  $x_0 \leq x \leq X$  gelten. Vorausgesetzt wird dabei, daß  $f$  im Gebiet  $x_0 \leq x \leq X$ ,  $a_k \leq y^{(k)} \leq b_k$  gewisse Lipschitzbedingungen erfüllt. W. Schulz.

**Jenne, Werner:** Bemerkungen zur rechnerischen Auflösung der Poissonschen Gleichung. Z. angew. Math. Mech. **35**, 330—331 (1955).

**Daymond, S. D.:** The principal frequencies of vibrating systems with elliptic boundaries. Quart. J. Mech. appl. Math. **8**, 361—372 (1955).

Für Ellipsen von der Fläche  $\tau$ , der Exzentrizität  $e$  und dem Achsenverhältnis  $v = \sqrt{1 - e^2}$  werden für die Schwingungsgleichung  $\Delta \Phi + v \Phi = 0$  der 1. Eigenwert  $v = \lambda_1$  bei  $\Phi = 0$  am Rande und der 1. Eigenwert  $v = \mu_1$  bei  $\partial \Phi / \partial n = 0$  am Rande ( $n$  = innere Normale) berechnet, indem die zugehörigen Gleichungen mit modifizierten Mathieuschen Funktionen durch inverse Interpolation angenähert gelöst werden. Tafeln mit meist 5 geltenden Stellen geben  $\sqrt{\lambda_1}$  und  $\sqrt{\mu_1}$  für  $e = 0(0.1)1$  und  $v = 1(0.1)0$ . Läuft  $e$  von 0 nach 1, so gehen monoton  $\sqrt{\lambda_1}$  von 2,4048... nach  $+\infty$ ,  $v \lambda_1$  von 5,78... nach  $\pi^2/4$  und  $\sqrt{\mu_1}$  von 1,8411... nach 0. Die Genauigkeit einer asymptotischen Formel wird geprüft. Die Ableitung der hier verwendeten Mathieuschen Funktion  $(d/d\xi) Ce_1(\xi, q)$  wird genauer untersucht und graphisch dargestellt. L. Collatz.

**Washizu, K.:** On the bounds of eigenvalues. Quart. J. Mech. appl. Math. **8**, 311—325 (1955).

Verschiedene Einschließungssätze für Eigenwerte von Temple, Kohn, Kato u. a. werden geometrisch interpretiert und zeigen sich als Spezialfälle eines allgemeinen Rayleighschen Prinzips. Dieses wird am Beispiel eines Systems mit endlich vielen Freiheitsgraden, nämlich einer Matrixgleichung  $Au = \lambda u$  (mit  $A$  als reeller symmetrischer Matrix) dargestellt. Mit den Polynomen  $g(\lambda)$  und  $h(\lambda)$  wird  $f(\lambda) = g(\lambda)/h(\lambda)$  gebildet und das Rayleighsche Prinzip auf die Matrix  $f(A) = [h(A)]^{-1}g(A)$  angewendet. Die Gleichung  $f(\lambda) - (w, f(A)w)/(w, w)$  habe genau 2 Lösungen  $\lambda = a$  und  $\lambda = b$ . Dann liegt innerhalb und außerhalb des Intervalls  $(a, b)$  je mindestens ein Eigenwert  $\lambda$ . Es werden ausführlich die Fälle (bei denen die Anzahl der Lösungen nicht immer 2 ist)  $f(\lambda) = 1/(\lambda - \alpha)$ ,  $(\lambda - \alpha)^2$ ,  $= \varphi(\lambda) = (\lambda^2 + \alpha^2)/\alpha \lambda$ ,  $1/\varphi(\lambda)$ ,  $(\varphi(\lambda))^2$  diskutiert. L. Collatz.

**Gagua, M.:** Über die angenäherte Lösung linearer Randwertaufgaben für elliptische Gleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR **102**, 1061—1064 (1955) [Russisch].

$T$  sei ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet, das den Koordinatenanfangspunkt  $z = 0$  enthält und von einer im Sinne von Ljapunov glatten Kurve  $\Gamma$  begrenzt wird.  $a^{\kappa\lambda}(t)$  und  $b^{\kappa\lambda}(t, t_1)$  seien gegebene Funktionen, die im Sinne von Hölder auf  $\Gamma$  stetig sind.  $\beta$  sei eine feste Zahl mit  $0 \leq \beta < 1$ . Weiter sei  $u_{\kappa\lambda} = u_{\kappa\lambda}(x, y) = \partial^{\kappa+\lambda} u(x, y) / \partial x^\kappa \partial y^\lambda$  ( $z = x + iy \in T$ ;  $\kappa + \lambda \leq m$ ;  $\kappa, \lambda = 0, 1, \dots$ ;  $u_{00} = u$ ) und  $u = u(x, y)$  eine beliebige Funktion, für die alle  $u_{\kappa\lambda}^+ = u_{\kappa\lambda}^+(t) = \lim_{T \ni x + iy \rightarrow t} u_{\kappa\lambda}(t \in \Gamma)$  existieren und auf  $\Gamma$  im Sinne von Hölder stetig sind. Gesucht wird eine in  $T$  reguläre Lösung der Gleichung

$$\Delta u + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = 0,$$

in der  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$ ,  $c(x, y)$  ganze Funktionen mit reellen Werten für reelle Argumente sind, mit der Randbedingung

$$Ku = \sum_{\substack{\kappa+\lambda \leq m \\ \kappa, \lambda}}^{0 \dots m} \left[ a^{\kappa\lambda}(t) u_{\kappa\lambda}^+(t) + \int_{\Gamma} \frac{b^{\kappa\lambda}(t, t_1)}{|t - t_1|^\beta} u_{\kappa\lambda}^+(t_1) |dt_1| \right] = f(t)$$

( $t \in \Gamma$ ), wobei  $f(t)$  eine gegebene, im Sinne von Hölder stetige Funktion ist. Eine Näherungslösung für  $u$  wird mit Hilfe partikulärer Lösungen  $u_0, u_1, \dots, u_{2n}$  der



Differentialgleichung, die sich angeben lassen, in der Form  $\bar{u}_n = \sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu u_\nu$  bestimmt, derart, daß, wenn alle  $u_{\kappa\lambda}^*$  bis zur Ordnung  $p$  einschließlich ( $p \geq m$ ) existieren und auf  $\Gamma$  im Sinne von Hölder stetig sind mit dem Exponenten  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), für  $n = m + 1, m + 2, \dots$  die Abschätzung  $\|u - \bar{u}_n\| = O\{(n - m)^{-p+m-\alpha}\}$  gilt. Dabei ist die Norm definiert durch  $\|u\| = \sup_{\kappa+\lambda \leq m} \left( \max_{x+iy \in T} |u_{\kappa\lambda}| \right)$ .  
*W. Schulz.*

( $\kappa, \lambda = 0, 1, \dots, m$ ).

**Albrecht, Julius:** Eine einheitliche Herleitung der Gleichungen von Trefftz und Galerkin. *Z. angew. Math. Mech.* **35**, 193—195 (1955).

Bei der ersten Randwertaufgabe mit einer elliptischen linearen Differentialgleichung  $L[u] = r(x_1, \dots, x_n)$  und der Randbedingung  $u = f$  auf dem Rande wird einer Näherung  $w$  für eine exakte Lösung  $u(x_1, \dots, x_n)$  in dem Ansatz  $w = w_0 + \sum_{\mu=1}^m c_\mu w_\mu$  mit noch unbestimmten Konstanten  $c_\mu$  und festen Ansatzfunktionen  $w_\mu$  die Forderung auferlegt, daß der Fehler  $F = w - u$ , gemessen in einer gewissen quadratischen Metrik  $J[F]$  möglichst klein wird. Je nach der Wahl der Funktionen  $w_\mu$  kann man die Trefftzschen und die Galerkinschen Gleichungen erhalten. In beiden Fällen gilt die Maximumaussage  $J[u - w_0] \geq J\left[\sum_{\mu=1}^m c_\mu w_\mu\right]$ . Beide Arten von Gleichungen lassen sich auch auf die 2. und 3. Randwertaufgabe übertragen. Zahlenbeispiel.  
*L. Collatz.*

**Wasow, Wolfgang:** Discrete approximations to elliptic differential equations. *Z. angew. Math. Phys.* **6**, 81—97 (1955).

Bei der 1. Randwertaufgabe mit einer elliptischen Differentialgleichung

$$L[u] \equiv \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in } B$$

und  $u = f(x)$  auf  $C$  ( $x$  steht für  $x_1, \dots, x_n$ , beschränkter Bereich  $B$  mit Rand  $C$ ,  $\bar{B} = B + C$ , die Randwertaufgabe sei eindeutig lösbar) sei  $U(x)$  eine nach einem Differenzenverfahren berechnete Näherung. Die verschiedenen Arten von Verfahren („quadratische“ und andere Gitter, verschiedene Interpolationstechniken an gekrümmten Rändern usw.) lassen sich einheitlich schreiben:  $U(x)$  ist jeweils Lösung der Integralgleichung  $U(x) = \int_B U(y) dF(y, x)$  in  $B$  und  $U(x) = f(x)$  auf  $C$ .

Man erhält die einzelnen Verfahren jeweils durch passende Wahl von  $F(y, x)$ . Unter gewissen Voraussetzungen über  $F(y, x)$  und über die Randwertaufgabe, über Existenz der  $p$ -ten Ableitungen der Lösungsfunktion  $u(x)$  in  $\bar{B}$  bei passendem  $p$ , über Kenntnis von Schranken für den Betrag dieser Ableitungen und über Existenz und Eigenschaften einer gewissen Hilfsfunktion  $Q(x)$  wird für den Fehler  $w = U - u$  mit Hilfe der genannten Schranken eine sehr allgemeine Abschätzungsformel aufgestellt, die eine Reihe bekannter Fälle [Gerschgorin, *Z. angew. Math. Mech.* **10**, 373 (1930) u. a.] als Spezialfälle enthält. Auch Formeln von Mikeladze, Bickley, Milne und ein Extrapolationsverfahren von L. F. Richardson [*Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **210**, 307—357 (1910)] werden als Beispiele behandelt. *L. Collatz.*

**Volkov, E. A.:** Zur Lösung von Gleichungen vom elliptischen Typus mit Randbedingungen, die Ableitungen enthalten, mittels der Netzmethode. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **102**, 437—440 (1955) [Russisch].

Für Gleichungen von dem im Titel genannten Typ werden Approximationen durch endliche Differenzenausdrücke aufgestellt, wobei in vielen Fällen die Größenordnung des Fehlers  $h^2$  wird.  
*W. Schulz.*

**Salzer, Herbert E.:** Osculatory quadrature formulas. *J. Math. Physics* **34**, 103—112 (1955).

Aus Hermiteschen Interpolationspolynomen, die sowohl Funktionswerte wie

erste Ableitungen enthalten, ergeben sich besonders genaue Integrationsformeln. Die exakten Werte der auftretenden Koeffizienten bei verschiedenen Intervallen zwischen  $n$  äquidistanten Punkten werden für  $n = 2, 3, \dots, 7$  gegeben und auch die entsprechenden Restglieder der Formeln. *E. J. Nyström.*

**Lotkin, Mark:** On the improvement of accuracy in integration. *Quart. appl. Math.* **13**, 47—54 (1955).

Ein Rechenschema wird vorgeschlagen, welches die jeweiligen vorläufigen Näherungswerte der durch numerische Integration zu erhaltenden Funktion benutzt, um die Genauigkeit der Integration zu verbessern, und welches gleichzeitig ein zweckmäßiges Kriterium für die Wahl oder Änderung des günstigsten Integrationsintervalles gestattet. *E. Rabe.*

**Salzer, Herbert E.:** Equally weighted quadrature formulas over semi-infinite and infinite intervals. *J. Math. Physics* **34**, 54—63 (1955).

Zur numerischen Auswertung von Integralen  $\int e^{-x} f(x) dx$ , bzw.  $\int e^{-x^2} f(x) dx$  über Intervalle von 0 bis  $\infty$ , bzw. von  $-\infty$  bis  $\infty$  werden bestmögliche Formeln entwickelt, und zwar in Analogie mit den bekannten Tschebyscheffschen Formeln, in welchen alle Funktionswerte mit gleichem Gewicht genommen werden. Die betr., zum Teil komplexen Konstanten sind bis einschließlich 10 Funktionswerte ver-  
tafelt. Das Resultat der Integration ist stets exakt für Polynome von höchst möglichem Grad. *E. J. Nyström.*

**Stein, P.:** A numerical solution  $d^2 y/dx^2 = F(x)$ . *Math. Gaz.* **39**, 203—206 (1955).

In Fällen, wo die zweifache Integration von  $F(x)$  unbequem ist, wird folgender Weg zur Bestimmung einer Näherungslösung von  $y''(x) = F(x)$  mit  $y(0) = y_0$ ,  $y(l) = y_l$  vorgeschlagen. Das Intervall  $0 \leq x \leq l$  wird in  $n+1$  gleiche Teile der Länge  $h$  geteilt. Die Funktionswerte an den  $n$  Teilpunkten im Innern des Intervalls ergeben sich aus einem linearen Gleichungssystem

$$2y_1 - y_2 = \lambda_1, -y_1 + 2y_2 - y_3 = \lambda_2, \dots, -y_{r-1} + 2y_r - y_{r+1} = \lambda_r, \dots, -y_{n-1} + 2y_n = \lambda_n.$$

Als rechte Seiten können z. B. genommen werden:

$$\lambda_1 = y_0 - h^2 F(h), \lambda_2 = -h^2 F(2h), \dots, \lambda_r = -h^2 F(rh), \dots, \lambda_n = -h^2 F(nh) + y_l.$$

Für den maximalen Fehler von  $y_r$  wird eine Abschätzung gegeben. *W. Schulz.*

**Gurk, Herbert M.:** The use of stability charts in the synthesis of numerical quadrature formulae. *Quart. appl. Math.* **13**, 73—78 (1955).

Die von Gray [ibid. **12**, 133—140 (1954)] eingeführten Stabilitätskarten oder Stabilitätsdiagramme werden hier zur Klassifikation von Quadratur-Formeln benutzt, gemäß deren hierfür wesentlichen Eigenschaften. Methoden zum synthetischen Aufbau von Quadratur-Formeln werden danach beschrieben, wobei das Schwergewicht auf solche Methoden gelegt wird, die für die Zwecke der „Real-time simulation“ anwendbar sind. Schließlich werden auch die Beziehungen zwischen den charakteristischen Eigenschaften des Stabilitätsdiagramms und den Ergebnissen der numerischen Rechnungen diskutiert. *E. Rabe.*

**Ho, Kuo-Chu:** Double interpolation formulae and partial derivatives in terms of finite differences. *Math. Tables Aids Comput.* **9**, 52—62 (1955).

Für Interpolation zwischen Funktionswerten zweier Variablen ist es gut, Formeln zu haben, die gegebene Funktionswerte selbst statt deren Differenzen enthalten. Einer von Salzer gegebenen Formel dieser Art werden andere zur Seite gestellt, die zusammen eine zweckmäßige Gruppe bilden. Für die partiellen Ableitungen bis einschließlich dritter Ordnung werden sowohl Ausdrücke mit Differenzen als solche mit Funktionswerten übersichtlich zusammengestellt. *E. J. Nyström.*

**Ostrowski, A. M.:** Note on a logarithm algorithm. *Math. Tables Aids Comput.* **9**, 65—68 (1955).

Von D. Shanks ist eine Kettenbruchentwicklung für  $\lambda = a_0 \log a_1$  in einer für Rechenautomaten geeigneten Form vorgeschlagen worden (dies. Zbl. 55, 120). In dieser Entwicklung werden Folgen  $\{a_i\}$  und  $\{n_i\}$  berechnet, aus denen sich  $\lambda = 1/n_1 + 1/n_2 + 1/\dots$  ergibt. In der vorliegenden Arbeit wird nun eine leicht zu berechnende Korrektur  $\eta_i^*$  für den  $i$ -ten Näherungsbruch  $\mu_i = P_i/Q_i$  für  $\lambda$  angegeben und der Fehler  $Q_i = \lambda - \mu_i - \eta_i^*$  abgeschätzt. Mit der Bezeichnung  $\mu = \ln a_0$  ergibt sich:  $\eta_i^* = (-1)^i (a_{i+1} - 1)/\mu Q_i$  und  $|Q_i| \leq \mu Q_i \eta_i^2 \leq \mu |\eta_i|^{3/2} \leq \mu/Q_i^3$ , wenn  $\mu/Q_i \leq \gamma_0 = 1,793$  ist. Die Verwendung dieser Korrektur bringt vor allem bei Berechnung von  $\lambda$  mit höherer Stellenzahl eine beträchtliche Ersparnis an Rechenarbeit. Schließlich wird noch bemerkt, daß der Arbeitsaufwand an Divisionen zur Berechnung von  $\mu_m$  von der Größenordnung  $m \lg m$  ist. *Fr.-A. Willers.*

**Rees, Mina: Digital computers.** Amer. math. Monthly 62, 414–432 (1955).

In den vergangenen zehn Jahren hat die Konstruktion und die Anwendung elektronischer Rechenmaschinen bedeutende Fortschritte gemacht. Diese Maschinen waren ursprünglich für die Integration von Differentialgleichungen der Ballistik gebaut worden; ihre Anwendungen haben sich aber seither auf das ganze Gebiet der numerischen Analysis erweitert. Außerdem beginnen sie auch in der Buchhaltung eine Rolle zu spielen. In Anbetracht dieses schnellen Fortschrittes ist es erforderlich, das nötige Personal für Bedienung und Wartung der Maschinen bereitzustellen. Die Ausbildung dieses Personals stellt ein wichtiges Problem dar. In technischer Hinsicht erwähnt Verf. folgendes: Eine Maschine ist hauptsächlich durch die Art ihres Speicherwerkes und durch ihre Rechengeschwindigkeit gekennzeichnet. Die heute in Gebrauch befindlichen Speicherwerke arbeiten entweder mit akustischen Verzögerungsleitungen, Magnettrommeln, elektrostatischen Speicherröhren oder Magnetkernen. Die Zeit, welche für die Multiplikation zweier vielstelliger Zahlen beansprucht wird, schwankt zwischen etwa  $3 \times 10^{-5}$  und  $3 \times 10^{-2}$ s. Von großer Wichtigkeit sind auch die Organe zur Entgegennahme und zur Ausgabe von Werten. Als Zwischenspeicher verwendet man Magnetbänder und für das endgültige Niederschreiben der Resultate sind schnellste Druckwerke entwickelt worden. Verf. gibt zum Abschluß folgende Übersicht über die wichtigsten Anwendungsgebiete elektronischer Rechenmaschinen: Hydrodynamik, einschließlich Wettervorhersage; Kristallographie; Flugzeugbau; Atomreaktoren; Astronomie; ferner buchhalterische und administrative Probleme. *Ambros Speiser.*

● **Computer development (SEAC and DYSEAC) at the National Bureau of Standards, Washington, D. C.** (National Bureau of Standards, US Department of Commerce, Circular 551). Washington: US Government Printing Office 1955. IV, 146 p.

In acht Aufsätzen wird eine ausführliche Beschreibung der beiden im „National Bureau of Standards“ arbeitenden Maschinen gegeben und über die mit ihnen gemachten Erfahrungen berichtet. SEAC, eine im Dualsystem (Wortlänge 45 Dualziffern) arbeitende Hochgeschwindigkeits-Ziffernmaschine war ursprünglich nur als Interimsmaschine gedacht; wurde dann aber weiter ausgebaut, und zwar wurde die Zahl der Röhren von 750 auf 1300, die der Germanium-Dioden von 10500 auf 16000 vermehrt. Sie arbeitet mit Vier- bzw. Dreiaдресsbefehlen und hat zwei Speicher, deren jeder 512 Worte faßt. Der akustische Quecksilberrohrenspeicher arbeitet in Serie, der schnellere mit 45 Kathodenröhren nach Williams ausgerüstete im Parallelbetrieb. Dazu können noch Magnetbänder als Hilfsspeicher benutzt werden. Die Eingabe erfolgt durch Ablesung von Lochstreifen bzw. Magnetbändern, die Ausgabe durch Druck oder Lochung. Die zweite Maschine DYSEAC benutzt vielfach die gleichen Elemente wie SEAC, die sich übrigens zum Teil schon in der EDVAC finden, ist aber durch verschiedene Erweiterung flexibler und anpassungsfähiger gemacht. Die einzelnen technischen Einrichtungen beider Maschinen werden eingehend beschrieben, ferner wird auf die vom Bureau of Standards entwickelten



Speicherformen und Eingabe- und Ausgabeeinrichtung für NBS-Rechner eingegangen, und es werden die in dreijährigem Betrieb mit der SEAC gemachten Erfahrungen besprochen. *Fr.-A. Willers.*

● **Andreev, P. P.:** *Mathematische Tafeln.* 2. Aufl. Moskau: Statistischer Staatsverlag 1955. 283 S. 9 r. 60 k. [Russisch].

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. dies. Zbl. 48, 105.

**Kaye, Joseph:** *A table of the first eleven repeated integrals of the error function.* J. Math. Physics 34, 119—125 (1955).

L'A. riporta le tavole per i valori numerici fino alla quinta cifra decimale, delle seguenti funzioni:  $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ ,  $I^0 \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$ ,  $I^n \operatorname{erfc} x =$

$\int_x^\infty I^{n-1} \operatorname{erfc} \xi d\xi$  in cui  $n$  può assumere tutti i valori compresi fra 0 e 11. *D. Graffi.*

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

**Castoldi, Luigi:** Formule ricorrenti per il calcolo dei cumulanti e dei momenti di una distribuzione statistica a partire dai corrispondenti momenti fattoriali. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 24, 157—164 (1955).

Etant donnée une distribution, l'A. exprime les moments  $\mu'_r$  en fonction linéaire des moments factoriels  $\mu'_{(r)}$ . Les coefficients satisfont à l'équation aux différences:  $C(r, j) = C(r-1, j-1) - j C(r-1, j)$ ;  $1 < j < r$ , avec les valeurs initiales  $C(r, 1) = C(r, r) = 1$ , qui définit les nombres de Stirling de II<sup>e</sup> espèce  $C(r, j) = \Delta^j(0^r)/(j!)$ , et dont une table pour  $r = 1, 2, \dots, 10$ , est donnée. Par inversion, on obtient l'expression des  $\mu'_{(r)}$  en fonction des  $\mu'_r$ , les coefficients étant cette fois les nombres de Stirling de I<sup>e</sup> espèce. Enfin le calcul des cumulants successifs en fonction des moments  $\mu'_r$  est réalisé au moyen d'un opérateur. Page 160, formule (12') lire  $\mu'_3 = \mu'_{(3)} + \dots$ . Page 161, lire  $C(9, 2) = 255$ . Page 162, dernière ligne, lire 9450 au lieu de 9550. *A. Sade.*

**Ghurye, S. G.:** Random functions satisfying certain linear relations. II. Ann. math. Statistics 26, 105—111 (1955).

(Part 1, this Zbl. 56, 124.) Let a random function  $X(t)$  be defined for all  $t$  and let there exist continuous real valued functions  $\alpha_i(h)$  ( $i = 0, \dots, k$ ) such that  $\alpha_0(h) = 1$  and that  $\sum_{i=0}^k \alpha_i(h) X(t + [n + k - i]h)$  satisfies certain conditions about independence and non-correlation. It is proved that the  $\alpha_i$  are restricted to certain forms and properties of the roots of  $\sum_{i=0}^k \alpha_i(h) x^{k-i} = 0$  are derived. *S. Vajda.*

**Hoeffding, Wassily:** The extrema of the expected value of a function of independent random variables. Ann. math. Statistics 26, 268—275 (1955).

Es werden  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktionen vom Produkttypus betrachtet,  $F(x) = F(x_1) F(x_2) \cdots F(x_n)$ , die den Bedingungen  $\int_{-\infty}^{\infty} g_i^{(j)}(x) dF_j(x) = c_{ij}$  ( $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $F_j(x) = 0$ , wenn  $x < A_j$ , bzw.  $= 1$ , wenn  $x > B_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  mit gegebenen Funktionen  $g_i^{(j)}(x)$  und gegebenen Konstanten  $c_{ij}$ ,  $A_j$  und  $B_j$  (die Werte  $A_j = -\infty$ ,  $B_j = +\infty$  sind auch zugelassen) genügen. Diese Verteilungsfunktionen bilden eine Klasse  $C$ . Es sei  $C^*$  diejenige Unterklasse von  $C$ , die nur reine Sprungfunktionen mit endlich vielen Sprüngen enthält, und  $C_m$  diejenige Unterklasse von  $C^*$ , die aus reinen Sprungfunktionen mit genau  $m$  Sprüngen be-

steht. Betrachtet werden die Erwartungen  $\Phi(F) = \int K(x) dF(x)$ , wo  $K(x)$  eine solche gegebene Funktion ist, daß  $\Phi(F)$  für alle  $F \in C$  existiert und endlich ist. Es wird gezeigt, daß  $\sup_{F \in C^*} \Phi(F) = \sup_{F \in C_{k+1}} \Phi(F)$  ist. Ziemlich allgemein gilt ferner  $\sup_{F \in C} \Phi(F) = \sup_{F \in C_{k+1}} \Phi(F)$ . Die Bedingungen für die letzte Relation werden näher untersucht.

H. Bergström.

**Bertaut, Félix:** Statistique des fonctions complexes. Application à la cristallographie. C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 938—940 (1955).

Verf. dehnt seine früheren Untersuchungen (dies. Zbl. **64**, 130) auf komplexwertige Funktionen der Zufallsvariablen aus und deutet einige Anwendungen an.

D. Morgenstern.

**Derman, C. and H. Robbins:** The strong law of large numbers when the first moment does not exist. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 586—587 (1955).

Es wird gezeigt, daß das starke Gesetz der großen Zahlen,  $P\{S_n/n \rightarrow \infty\} = 1$  für unabhängige Variable mit  $E(X) = \infty$  (eigentlich divergent) auch dann gilt, wenn  $F(x) \leq 1 - c x^\alpha$  für große  $x$  und  $\int |x|^\beta dF(x) < \infty$  ( $0 < \alpha < \beta < 1$ ), also  $E(X)$  nur als Cauchyscher Hauptwert  $= \infty$  ist.

D. Morgenstern.

**Teicher, Henry:** An inequality on Poisson probabilities. Ann. math. Statistics **26**, 147—149 (1955).

Applying the central limit theorem to the Poisson distribution, the author proves the inequality

$$\sum_{j=0}^{[\lambda]} \frac{\lambda^j}{j!} > e^{\lambda-1} \text{ for all } \lambda \geq 0, \text{ and } > \frac{1}{2} e^\lambda \text{ for all integral } \lambda > 0.$$

H. Bergström.

**Fisz, M.:** Refinement of a probability limit theorem and its application to Bessel functions. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **6**, 199—202 (1955).

Für unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariable  $X_i^{(n)}$  mit Parametern  $w_i = w_i^{(n)} = n d_i$  beweist der Verf.

$$P(X_1^{(n)} - X_2^{(n)} = k) = \frac{1}{\sqrt{w_1 + w_2}} \varphi(z) \left(1 + \sum_{v=1}^N G_v\right) + o((w_1 + w_2)^{-(N+1)/2})$$

für  $n \rightarrow \infty$  (also  $w_i \rightarrow \infty$ ). Dabei ist  $\varphi(z)$  die Dichte der Normalverteilung,  $G_v$  sind gewisse rationale Ausdrücke in  $w_i$  und  $z = [k - (w_2 - w_1)]/\sqrt{w_1 + w_2}$ . Der Beweis beruht auf der Darstellung jedes  $X_i^{(n)}$  als Summe von  $n$  Poisson-Variablen mit festem Parameter  $d_i$  und Anwendung einer allgemeinen Formel von C. G. Esseen [Acta math. **77**, 1—125 (1945)]. Durch Vergleich mit der exakten Formel im Falle  $d_1 = d_2$  ergibt sich eine asymptotische Formel für Besselfunktionen mit rein imaginärem Argument.

D. Morgenstern.

**Fisz, M.:** The limiting distribution of a function of two independent random variables and its statistical application. Colloquium math. **3**, 138—146 (1955).

Hauptergebnis: Für unabhängige  $X_v(\lambda)$  konvergiere  $X_v(\lambda)/m_v(\lambda) \rightarrow 1$  der Wahrscheinlichkeit nach für  $\lambda \rightarrow \infty$  und die Verteilung von  $(X_v(\lambda) - m_v(\lambda))/v_v(\lambda)$  strebe gegen die Normalverteilung („sei asymptotisch  $[m_v, v_v]$ -normal“). Dann gilt, wenn noch  $m_1/m_2 \rightarrow 1$  strebt, daß  $(X_1(\lambda) - X_2(\lambda))/(X_1(\lambda) + X_2(\lambda))^p$  asymptotisch  $[(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)^p, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}/(m_1 + m_2)^p]$ -normal ist. Beweis mittels Fouriertransformation für  $p = 0$ ; dann genügt für  $p > 0$  ein Satz von H. Cramér (Methods of mathematical statistics, Princeton 1946, § 20. 6). Als statistische Anwendung wird damit näherungsweise für große Stichprobenzahl behandelt: Test, ob die Streuung zweier Gaußscher, Poissonscher, Binomial- oder negativ-binomischer Verteilungen gleich bzw. gleich einem gegebenen Wert sind.

D. Morgenstern.

**Fuchs, Aimé:** Sur certains opérateurs linéaires associés aux processus réels de Markoff. C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 1506–1508 (1955).

Zu einem durch seine Übergangswahrscheinlichkeit

$$F(t, x, \tau, E) = P\{X(\tau) \in E | X(t) = x\} \quad (t < \tau)$$

auf der reellen Zahlengeraden gegebenen Markoffschen Prozeß gehören der Vorwärtsoperator im Banach-Raum der Borelmaße  $T_{t,\tau} \varphi = \int \varphi(dx) F(t, x, \tau, E)$  und der Rückwärtsoperator im Raum der meßbaren beschränkten Funktionen  $\bar{T}_{t,\tau} \psi = \int \psi(\lambda) F(t, x, \tau, dx)$ , die adjungiert zueinander sind. Falls diese Operatoren stetig sind (im Sinne der gleichmäßigen Operatortopologie), werden Bedingungen dafür angegeben, daß der infinitesimale Operator  $A$  existiert und die verallgemeinerten Gleichungen von Kolmogoroff gelten:

$$\partial F(t, x, \tau, \cdot) / \partial \tau = A(\tau) F(t, x, \tau, \cdot), \quad \partial F(t, \cdot, \tau, E) / \partial t = \bar{A}(t) F(t, \cdot, \tau, E).$$

*D. Morgenstern.*

**Maravall Casesnoves, Dario:** Aleatorische Stoßbewegungen und hereditäre stochastische Prozesse. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. **15**, 9–30 (1955) [Spanisch].

**Birch, B. J.:** On games with almost complete information. Proc. Cambridge philos. Soc. **51**, 275–287 (1955).

The following theorems are proved: (i) Let  $\Gamma$  be the complete inflation of the game  $G$ . If a player has almost complete information in  $\Gamma$ , then there exists an equilibrium point in  $\Gamma$  in which he has a pure strategy. (ii) (The converse of (i), with a restriction.) Given a structure and a player for whom there is not almost complete information in the complete inflation, then it is possible to find a game with the given structure which has no equilibrium point at which that player has a pure strategy, provided that the structure of the completely inflated game is such that if  $U < V$ , then  $V < U$ , where  $U$  and  $V$  are information sets. — These theorems are, essentially, extensions of theorems in Kuhn (this Zbl. **50**, 143) and in Dalkey (this Zbl. **50**, 143) (see also Otter and Dunne, this Zbl. **50**, 141) which contain also the relevant definitions, except for the following new concept: a game has almost complete information for a given player, if he has complete information about every other player, and every other player has complete information about him. The term structure means in this paper a game apart from its pay-off functions. — There is also a sketch of a theory dealing with behaviour strategies rather than with mixed strategies.  
*S. Vajda.*

### Statistik:

**Teichroew, D.:** Numerical analysis research unpublished statistical tables. J. Amer. statist. Assoc. **50**, 550–556 (1955).

Es werden Tabellen von in der mathematischen Statistik wichtigen Funktionen und Koeffizienten angezeigt, die an der Universität von Californien in Los Angeles meist mittels der SWAC (Bureau of Standards Western Automatic Computer) berechnet wurden und infolgedessen vielfach eine sehr große Zahl von Dezimalstellen aufweisen. Die meisten dieser Tabellen existieren nur auf Lochkarten, und es ist nicht sicher, daß sie jemals publiziert werden. Sie werden aufgeführt unter fünf Klassen: Tabellen, die zusammenhängen mit I. der Normalverteilung, II. der  $F$ -Verteilung, III. der  $t$ -Verteilung, IV. Tabellen zur Auswahl von Stichproben aus Gesamtheiten mit bestimmten Verteilungen, V. Verschiedenes. *O. Ludwig.*

**The normal probability function. Tables of certain area-ordinate ratios and of their reciprocals.** Editorial. Biometrika **42**, 217–222 (1955).

Für Verteilungsdichte und kumulative Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$Z(X) = \exp(-X^2/2) / \sqrt{2\pi}, \quad P = 1 - Q = \int_{-\infty}^X Z(u) du,$$



enthält die vorliegende Tafel die Werte der Quotienten  $P/Z$  für  $X = 0; 0,01; \dots; 3$  und  $Q/Z, Z/P, Z/Q$  für  $X = 0; 0,01; \dots; 4; 4,05; \dots; 5$ . Die Werte  $P/Z, Q/Z, Z/Q$  sind mit 5 Dezimalen, die von  $Z/P$  auf 5 Ziffern genau angegeben. Interpolation erfolgt i. a. linear, gegebenenfalls nach der Besselschen und für  $P/Z$  und  $X > 2,5$  mittels zweiter Differenzen nach Everetts Formel.

*M. P. Geppert.*

**Wartmann, Rolf:** Einige Bemerkungen zur logarithmischen Normalverteilung. *Mittel.-Bl. math. Statistik* **7**, 152—165 (1955).

Verf. behandelt für die allgemeine logarithmische Normalverteilung die Berechnung der Momente, die Beziehungen zwischen Fluchtpunkt und Schiefe, den Grenzübergang zur gewöhnlichen Normalverteilung und die Varianz der Stichprobenkumulanten bei der Schätzung der Kumulanten einer log-Normalverteilung.

*O. Ludwig.*

**Lukacs, Eugene:** Applications of Faà di Bruno's formula in mathematical statistics. *Amer. math. Monthly* **62**, 340—348 (1955).

Die Formel von F. Faà di Bruno (1855) gibt die Entwicklung von  $d^p z/dt^p$  für Funktionen von Funktionen ( $z = g(y)$ ,  $y = f(x)$ ,  $z = g[f(x)]$ ). Erste Anwendung: Beweis der Beziehungen zwischen Momenten und Kumulanten einer Verteilung [diese sind bzw. die Ableitungen von  $f(t)$  und  $\log f(t)$  ( $t = 0$ ),  $f(t)$  = charakteristische Funktion]. Zweite Anwendung: es sei  $k_p(x_1, \dots, x_n)$  die „ $k$ -statistic“  $p$ -ter Ordnung (d. h., das symmetrische Polynom der Beobachtungswerte  $x_i$ , dessen Mittelwert identisch mit dem  $p$ -ten Kumulant übereinstimmt); Verf. beweist, daß  $k_p$  und der Beobachtungsmittelwert  $(x_1 + \dots + x_n)/n$  nur für die Normalverteilung unabhängig sind. Dafür soll (nach Faà di Brunos Formel)  $d^p \log f(t)/dt^p = \text{const.}$  sein, daher  $f(t) = \exp(\text{Polynom})$ , aber nur für Grad = 2 entsteht so (Marcinkiewicz) eine charakteristische Funktion (und zwar die charakteristische Funktion der Normalverteilung).

*B. de Finetti.*

**Lieblein, Julius:** On moments of order statistics from the Weibull distribution. *Ann. math. Statistics* **26**, 330—333 (1955).

Verf., der in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **50**, 360) für die Verteilung  $F(x) = \exp(-e^{-y})$ ,  $y = (x - u)/\beta$ ,  $-\infty < x < \infty$ , die ersten beiden Momente der Rangzahlen (order statistics) angegeben hatte, leitet jetzt für die beiden anderen Grenzverteilungen der Verteilung des kleinsten Wertes in einer Stichprobe —  $G(x) = 1 - \exp[-(-x)^{-m}]$  für  $x \leq 0$ , bzw.  $= 1$  für  $x > 0$ ;  $H(x) = 0$  für  $x \leq 0$ , bzw.  $= 1 - \exp(-x^m)$  für  $x > 0$  — die beiden ersten Momente der Rangzahlen mit Hilfe der in der früheren Arbeit entwickelten Methoden her, wobei sich zeigt, daß diese beiden Verteilungen die einzigen sind — von Trivialfällen abgesehen —, die sich auch noch so behandeln lassen. Die Lösung liefert die Momente in geschlossener Form mit Hilfe von  $\Gamma$  und unvollständigen  $\text{B}$ -Funktionen.

*O. Ludwig.*

**Okamoto, Masashi:** Fit of a Poisson distribution by the index of dispersion. *Osaka math. J.* **7**, 7—13 (1955).

Für aus einer Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda$  entnommene  $n$ -gliedrige Stichproben  $x_1, \dots, x_n$  mit Mittelwert  $\bar{x}$  ist der Dispersionsindex  $\chi^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / \bar{x}$  bekanntlich, wenn  $\lambda \rightarrow \infty$ , asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $n - 1$  F. G. Zwecks eingehender Untersuchung der Abweichung berechnet Verf. exakt Erwartungswert und Varianz der Größe  $\chi^2$ :  $E(\chi^2) = n - 1$ ,  $\text{var}(\chi^2) = 2(n - 1) [1 - f(n\lambda)]$  mit  $f(a) = (e^a - 1)^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} a^i / [i! i]$ , sowie  $\mu_3(\chi^2)$ ,  $\mu_4(\chi^2)$ ; letztere enthalten über  $f(n\lambda) = E(X^{-1})$  hinaus auch die weiteren, durch  $X = x_1 + \dots + x_n > 0$  bedingten, negativen Momente  $E(X^{-2})$ ,  $E(X^{-3})$ . Die Funktion  $f(a)$  wird für  $a = 1, 2, \dots, 50, 55, \dots, 125$  mit Hilfe der Identität  $x^{-1} = \sum_{i=1}^t \frac{(i-1)! x!}{(x+i)!} + \frac{t! (x-1)!}{(x+t)!}$  tabuliert. Seine theoretischen Resultate benutzt Verf. zur Analyse und Beurteilung

der von P. S. Sukhatme durchgeführten experimentellen Nachprüfungen der asymptotischen  $\chi^2$ -Verteilung. *M. P. Geppert.*

**Dunnett, C. W. and M. Sobel:** Approximations to the probability integral and certain percentage points of a multivariate analogue of Student's  $t$ -distribution. *Biometrika* **42**, 258—260 (1955).

Die Arbeit greift die von den Verff. (dies. Zbl. **56**, 367) betrachtete  $p$ -dimensionale Student-Verteilung

$$f(t_{1n}, \dots, t_{pn}) = A^{1/2} \Gamma((n-p)/2) \left[ 1 + n^{-1} \sum_{i,j} a_{ij} t_{in} t_{jn} \right]^{-(n+p)/2} / [(n\pi)^{p/2} \Gamma(n/2)]$$

auf (Bezeichnungen und Voraussetzungen ebenda) und leitet für die zugehörige kumulative Verteilungsfunktion

$$I = \Pr \{t_{1n} < h_1, \dots, t_{pn} < h_n\} = \int_0^\infty G_p(h_1 s, \dots, h_p s; \{\varrho_{ij}\}) f_n(s) ds,$$

wo  $G_0(x_1, \dots, x_p; \{\varrho_{ij}\})$  die k. V. F. der  $p$ -variablen standardisierten Normalverteilung mit Korrelationsmatrix  $\{\varrho_{ij}\}$  bedeutet, durch Ausnutzung der für beliebige,

nicht abnehmende Funktionen  $F_i(x)$  geltenden Ungleichung  $E \left\{ \prod_{i=1}^p F_i(x) \right\} \geq$

$\prod_{i=1}^p E \{F_i(x)\}$  die untere Grenze  $I \geq \prod_{i=1}^p \Pr \{t_{in} < h_i\}$  ab, welche von  $\{\varrho_{ij}\}$  nicht abhängt und auf der klassischen Student-Verteilung von  $t_{in}$  beruht. Sie läßt sich unter der Annahme  $\varrho_{ij} = b_i b_j$  ( $0 \leq b_i < 1$ ),  $h_i \geq 0$  verschärfen. Für  $\varrho_{ij} = \varrho$ ,  $h_i = h$  gewinnen Verff. aus der bekannten Ungleichung für absolute Momente die noch schärfere Abschätzung:

$$I \geq [\Pr \{t_{1n} < h, t_{2n} < h\}]^{p/2}.$$

Die genannten Abschätzungen sind schärfer als die von E. Paulson (dies. Zbl. **46**, 360) ohne spezielle Annahmen gewonnenen. In einer Tabelle werden die verschiedenen Approximationen und exakten Werte für  $I$  numerisch verglichen. *M. P. Geppert.*

**Kimball, Bradford F.:** Practical applications of the theory of extreme values. *J. Amer. statist. Assoc.* **50**, 517—528 (1955).

Referat über E. J. Gumbel, Statistical theory of extreme values and some practical applications (dies. Zbl. **56**, 131). *H. Bergström.*

**Sprott, D. A.:** Some series of partially balanced incomplete block designs. *Canadian J. Math.* **7**, 369—381 (1955).

The author generalizes a theorem contained in Bose and Nair [*Sankhyā* **4**, 337—372 (1939)] and applies the methods of his own paper (this Zbl. **55**, 377) to obtain general series of partially balanced incomplete block designs. *S. Vajda.*

**Bose, R. C. and W. H. Clatworthy:** Some classes of partially balanced designs. *Ann. math. Statistics* **26**, 212—232 (1955).

Partially balanced incomplete block designs (PBIBD) with  $m$  associate classes were defined by Bose and Shimamoto (this Zbl. **48**, 116). The present paper deals with  $m = 2$  and enumerates designs with parameters  $\lambda_1 = 1$  and  $\lambda_2 = 0$ . For the case when the number of blocks in which each of the varieties occurs is 3, it is shown that all designs with  $t = 2, 3$  exist, while for  $t = 1$  this is not so. Some lemmas give an insight into the structure of PBIBD's with  $\lambda$ 's as above. *S. Vajda.*

**Ehrenfeld, Sylvain:** On the efficiency of experimental designs. *Ann. math. Statistics* **26**, 247—255 (1955).

For an experimental design we may use a model  $E[y] = X\beta$ , where  $y$  is a column vector of  $N$  independent normally distributed random variables with common variance  $\sigma^2$ ,  $X$  is a matrix of given constants  $X_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, p$ , and  $\beta$  is a column vector of population regression coefficients. ( $[y]$  denotes the expected value). The constants  $X_{ij}$  may be chosen out of a given domain  $T$ . Let  $S = X'X$  be of full rank and  $\lambda_{\min}$  the minimum of the characteristic roots of  $S$ . The author defines the efficiency of the design as  $\lambda_{\min}/u$ , where  $u$  is the maxi-

imum value of  $\lambda_{\min}$  for  $X_{ij}$  in  $T$ . He motivates this definition in some cases and shows, for instance, that the latin square is most efficient in the sense of his definition.

H. Bergström.

**Brooks, Samuel H.:** The estimation of an optimum subsampling number. *J. Amer. statist. Assoc.* **50**, 398—415 (1955).

Bei Zweistufenstichproben (two-stage sampling) — zu unterscheiden von dem sequentiellen Verfahren der Doppelstichproben (double sampling) — ist der erste Schritt die zufällige Auswahl einer Stichprobe von Einheiten, z. B. von  $n$  Flächen aus einem Zuckerrübenfeld, und der zweite die Wahl zufälliger Unterstichproben, z. B. von  $m$  Rüben aus jeder dieser Flächen bei der Bestimmung des Zuckergehaltes von Zuckerrüben. Die günstigste Wahl von  $m$  hängt ab von dem Verhältnis der Varianzen zwischen den Einheiten und innerhalb der Einheiten und von den Kosten der Wahl einer Einheit und eines Elements innerhalb einer Einheit. Sei  $S_u^2$  die Varianz der  $u_i$ , wobei  $u_i$  die Abweichung des Mittelwertes der  $i$ -ten Einheit vom Populationsmittel ist,  $S_w^2$  die Varianz der  $e_{ij}$ , wobei  $e_{ij}$  die Abweichung des  $j$ -ten Elements der  $i$ -ten Einheit vom Mittelwert der  $i$ -ten Einheit ist; es seien  $C_u$  die Kosten der Wahl einer Einheit,  $C_e$  die Kosten der Wahl eines Elements aus einer Einheit; dann ist  $m_{op} = (C_u/C_e)^{1/2} S_w/S_u$  die günstigste Wahl von  $m$ . Meistens muß  $m_{op}$  auf Grund einer vorbereitenden Stichprobe (pilot sample) von  $h$  Einheiten zu je  $k$  Elementen geschätzt werden. Die „relative Präzision“ einer Wahl von  $m$  wird definiert als Varianz des Schätzwertes des Populationsmittels bei gegebenem  $m_{op}$  dividiert durch die analoge Varianz bei gegebenem  $m$  für gleiche Stichprobenkosten, und die Verteilung des Schätzwertes von  $m_{op}$  im Falle normal verteilter  $n_i$  und  $e_{ij}$ , die mit der  $F$ -Verteilung zusammenhängt, angegeben. Die „erwartete relative Präzision“ der vorbereitenden Stichprobenplanung ist die mittlere relative Präzision der  $m$ -Werte, die sich aus dieser Planung bei festen Kosten und Varianzenverhältnisswerten ergeben. Vorbereitende Stichprobenpläne (günstigste Werte von  $h$  und  $k$ ) werden tabuliert, die eine erwartete relative Präzision von  $90\%$  ergeben. Ein praktisches Beispiel wird durchgerechnet, und es wird gezeigt, in welchen Fällen die vorbereitende Stichprobe überflüssig ist.

O. Ludwig.

**Lieberman, Gerald J. and George J. Resnikoff:** Sampling plans for inspections by variables. *J. Amer. statist. Assoc.* **50**, 457—516 (1955).

In der Qualitätskontrolle kann die Entscheidung über die Annahme einer Menge entweder auf Grund des Anteils der einwandfreien Stücke bei der qualitativen Klassifikation „einwandfrei-schadhaft“ oder auf Grund von Messungen an jedem Stück geschehen. Sind die Meßwerte der Einzelstücke Zufallsvariablen und ist die Form ihrer Verteilung bekannt, so hat das Verfahren der „Stichproben auf Grund von Zufallsvariablen“ (sampling by variables) dem qualitativen der „Stichproben auf Grund von Eigenschaften“ gegenüber den Vorteil, daß es die Information besser ausnutzt. Es werde angenommen, daß die Meßwerte des in Frage kommenden Merkmals unabhängig voneinander der gleichen Normalverteilung folgen. Es werden Pläne angegeben, aufgebaut auf gegebener Standardabweichung der Gesamtheit und, falls diese unbekannt ist, auf der Standardabweichung in der Stichprobe oder auf der mittleren Variationsbreite (range) in der Stichprobe, wenn diese in Teilstichproben unterteilt ist. Die Pläne werden nach Schlüsselbuchstaben, die auf Grund des Stichprobenumfanges und der mittleren zulässigen Qualität (acceptable quality level, AQL) bestimmt werden, geordnet. So wird erreicht, daß alle drei Sorten von Plänen näherungsweise die gleiche Operationscharakteristik (OC) besitzen. Sei  $U$  die obere Kontrollgrenze, d. h. ein Stück wird als schadhaft betrachtet, wenn sein Meßwert den Wert  $U$  übersteigt, und  $L$  die untere. Ein Stichprobenplan besteht aus der Wahl des Stichprobenumfanges  $n$ , einer Methode zur Schätzung des Prozentsatzes an schadhaften Stücken und einem „Schätzwert des maximalen zulässigen Prozentsatzes an schadhaften Stücken“ (maximal allowable estimated per cent defective). Sei  $\hat{p}_u$  der



Schätzwert des Prozentsatzes der Stücke mit Meßwerten  $> U$ , so wird, wenn nur eine obere Kontrollgrenze  $U$  gegeben ist, die Menge angenommen, wenn  $\hat{p}_U \leq p^*$ , entsprechend in anderen Fällen, wenn  $\hat{p}_L \leq p^*$  bzw.  $\hat{p}_U + \hat{p}_L \leq p^*$  ist. Tabellen der Pläne und graphische Darstellungen der OC-Kurven werden in allen Fällen gegeben.

*O. Ludwig.*

**Neyman, Jerzy:** The problem of inductive inference. Commun. pure appl. Math. 8, 13—46 (1955).

After an introductory part, discussing statements in a book by R. Carnap and (more cursorily) in a book by R. B. Braithwaite, the author illustrates his well-known approach to inductive inference by treating the following problem, concerning the homogeneity of decaying neutral  $V$ -particles: Mutually independent random variables are observed, the  $i$ -th of them following the distribution

$$(1 - e^{-\lambda_i t})^i / (1 - e^{-\lambda_i T_i}), \quad 0 \leq t \leq T_i$$

where  $T_i$  is the maximum time within which the decay could have been observed. It is required to test the hypothesis that the value of  $\lambda_i$  is the same for all particles. Two alternative hypotheses are considered: (i) the  $\lambda$ 's are a sample from a random population, (ii) the  $\lambda$ 's belong to two different categories. Locally best one-side similar tests, similar regions etc. are considered and smooth tests of goodness of fit discussed. The final section deals with „recent trends in the theory of statistics“.

*S. Vajda.*

**LeCam, L.:** An extension of Wald's theory of statistical decision functions. Ann. math. Statistics 26, 69—81 (1955).

The author deals with the topics of Chapters 2 and 3 of Wald's Statistical decision functions (this Zbl. 40, 364), which dealt with zero-sum two-person games with infinitely many strategies. He extends Wald's theory by relaxing some of the requirements concerning the loss function. To begin with, he shows that, under suitable conditions, the set of all decision functions is a convex subset of a certain topological vector space, and gives conditions under which this set is compact. He then derives theorems concerning complete classes of decision functions.

*S. Vajda.*

**Hannan, James F. and Herbert Robbins:** Asymptotic solutions of the compound decision problem for two completely specified distributions. Ann. math. Statistics 26, 37—51 (1955).

The following problem is considered: Let  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) be random variables with distribution functions  $F(x, \theta_i)$ , where  $\theta_i = 0$  or 1. On the basis of one observation of each  $x_i$  it should be decided for every  $i$  what the value of  $\theta_i$  is. The loss incurred by an incorrect choice is given. A (randomized) decision function is called „simple“ when the probability of deciding that  $\theta_i = 1$  can be described by the value  $t(x_i)$  of some function  $t(x)$ . — The authors prove that if the proportion of 1s among the  $\theta_i$  is approximately known, then a simple decision function defined in their paper does as well, within given limits, as any simple decision function could do. For large  $n$ , a good estimator of that proportion is available. These results are combined to construct a nonsimple decision function which, for large  $n$ , does again about as well as any simple one, even if the proportion were known exactly. Further results are obtained regarding invariance under permutation of the  $i$ 's and remarks are added about Bayes and minimax solutions, and admissibility. *S. Vajda.*

**Huron, Roger:** Loi multinomiale et test du  $\chi^2$ . C. r. Acad. Sci., Paris 240, 2047—2048 (1955).

Es liege eine Polynomverteilung

$$n! p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} / (X_1! \dots X_k!), \quad X_1 + \dots + X_k = n,$$

vor,  $n$  = Anzahl der Ziehungen,  $p_j$  = Wahrscheinlichkeit des Merkmals  $j$  mit  $\sum p_j = 1$ . Zum Vergleich einer empirischen Aufteilung  $X_1, \dots, X_k$  mit einer

theoretischen schlägt Verf. als Ergänzung des globalen  $\chi^2$ -Tests mit  $k - 1$  F. G. Prüfung der einzelnen, bekanntlich durch geeignete orthogonale Transformation der  $X_1, \dots, X_k$  einführbaren  $k - 1$  unkorrelierten, standardisierten Variablen auf Grund der für sie asymptotisch geltenden Normalverteilung vor. *M. P. Geppert.*

**Cochran, William G.: A test of a linear function of the deviations between observed and expected numbers.** J. Amer. statist. Assoc. **50**, 377—397 (1955).

Der  $\chi^2$ -Test der Güte der Übereinstimmung von beobachteten ( $f_i$ ) und erwarteten Häufigkeiten ( $m_i$ ) ist bekanntlich nicht gegen eine bestimmte Anordnung der  $f_i - m_i$  gerichtet. Wenn es möglich ist, auf Grund der Natur des Problems bestimmte Gegenhypothesen zu vermuten, so kann man, falls der  $\chi^2$ -Test nicht ausreicht, die Nullhypothese abzulehnen, ergänzende Tests konstruieren. Einen solchen erhält man, wenn man eine Linearfunktion der Abweichungen  $L = \sum g_i (f_i - m_i)$  wählt, wobei die  $g_i$  Zahlen sind, die im Hinblick auf die vermutete Gegenhypothese vorgegeben werden. Der  $L$ -Test ist wie der  $\chi^2$ -Test nur gültig, wenn die Erwartungswerte groß ( $> 5$ ) sind. Sind alle Parameter der theoretischen Verteilung bekannt, so ist bekanntlich unter der Nullhypothese

$$\text{var } \sum g_i (f_i - M_i) = \sum g_i^2 M_i - (\sum g_i M_i)^2 / N,$$

wenn  $M_i$  die bekannten erwarteten Häufigkeiten sind. Sind jedoch die  $M_i$  von einem unbekannten Parameter  $\theta$  abhängig, und  $m_i$  die Werte von  $M_i$ , wenn für  $\theta$  der plausibelste (maximum likelihood) Schätzer  $\hat{\theta}$  gesetzt wird, so gilt näherungsweise:

$$\text{var } L \approx (\sum g_i^2 M_i) - (\sum g_i M_i)^2 / N - (\sum g_i \partial M_i / \partial \theta)^2 / I,$$

wobei  $I$  die „Information“  $\sum (\partial M_i / \partial \theta)^2 / M_i$  ist. Anwendungen und numerische Beispiele werden gegeben. Für den Fall, daß zwei Parameter zu schätzen sind, wird auch eine Näherungsformel für  $\text{var } L$  bestimmt, und als Anwendung der Fall der Normalverteilung diskutiert. *O. Ludwig.*

**Jackson, J. Edward and Eleanor L. Ross: Extended tables for use with the „G“-test for means.** J. Amer. statist. Assoc. **50**, 416—433 (1955).

In den letzten Jahren ist es üblich geworden, mehr und mehr nicht maximal effiziente Methoden zu verwenden, wenn die ersparte Rechenzeit den Nachteil dieser Methoden mehr als aufwiegt. Ein Beispiel ist der „G“-Test von Daly [Ann. math. Statistics **17**, 71—74 (1946)], der  $G = |\bar{X} - \mu| / R$ , mit  $\bar{X}$  = Stichprobenmittelwert,  $\mu$  = Populationsmittelwert,  $R$  = Variationsbreite (range) in der Stichprobe, an Stelle von  $t$  zur Testung eines hypothetischen Populationsmittelwertes benutzt. Verff. verwenden analog im Falle, daß die Stichprobe in zufällige Unterklassen gleicher Größe unterteilt ist.  $G_1 = |\bar{X} - \mu| / \bar{R}$ , wobei  $\bar{R}$  die mittlere Variationsbreite der Unterklassen ist, und im Falle des Zweistichprobenmittelwertvergleichs  $G_2 = |\bar{X}_1 - \bar{X}_2| / \bar{R}$ , nachdem ähnliche Prüfmaße von E. Lord (dies. Zbl. **30**, 40) angegeben wurden. Es werden tabuliert die kritischen Werte für  $G_1$  bei Signifikanzniveau  $\alpha = 10\%$ ,  $5\%$ ,  $1\%$ ; Anzahl der Elemente pro Unterklasse  $n = 2, 3, \dots, 15$ , und Zahl der Unterklassen  $m = 1, 2, \dots, 15$ ; für  $G_2$  bei  $\alpha = 10\%$ ,  $5\%$ ,  $1\%$ ,  $n$  (gleich für beide Stichproben)  $= 2, 3, \dots, 15$  und Zahl der Unterklassen der  $i$ -ten ( $i = 1, 2$ ) Stichprobe  $m_i = 1, 2, \dots, 15$ . Die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des G-Tests sind dieselben wie beim  $t$ -Test. *O. Ludwig.*

**Sadowski, W.: On a non-parametric test of comparing dispersions.** Zastosowania Mat. **2**, 161—170, russische und engl. Zusammenfassg. 170—171 (1955) [Polnisch].

We consider  $k$  populations with unknown distribution functions. As regards those functions we assume merely that they are continuous, the only difference between them consisting in different variances. The test of significance given in the paper makes it possible to verify on the basis of samples from those  $k$  populations (of  $n$  elements each) whether any of them has a greater variance than the remaining populations. The construction of the test consists in applying Fisher's randomization method. Namely, we choose from  $k$  samples the one that has the largest element among  $k n$  observations and at the same time has the smallest element. In the sample

selected in this way we establish the joint number of elements larger and smaller than the elements in the remaining  $k - 1$  samples. The number of those elements is denoted by  $r$ . We fix a certain number  $r_0$  (dependent on the significance level, on  $n$  and on  $k$ ) in such a way that if  $r \geq r_0$ , we reject the hypothesis of the equality of variances in  $k$  populations and assume that the sample containing the smallest and the largest element comes from the population with the greatest variance. Otherwise, if  $r < r_0$  or if there is no sample with the largest and the smallest element, we assume that the variance of all populations are equal. The paper contains suitable tables for  $k$  equal to 2, 3 and 4. Engl. Zusammenfassg. 21

**Dwass, Meyer:** On the asymptotic normality of some statistics used in non-parametric tests. Ann. math. Statistics **26**, 334—339 (1955).

Verf. hatte früher (dies. Zbl. **53**, 103) hinreichende Bedingungen für die Zahlenfolgen  $(a_{N1}, a_{N2}, \dots, a_{NN})$  und  $(b_{N1}, b_{N2}, \dots, b_{NN})$  angegeben, damit das Prüfmaß  $S_N = \sum_i a_{Ni} b_{Ni}$ , bei dem jede Permutation  $(R_1, R_2, \dots, R_N)$  der ersten  $N$  Zahlen gleich wahrscheinlich auftritt, asymptotisch normal verteilt ist. In dieser Arbeit wird bewiesen, daß  $S_N$  diese Eigenschaft auch hat, wenn 1. die Verteilungsfunktion der  $b_{Ni}$  gegen eine standardisierte Grenzverteilung  $G(x)$  strebt und 2.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq N} |a_{Ni}| = 0$$

gilt, falls  $G(x)$  nicht selbst schon die Normalverteilung ist. Der Satz wird außerdem auf den Fall ausgedehnt, bei dem die  $b_{Ni}$   $m$  Gruppen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen darstellen. E. Walter.

**Moore, P. G.:** The properties of the mean square successive difference in samples from various populations. J. Amer. statist. Assoc. **50**, 434—456 (1955).

Die Standardmethode zur Schätzung einer unbekannten Populationsvarianz ist die Verwendung der Stichprobenvarianz  $s^2$  als Schätzer. Statt dessen kann man Methoden verwenden, die auf  $d = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|$  (mittlere sukzessive

Differenz),  $\delta^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2$  (mittlere sukzessive quadratische Dif-

ferenz) oder  $\eta^2 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (x_{2i} - x_{2i-1})^2$ ,  $n = 2m$ , wobei die  $x_i$  in ihrer zeitlichen

Reihenfolge genommen werden, beruhen. Diese liefern keine so effizienten Schätzungen, falls der Populationsmittelwert während der Dauer der Stichproben-erhebung konstant bleibt; wenn jedoch ein (linearer) Trend vorliegt, liefern sie wesentlich erwartungstreuere Schätzungen. Unter Voraussetzung der Unabhängigkeit aller  $x_i$  werden die ersten vier Momente von  $\delta^2$  gegeben, und die relative Effizienz von  $\delta^2$  bezüglich  $s^2$ , d. h.  $\text{var } s^2 / \text{var } \frac{1}{2} \delta^2$ , die nur von  $n$  und der Kurtosis  $\beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$  der Ausgangsverteilung abhängt, und zwar bei großem  $\beta_2$  nahe bei 1 liegt, wird für verschiedene Werte von  $n$  und  $\beta_2$  tabuliert. Bei hochgipfligen (leptocurtic) Verteilungen ist es also u. U., auch wenn kein Trend vorliegt, praktischer,  $\frac{1}{2} \delta^2$  statt  $s^2$  zu verwenden, da dieser Schätzer fast ebenso effizient, aber leichter zu berechnen ist, und den Vorteil hat, daß bei neu hinzukommenden Beobachtungen keine neue Mittelwertberechnung erforderlich ist. Verf. untersucht auf Grund der Momente die Verteilung von  $\delta^2$ , wenn die Ausgangsverteilung a) Normal-, b) Rechteck-, c) Laplace (Doppelt-Exponential-), d)  $\chi^2$ -Verteilung ist, mittels der Theorie der Pearson-Kurven. Die Form dieser Verteilung hängt sehr von der Form der Ausgangsverteilung ab, bleibt jedoch in der Nähe der Pearson III-Form. Viele Tabellen und numerische Beispiele sind beigelegt. O. Ludwig.

**Dwass, Meyer:** A note on simultaneous confidence intervals. Ann. math. Statistics **26**, 146—147 (1955).

Scheffé, Bose and Roy have determined simultaneous confidence intervals in the analysis of variances. The author determines these confidence intervals in a new way and also gives a confidence interval for the measure of the distance  $\sum \pi_i^2$  of the null hypothesis  $\pi_1 = \dots = \pi_n = 0$  for the mean values  $\pi_i$  of independent normal random variables. H. Bergström.



**Berkson, Joseph:** Estimate of the integrated normal curve by minimum normit chi-square with particular reference to bio-assay. *J. Amer. statist. Assoc.* **50**, 529—549 (1955).

Verf. behandelt in Analogie zum minimum-logit- $\chi^2$ -Schätzer (J. Berkson, dies. Zbl. **64**, 141) den Minimum-normit- $\chi^2$ -Schätzer, wobei normit = probit — 5 durch normit  $P_i = v_i = (x_i - \mu)/\sigma = \alpha + \beta x_i$  und  $P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v_i} e^{-x^2/2} dx$  definiert ist. Es ist  $\chi^2$ -normit =  $\sum n_i [z_i^2/p_i q_i] (v_i - \tilde{v}_i)^2$ , wobei  $n_i$  die Zahl der mit der Dosis  $x_i$  behandelten Individuen,  $p_i = 1 - q_i$  der beobachtete Anteil der positiv ansprechenden,  $v_i$  der beobachtete normit,  $\tilde{v}_i$  der Schätzwert des normit,  $z_i = (2\pi)^{-1/2} e^{-v_i^2/2}$  ist. Beim Vergleich der Minimum-normit- $\chi^2$ -Schätzer mit den plausibelsten (maximum-likelihood) Schätzern ergibt sich, wie beim entsprechenden logit-Problem, daß die Varianz des Minimum-normit- $\chi^2$ -Schätzers kleiner ist als die des plausibelsten Schätzers und kleiner als  $1/I$ , wobei  $I$  die „Gesamtinformation“ ist; der Unterschied zwischen beiden Schätzern ist jedoch nicht so groß wie im logit-Falle. Zur Berechnung der Schätzer gibt Verf. folgende Tafeln:  $v, w = z^2/pq$  und  $wv$  in Abhängigkeit von  $p$ , ( $p = 0,001 (0,001) 1$ ), und  $p$  in Abhängigkeit von  $v$ , d. h. die Fläche der standardisierten Normalverteilung, ( $v = 0,000 (0,001) 2,499$ ). Verf. betont, daß seine Methode eine Modifizierung einer älteren Methode ist [F. M. Urban, *Arch. f. gesamte Psychologie* **16**, 168—227 (1910)], und daß er diese ältere Methode den neueren aus der probit-Analysis für überlegen hält.

*O. Ludwig.*

● **Bush, Robert R. and Frederick Mosteller:** *Stochastic models for learning.* (Wiley Publications on Statistics.) New York: John Wiley & Sons, Inc. XVI, 365 p. \$ 9,00.

Das vorliegende Buch gibt die erste zusammenfassende geschlossene Darstellung der von den Verff., einem Psychologen und einem mathematischen Statistiker, in einigen Arbeiten der letzten Jahre gemeinsam entwickelten mathematischen Theorie des Lernvorganges, welcher hier als stochastischer Prozeß gedeutet wird. In dem rein deduktiven Teil I wird ein allgemeines stochastisches Modell beschrieben, nach welchem durch jeden Versuch in Abhängigkeit von seinem Ergebnis (Reizbeantwortung durch Versuchstier, kombiniert mit darauffolgender Antwort des Untersuchers) der Spalten-Vektor  $p$  der Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Ergebnisklassen durch einen in Matrixform gegebenen, linearen, stochastischen Operator transformiert wird. Verff. untersuchen die allgemeinen Eigenschaften solcher Operatoren und dieses Modells, das in wichtigen Fällen mit der Theorie der Markoff-Ketten Verwandtschaft aufweist. Für die Momente der von Versuch zu Versuch sich ändernden Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $p$  werden Rekursionsformeln hergeleitet, und daraus werden Folgerungen gezogen über die asymptotische Verteilung von  $p$ . In wichtigen Spezialfällen gelangt man zu entsprechend präziseren Ergebnissen. In Teil II wird das allgemeine Modell auf einzelne experimentelle Probleme des Lernvorganges angewandt. Er befaßt sich vor allem mit statistischen Fragestellungen. Die Schätzung der unbekannten Modellparameter aus experimental-psychologischen Daten der Fachliteratur erfolgt auf Grund des Prinzips der maximalen Plausibilität (Likelihood), der Minimal-Varianz etc., teils exakt, teils approximativ, wobei auch Anzahlen von Merkmals-Iterationen (runs) und Pascal-verteilte Statisten Verwendung finden. Über diese altbewährten Methoden hinaus tritt hier eine Reihe reizvoller neuer Teilfragen des Schätzproblems auf. Die Anpassungsgüte der zugrunde gelegten Modelle und entsprechend geschätzten Parameter wird mittels des klassischen  $\chi^2$ -Tests bzw. des von Neyman modifizierten beurteilt. Sowohl zur theoretischen Lösung des Problems in Teil I als auch zur induktiven Schätzung der entsprechenden Parameter in Teil II werden mehrfach Monte-Carlo-

Methoden herangezogen, fiktive „Stat-Ratten“, deren Reaktionen aus Tabellen von Zufallszahlen sinngemäß abgelesen werden. Im Anhang folgen Tafeln der im Text auftretenden Funktionen  $\sum_{v=0}^{\infty} \alpha^{v(v+1)/2} \beta^v$ ,  $\sum_{v=0}^{\infty} v \alpha^{v(v+1)/2} \beta^v$ ,  $-\log \frac{1-\alpha}{1-\beta} \Big/ (x-\beta)$ ,

$v \alpha^v / (1-\alpha^v)$ ,  $\sum_{v=0}^{\infty} \alpha^v \beta / (1-\alpha^v \beta)$ ,  $\sum_{v=0}^{\infty} v \alpha^v \beta / (1-\alpha^v \beta)$ . Zu beanstanden ist ein Rechenfehler auf Seite 103, wo in (4. 81), (4. 83), (4. 84), (4. 87)  $\alpha_1^n$  durch  $\alpha_1^{nv}$  zu ersetzen ist, wodurch sich auch (4. 86), (4. 89) ändern. Die Darstellung ist klar, im Hinblick auf den gemischten Leserkreis mathematisch einfach. Alles in allem stellt das Buch einen neuen wesentlichen Beitrag zu der schon seit geraumer Zeit erstrebten stochastischen Deutung empirisch gefundener psychologischer Gesetze dar. Die in den meisten Fällen gute Übereinstimmung zwischen dem Modell der Verff. und den experimentellen Daten rechtfertigt bis auf weiteres die Wahl des von den Verff. zugrunde gelegten stochastischen Modells. M. P. Geppert.

### **Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:**

**Kimura, Motoo:** Solution of a process of random genetic drift with a continuous model. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 144–150 (1955).

Continuing his study on a process of random genetic drift, the author considers a random mating population of  $N$  diploid parents. He first derives a system of differential equations satisfied by  $n$ -th moment  $\mu_n^{(t)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) of a gene distribution about the origin in the  $t$ -th generation which are exact within  $O(N^{-2})$  as  $N \rightarrow \infty$ . The system thus obtained is solved in series form under the initial condition  $\mu_n^{(0)} = p$  ( $0 < p < 1$ ). By making use of this solution, main result is then obtained which may be stated as follows: The probability that both genes coexist in the  $t$ -th generation is given by

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{P_{2j}(1-2p) - P_{2j+2}(1-2p)\} e^{-(2j+1)(2j+2)/4N} t,$$

$P_i(z)$  being the Legendre polynomial of degree  $i$ . The same result is again obtained by considering more precisely the probability density of the gene frequency in a generation. The processes of the change in the distribution of the unfixed classes when a population starts from  $p = 0,5$  and  $p = 0,1$  are illustrated graphically. Y. Komatu.

**Rushton, S. and A. J. Mautner:** The deterministic model of a simple epidemic for more than one community. Biometrika **42**, 126–132 (1955).

A deterministic model of a simple epidemic for several related communities is considered. Denoting by  $y_i(t)$  the number of susceptibles in the  $i$ -th community  $C_i$  at time  $t$  and by  $n_i$  the total size of  $C_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), the authors derive a system of differential equations

$$\frac{dy_i}{dt} = -y_i \left\{ \alpha_i (n_i - y_i) + \sum_{j \neq i} \beta_{ij} (n_j - y_j) \right\} \quad (i = 1, \dots, m),$$

where the constants  $\alpha_i$  and  $\beta_{ij}$  designate the internal infection rate in  $C_i$  and the infection rate between  $C_i$  and  $C_j$ , respectively. Under the simplifying assumption that  $n_i = n$ ,  $\alpha_i = \alpha$  and  $\beta_{ij} = \alpha \gamma$ , the system is solved in a parametric form by quadrature. A special case in which the number of communities reduces essentially to two, i. e.  $m = 2$ , is discussed in detail. An illustration is made by a numerical table and a graph. Y. Komatu.

**Whittle, P.:** The outcome of a stochastic epidemic. A note on Bailey's paper. Biometrika **42**, 116–122 (1955).

Considering a model of a stochastic epidemic involving infection as well as removal which begins by introduction of a number of infectious cases into a homogeneously mixed population of a given number of susceptibles, N. Bailey (this

Zbl. 50. 366) has derived the probability distribution of total size of epidemic by solving a set of doubly recurrent relations, the ratio of removal to infection rate being supposed constant. Under a more general supposition the present author shows that the same probability may be obtained by solving a set of singly recurrent relations. Further, the probability that an infection introduced into a large population will take is given special attention.

*Y. Komatu.*

**Foster, F. G.:** A note on Bailey's and Whittle's treatment of a general stochastic epidemic. *Biometrika* 42, 123—125 (1955).

Simplifying the notation by use of symmetric functions, the author shows how Whittle's set of singly recurrent relations (cf. the paper reviewed above) may be obtained and solved, under a more general supposition, by means of a simple probability argument.

*Y. Komatu.*

**Marshall, Andrew W. and Herbert Goldhamer:** An application of Markov processes to the study of the epidemiology of mental disease. *J. Amer. statist. Assoc.* 50, 99—129 (1955).

• **Saxer, Walter:** *Versicherungsmathematik. I.* (Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. 79.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1955. IX, 272 S. DM 36.—, Ganzl. DM 39,60.

Das Buch ist vom Verlag als Ersatz für das bekannte, aber längst vergriffene Werk von A. Loewy gedacht; es liegt aber keineswegs eine Überarbeitung der Veröffentlichung von Loewy vor, sondern etwas völlig Neues. Die „Versicherungsmathematik“ von Saxer ist zweibändig angelegt; vorläufig liegt der erste, „elementare“ Band vor. Entsprechend dem angestrebten Ziel wird fast ausnahmslos die diskontinuierliche Methode verwendet. Das Buch ist in folgende Abschnitte gegliedert: 1. Zinstheorie. 2. Theorie der Personengesamtheiten. 3. Die Leibrente und die Kapitalversicherungen auf ein Leben. 4. Versicherungen auf mehrere Leben. 5. Pensionsversicherung. 6. Prämienreserve (Deckungskapital). 7. Über allgemeine Variationsprobleme in der Versicherungsmathematik. 8. Über die Konstruktion von Universaltafeln und ihre Anwendungen. 9. Versicherungstechnische Bilanzen, ihre Analyse und die Gewinnverteilung. 10. Erneuerungstheorie. 11. Über die Finanzierungssysteme für Sozialversicherungen. Anhang: Über den stochastischen Aufbau der Versicherungsmathematik. — Neben den für jedes vollständige Lehrbuch verbindlichen Kapiteln finden sich Abschnitte, welche besonderen Fragen gewidmet sind (7, 8, 10. Anhang). Diese Erweiterung des Stoffes ist sehr verdienstlich; erfahrungsgemäß sind es nicht die „täglichen“ Aufgaben, die zu ihrer Lösung Mühe bereiten, sondern die selteneren. Die Darstellung ist außerordentlich klar, durch zahlreiche Tabellen und Ziffernbeispiele ergänzt. Man spürt in jeder Hinsicht die „Hand“ des reinen Mathematikers.

*E. Zwinggi.*

**Ammeter, Hans:** Das Erneuerungsproblem und seine Erweiterung auf stochastische Prozesse. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 55, 265—304 (1955).

Zuerst gibt der Verf. eine vollständige Übersicht über die Lösungsmöglichkeiten der Erneuerungsgleichung von Chr. Moser. Da in Wirklichkeit die Voraussetzung, daß die Elemente der Gesamtheit genau nach einer zugrunde gelegten Ausscheidungsordnung abgehen, nicht zutrifft, verallgemeinert der Verf. das Mosersche Modell auf stochastische Prozesse.

*E. Zwinggi.*

**Gumbel, E. J.:** Die Bedeutung der Parameter in der Gompertz-Makehamschen Formel. *Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math.* 2, 193—198 (1955).

Verf. leitet Beziehungen ab, welche gestatten, aus einer kleinen Anzahl beobachteter Werte von  $\mu_x$  die Parameter in der Makeham-Formel  $\mu_x = \alpha + \beta e^{\gamma x}$  zuverlässig abzuschätzen.

*E. Zwinggi.*

**Bierlein, Dieter:** Sterbetafeln lassen sich nicht so ausgleichen, daß die Reservekurven generell hyperbolisch sind. *Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math.* 2, 203—208 (1955).



Untersuchung darüber, ob sich eine Sterbetafel so ausgleichen läßt, daß die  $F$ -Methode zur Reserveberechnung zu einer genauen Methode wird, d. h. daß die einzelnen Reservewerte exakt und nicht nur näherungsweise auf einer Hyperbel liegen. *E. Zwinggi.*

**Strickler, P.:** Reserveapproximation durch Hyperbeln nach der  $\varphi$ -Methode. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **55**, 83—98 (1955).

In Erweiterung eines früheren Ansatzes wird die Deckungsrückstellung einer Kapitalversicherung in Abhängigkeit von der abgelaufenen Dauer  $t$  näherungsweise dargestellt als Summe einer ganz-linearen Funktion und einer gebrochen-linearen Funktion vom Nenner  $1 - q \cdot t$ . Bei gegebenem  $q$  werden die Konstanten (Hilfszahlen) einfach aus der genauen Reserve zu Anfang, Mitte und Ende bestimmt. Ist  $q$  einheitlich gewählt, so sind die Hilfszahlen für einen Bestand von einheitlichem Beginn-jahr additiv. Der Festlegung von  $q$  ist der Aufsatz hauptsächlich gewidmet; bei geeigneter Wahl ergibt sich eine recht gute Annäherung. *W. Schöbe.*

**Dienst, Hans-Rudolf:** Einige Kriterien über das Auftreten negativer Prämienreserven bei Gruppenversicherungen gegen technische Durchschnittsprämie. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. **2**, 177—192 (1955).

**Bartsch, Rudolf:** Über ein Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung von Kommutations- und Rentenbarwerten. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. **2**, 199—202 (1955).

Verfahren, um aus einigen wenigen, in äquidistanten Abständen liegenden  $D_x$  und  $C_x$  die  $N_x$ ,  $S_x$ ,  $M_x$  und  $R_x$  näherungsweise zu berechnen. *E. Zwinggi.*

**Schöbe, Waldemar:** Bemerkungen zum Zinsfußproblem. Oskulierende Umkehrung. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **55**, 99—108 (1955).

Verf. zeigt, daß die Formeln von Meidell [Bl. Vers.-Math **6**, 34—43 (1944)] und Zwinggi (dies. Zbl. **55**, 136) zur Bestimmung des Effektivzinses im wesentlichen miteinander identisch sind. Daneben wird die Untersuchung auf beliebige Funktionen des Zinses ausgedehnt und die Größenordnung des Fehlers untersucht. *E. Zwinggi.*

**Jéquier, Ch.:** Les assurances d'annuités sur une et plusieurs têtes et leurs applications aux assurances mixtes. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **55**, 57—82 (1955).

Eingehende Darstellung der Versicherung von Überlebenszeiten auf zwei und mehr verbundene gleichaltrige und ungleichaltrige Leben. *E. Zwinggi.*

**Knörlein, Franz:** Zur Mathematik der Gruppenversicherung gegen technische Durchschnittsprämie. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. **2**, 153—176 (1955).

**Boehm, Carl:** Über den Charakter von Verbindungen zwischen Todes- und Erlebensfallversicherungen. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. **2**, 209—223 (1955).

**Fréchet, Maurice:** Sur l'importance en économétrie de la distinction entre les probabilités rationnelles et irrationnelles. *Econometrica* **23**, 303—306 (1955).

Verf. erkennt an, daß es bei ökonomischen Problemen notwendig ist, die Wahrscheinlichkeit im Sinne einer bloßen Meinung der daran interessierten Leute einzuführen. Man soll aber dann beachten, daß solche Meinungen nicht notwendigerweise den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu gehorchen brauchen. *B. de Finetti.*

**Winkler, Wilhelm:** The measurement of productivity. Bull. Inst. internat. Statist. **34**, Nr. 4, 3—8 (1955).

**Prévo, J.:** Caractères de validité de l'expression de la production en valeur dans les calculs de productivité. Bull. Inst. internat. Statist. **34**, Nr. 4, 181—188 (1955).

**Conte, Luigi:** La risoluzione delle equazioni algebriche nella produzione matematica di G. C. De'Toschi di Fagnano. I. H. *Archimede* **7**, 43—47. 91—95 (1955).

**Sargan, J. D.:** The period of production. *Econometrica* **23**, 151—165 (1955). Um Samuelsons Einwendungen gegen Hicks' Definition auszuschließen, wird

vom Verf. vorgeschlagen, die „Produktionsperiode“ zu definieren nicht durch  $T = \sum_t t (P_t e^{-\delta t}) / \sum_t (P_t e^{-\delta t}) =$  „Mittelwert von  $t$  (Zeit), mit den diskontierten (positiven und negativen) Zahlungen  $P_t$  als Gewichten“, sondern durch die Differenz  $T = T_R - T_C$  zwischen den entsprechend mit den Einnahmen  $R_t$  ( $T_R =$  „Output Period“) und den Ausgaben  $C_t$  ( $T_C =$  „Input Period“) ( $P_t = R_t - C_t$ ) gebildeten Mittelwerten der Zeit. — Es ist  $T_R = -R_\delta/R$  (wo  $R = \sum_t R_t e^{-\delta t}$ ,  $R_\delta = \partial R/\partial \delta$ ), und  $T_C = -C_\delta/C$ ; im Gleichgewicht ist  $R = C$ , und daher  $T = -(R_\delta - C_\delta)/R$ . Differenziert man unter Bewahrung der Gleichgewichtsbedingung (die  $R_t$  und  $C_t$  sind dann mit  $\delta$  veränderlich), so ist  $R' - C' = 0$ , und man gelangt zu einem sinnvollen Ausdruck von  $T$  mittels der Elastizität der „Input“- und „Output“-Preise in bezug auf den Zinsfuß. Mehrere, sowohl einfache als ziemlich komplizierte, praktische Sonderfälle werden in ähnlicher Weise untersucht. B. de Finetti.

Gale, David: The law of supply and demand. *Math. Scandinav.* 3, 155—169 (1955).

Consider the following model of an economic system: there are  $m$  units  $U_i$  (consumers or industries) and  $n$  types of goods  $G_j$ . Let  $U_i$  supply the amount  $x_{ij}$  of  $G_j$  (where negative supply means consumption). The „activity“  $(x_{i1}, \dots, x_{in})$  is chosen from a closed, bounded and convex set  $X_i$  of activities, which contains  $(0, \dots, 0)$ . In order to decide which activities will be chosen by the units, the author assumes that „prices“  $\pi_j$  are assigned to the goods  $G_j$  such that not all of them are zero and  $\sum \pi_j = 1$ . Also, to each unit  $U_i$  and to each set of prices there exists a „supply function“  $S_i$  which is a subset of  $X_i$ , non-empty, convex and continuous (in a sense defined in the paper), and such that for its activities  $\sum_j x_{ij} \pi_j \geq 0$  or, in a model „without saving“  $= 0$ . Intuitively speaking, the  $S_i$  contain those activities which maximize  $U_i$ 's satisfaction. The basic equilibrium theorem asserts that prices and activities of  $S_i$  can be found such that  $\sum_i x_{ij} \geq 0$  for all  $j$ . Its proof is based on a theorem by Knaster, Kuratowski and Mazurkiewicz [*Fund. Math.* 14, 132—137 (1929)]. In later sections the author considers a model with consumers sharing profits, rather restrictive conditions which guarantee uniqueness of the equilibrium, and an equilibrium theorem for Leontief models, the proof of which is self-contained. The last two sections deal with preference orderings. S. Vajda.

Dantzig, George B., Alex Orden and Philip Wolfe: The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints. *Pacific J. Math.* 5, 183—195 (1955).

The generalized Simplex Method is concerned with finding a  $(n+1) \times l$  matrix  $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$  satisfying  $P\tilde{X} = M$  [where  $P$  is a  $(m+1) \times (n+1)$  matrix and  $M$  a  $(m+1) \times l$  matrix] such that, in a lexicographical sense, each row vector  $\bar{x}_j \geq 0$  for  $j = 1, \dots, n$  and  $\bar{x}_0$  is a maximum. It is also assumed that the rank of  $M$  is  $m+1$ , and thus the traditional Linear Programming problem is not simply the problem just mentioned for  $l = 1$ . It also follows that in the generalized problem a basic solution cannot contain any variable (every component of) which is zero. Hence it may be interpreted as a perturbation method to avoid degeneracy, while the first components of the  $\bar{x}_j$  solve the L. P. problem for the first column of  $M$  as the r. h. s. of the constraints. The present paper contains theorems about the existence of basic and optimal solutions. The final chapter gives a convenient method for generalizing a given L. P. problem in such a way that, when the inverse of a basis is known, the perturbation does not entail any further computational effort. There is also a short account of a slight modification of the original Simplex Method which „has been found convenient“. (The reviewer thinks that this refers to work on large scale automatic computers.) S. Vajda.

**Dantzig, George B.: Upper bounds, secondary constraints and block triangularity in linear programming.** *Econometrica* **23**, 174—183 (1955)

Assuming the author's Simplex Method for the solution of Linear Programming problems to be known, he discusses here various short-cut methods which are available when the variables (which must be non-negative) have also upper bounds or, more generally, satisfy a system of „secondary constraints“, i. e. such that it may be assumed (by virtue of their physical meaning) that only a few of them will affect the result. The most general case treated is that of „block triangularity“, where the matrix of coefficients can be partitioned in such a way that the submatrices form a triangular system. — The essential aspect of this investigation is the development of methods which take account of special features of a given problem. In general, they will only be safe when applied by an experienced computer.

*S. Vajda.*

**Bellman, Richard: Bottleneck problems, function equations, and dynamic programming.** *Econometrica* **23**, 73—87 (1955).

The author constructs a mathematical model of the interrelation between various industries, characterized by their capacities and stockpiles, in order to determine rates of allocation of the latter which maximize total output over a given range of time,  $(0, T)$ . When allocations are made at discrete points of time, the problem is one of Linear Programming but of prohibitively large size. A continuous model is therefore used which requires maximization of the scalar product  $(x(T), a)$  with  $\dot{x} = A x + B z$ ,  $x(0) = c$ ,  $z$  being a vector with non-negative components, subject to  $C z \leq D x$ , where  $A, B, C$  and  $D$  are matrices and  $a, x, z$  and  $c$  are vectors. A duality theorem is derived which is useful in finding and verifying a solution.

*S. Vajda.*

**Bellman, Richard, Irving Glicksberg and Oliver Gross: On some nonlinear integral equations occurring in the theory of dynamic programming.** *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **41**, 227—229 (1955).

The following nonlinear integral equation occurs in the problem of optimum inventory and is typical of functional equations of dynamic programming:

$$f(x) = \min_{y \geq x} \left\{ k(x - y) + a \left[ \int_y^\infty p(s - y) dG(s) + f(0) \int_y^\infty dG(s) + \int_0^y f(y - s) dG(s) \right] \right\}.$$

A number of solutions is presented for the case of linear  $k(z)$  and  $p(z)$ , for various distribution functions  $G(s)$ . One of the results can be generalized to more dimensions. Proofs will appear elsewhere.

*S. Vajda.*

**Modigliani, Franco and Franz E. Hohn: Production planning over time and the nature of the expectation and planning horizon.** *Econometrica* **23**, 46—66 (1955).

Verff. behandeln folgendes in der Produktionsplanung auftretende Problem:

Es ist  $C = \sum_{t=1}^T F(x_t) + x \left[ \frac{h_0}{2} + \sum_{t=1}^T h_t \right] + C_0$  durch geeignete Wahl von  $x_1, \dots, x_t$  zu einem Minimum zu machen unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \text{a) } x_k &\geq 0, & \text{b) } h_k &= h_0 + \sum_{t=1}^k x_t - \sum_{t=1}^k s_t \geq 0, & (k = 1, 2, \dots, T), \\ \text{c) } h_T &= h_0 + \sum_{t=1}^T x_t - \sum_{t=1}^T s_t = 0 \end{aligned}$$

wobei  $s_t \geq 0$ ,  $h_0 \geq 0$ ,  $C_0 \geq 0$ ,  $\alpha > 0$  gegebene Konstanten,  $F(x)$  eine gegebene Funktion mit nicht negativem, monoton steigendem, stetigem  $f(x) = dF(x)/dx$  seien. Unter Verzicht auf a), b) wird zunächst die „Fundamentallösung“ mit Nebenbedingung c) allein mittels Lagrangescher Multiplikatoren bestimmt zu  $\xi_t = f^{-1}[f(\xi_1) + (t-1)\alpha]$  ( $t = 1, \dots, T$ ). Aus den zu geeigneten Teilintervallen des gesamten Intervalles  $(1, T)$  konstruierten optimalen Fundamentallösungen, die in



den einzelnen Teilintervallen a), b) und c) erfüllen, bauen Verff. die gesuchte optimale (d. h. a), b), c) erfüllende) Lösung für das Gesamtintervall in endlich vielen Schritten auf. Der Gesamtplan zerfällt so in Teilpläne, die auf kurze Sicht, im wesentlichen voneinander unabhängig, optimal gestaltet werden. *M. P. Geppert.*

**Charnes, A., W. W. Cooper and B. Mellon:** A model for optimizing production by reference to cost surrogates. *Econometrica* **23**, 307—323 (1955).

Die Arbeit knüpft an die vorstehend besprochene Arbeit von F. Modigliani und F. E. Hohnan, in welcher das Problem der Minimalisierung der Produktionskosten in Anbetracht der künftigen Verkaufskurve im Zeitintervall  $(t_0, T)$  zurückgeführt wurde auf Betrachtung geeigneter Teilintervalle. Während dort die Erzeugung nur einer Ware untersucht wurde mit einer nicht abnehmenden, zweimal differenzierbaren, als Summe von Einzelfunktionen darstellbaren Kostenfunktion einer einzigen Variablen, dehnen Verff. das Lösungsprinzip auf die Produktion mehrerer Waren aus und schwächen die Voraussetzungen über die — ebenfalls als Summe dargestellte — Gesamtkostenfunktion ab, indem sie von ihr nur Konvexität und monotonen Nichtabnehmen verlangen. Insbesondere wird bewiesen: Ist  $f(x)$  stetig, konvex und monoton nicht abnehmend, ferner  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  und  $a_m/m \geq a_j/j$  für alle  $j = 1, \dots, n$ , wobei  $m$  die größte dieser Ungleichung genügende natürliche Zahl ist, so besitzt  $C(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i)$  ein Minimum unter der Nebenbedingung  $\sum_{i=1}^r x_i \geq a_r$  ( $x_i \geq 0$ ;  $r = 1, \dots, n$ ), und zwar für  $x_1 = \dots = x_m = a_m/m$ . *M. P. Geppert.*

**Prager, William:** On the role of congestion in transportation problems. *Z. angew. Math. Mech.* **35**, 264—268 (1955).

The author considers a transportation problem with cost  $\alpha_{ij} + \beta_{ij} x_{ij}$  ( $\alpha_{ij}, \beta_{ij} > 0$ ) for transfer of  $x_{ij}$  units from source  $i$  to destination  $j$ . He shows that in this case there exists only one unique scheme of minimal cost and that this cost is also equal to the maximum of another quadratic expression, the variables of which satisfy constraints of the form  $y_{ij} = \text{Max} [0, (z_i - z_j - \alpha)/2\beta_{ij}]$ . [Reviewer's remarks: the first result is obvious from the usual geometric interpretation of linear, or (as in the present case) of quadratic programming. The second result is analogous to the duality theorem of linear programming.] *S. Vajda.*

**Theil, H.:** Recent experiences with the Munich business test. *Econometrica* **23**, 184—192 (1955).

## Geometrie.

### Elementargeometrie:

**Lubin, Clarence:** A proof of Morley's theorem. *Amer. math. Monthly* **62**, 110—112 (1955).

Beweis des Morleyschen Satzes von den Dreieckswinkeldrittelnden in der Gaußschen Zahlenebene. *M. Zacharias.*

**Lorent, H.:** Une famille de triangles. *Bull. Soc. roy. Sci. Liège* **24**, 14—24 (1955).

R. Senkatachalam Jyer stellte Verf. folgende Aufgabe: In der Ebene zweier Achsen  $OX, OY$  sind zwei feste Punkte  $P$  und  $H$  gegeben; man soll auf  $OX$  einen Punkt  $Q$  und auf  $OY$  einen Punkt  $R$  derart finden, daß  $H$  der Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $PQR$  ist. Die analytische Lösung des Verf. zeigt keine Möglichkeit einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Verf. behandelt weiter analytisch die Aufgaben: Welches ist der Ort von  $H$  (oder  $P$ ), wenn bei fester Seite  $QR$  der Ort von  $P$  (oder  $H$ ) gegeben ist? Welches ist die Einhüllende von  $QR$ , wenn bei festem  $P$  (oder  $H$ ) der andere  $H$  (oder  $P$ ) eine gegebene Kurve beschreibt? Welches ist der Ort von  $P$  (oder  $H$ ), wenn  $H(P)$  fest ist und  $QR$  eine gegebene Kurve beschreibt? Jede dieser Aufgaben wird für gewisse Sonderfälle gelöst. *M. Zacharias.*

**Taylor, D. G.:** Triangles with common circumcentre and orthocentre. *Math. Gaz.* **39**, 106—108 (1955).

Es gibt eine doppelt unendliche Familie von Dreiecken  $ABC'$ , die denselben Umkreismittelpunkt  $O$  und Höhenschnittpunkt  $P$  besitzen. Darin sind die einfach unendlichen Familien enthalten, die außerdem denselben Umkreisradius  $R$  und damit auch denselben Neunpunktekreis ( $U$ ) sowie denselben Schwerpunkt  $G$  besitzen. Setzt man  $OP = h$ , so sind die drei Fälle  $R < h$ ,  $= h$ ,  $> h$  zu unterscheiden, in denen alle Dreiecke stumpfwinklig, rechtwinklig oder spitzwinklig sind. Die Mittelpunkte der In- und Ankreise aller Dreiecke mit demselben  $R$  liegen auf einem Cartesischen Blatt mit singulärem Brennpunkt  $O$  und gewöhnlichem Brennpunkt  $U$ . Die Seiten jedes Dreiecks berühren einen Kegelschnitt des konfokalen Systems mit den Brennpunkten  $O$  und  $P$ .  
*M. Zacharias.*

**Fadini, Angelo:** Osservazioni su un teorema elementare di geometria. *Giorn. Mat. Battaglini* **83** (V. Ser. **3**), 55—60 (1955).

Verallgemeinerungen der beiden Dreieckssätze (A): Liegen auf den Seiten  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  eines Dreiecks  $ABC$  die Punkte  $D, E, F$ , so gehen die drei Kreise  $AEF$ ,  $BFD$ ,  $CDE$  durch einen Punkt  $P$ , und (B): Drehen sich die drei Geraden  $PD$ ,  $PE$ ,  $PF$  von (A) um  $P$  um einen Winkel  $\alpha$ , und treffen sie in der neuen Lage die Seiten des Dreiecks  $ABC$  in  $D_1, E_1, F_1$ , so ist  $\triangle D_1 E_1 F_1 \sim \triangle DEF$ . Verallgemeinerungen durch Transformation durch reziproke Radien von  $P$  oder von einem beliebigen Punkt der Ebene aus, durch Projektion von einem Punkt  $S$  des Raumes auf eine nicht der Ebene  $ABC$  parallele Ebene, auf eine Kugel  $\Sigma$  von einem Punkt von  $\Sigma$ , und schließlich statt auf eine Kugel auf eine allgemeine Quadrik. Formulierungen der Sätze (A) und (B) für diese Verallgemeinerungen. Abschließend einige Betrachtungen über Systeme von Kegelschnitten.  
*M. Zacharias.*

**Goormaghtigh, R.:** Sur le point de Miquel. *Mathesis* **64**, 9—13 (1955).

Verf. berechnet für ein vollständiges Vierseit der Gaußschen Zahlenebene, das aus einem dem Einheitskreis  $\Gamma$  einbeschriebenen Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  und einer beliebigen Geraden  $\Delta$  gebildet wird, die Koordinate des Miquelschen Punktes (des Schnittpunktes der Umkreise der vier Dreiecke des Vierseits) und zieht aus dem gefundenen Ausdruck mehrere Folgerungen, z. B.: Der Miquelpunkt des vollständigen Vierseits ( $A_1 A_2 A_3 \Delta$ ) ist der Punkt des Kreises  $\Gamma'$ , dessen Wallacegerade der Geraden parallel ist, die die Projektion  $P$  des Mittelpunktes  $O$  von  $\Gamma$  auf  $\Delta$  mit dem Orthopol von  $OP$  bezüglich  $A_1 A_2 A_3$  verbindet.  
*M. Zacharias.*

**Cavallaro, Vincenzo G.:** Dalle identità aritmetiche di Gergonne, di Cauchy e di Lamé all'ellisse di Lemoine. *Giorn. Mat. Battaglini* **83** (V. Ser. **3**), 69—75 (1955).

**Tuckey, C. O.:** A misuse of symmetry. *Math. Gaz.* **39**, 31—34 (1955).

● **Thébault, Victor:** Parmi les belles figures de la géométrie dans l'espace (Géométrie du Tétraèdre). Paris: Librairie Vuibert 1955. XVI, 286 p. f. 2000.—.

Verf. hat seit mehr als 30 Jahren systematisch die Analogien zwischen der Geometrie des Dreiecks und des Tetraeders untersucht und in zahlreichen Abhandlungen dargestellt. In erster Linie diesen seinen Arbeiten ist es zu verdanken, daß es heute neben der neueren Dreiecksgeometrie eine neuere Tetraedergeometrie gibt. Man muß Verf. dankbar sein, daß er in dem vorliegenden Werk die Ergebnisse dieser Arbeiten gesammelt und durch eigene und fremde Untersuchungen ergänzt hat. — Aus der Fülle des Inhalts seien genannt: Mongescher Punkt, Eulergerade, Zwölfpunktekugel, Miquelsche Kugel, Steinersche Ellipsoide, assoziierte Kugeln, insbesondere Kugel von Longchamps, die beiden Lemoinepunkte, die Kugeln von Tucker, Adams, Hagge, der Orthopol einer Geraden. — Bemerkung des Ref.: Daß der Mongesche Punkt der Mittelpunkt des Höhenhyperboloids ist, hat nicht Steiner in der angeführten Notiz über das genannte Hyperboloid, sondern Joachimsthal [*Arch. Math. Phys.* **32**, 107 (1859)] gefunden.  
*M. Zacharias.*

**Thébault, Victor:** Sur la géométrie du tétraèdre. *Mathesis* **64**, Suppl. à Nr. 3/5, 16 p. (1955).

**Thébault, Victor:** On the isosceles tetrahedron. *Amer. math. Monthly* **62**, 356—358 (1955).

**Majo, A. de:** Faisceaux de sphères associés au tétraèdre. *Mathesis* **64**, 13—19 (1955).

**Lockwood, E. H.:** Incyclic-circumeyclic quadrilaterals. *Math. Gaz.* **39**, 98—101 (1955).

Sonderfall des Ponceletschen Schließungssatzes. Sollen die Tangenten in den Ecken  $A, B, C, D$  eines Kreisvierecks ein Kreisviereck bilden, so müssen die Diagonalen  $AC, BD$  in einem Punkt  $K$  aufeinander senkrecht stehen. Die Mittelpunkte  $O, O'$  der beiden Kreise, der Punkt  $K$  und der Schwerpunkt  $S$  der Punkte  $A, B, C, D$  liegen in einer Geraden, und  $S$  halbiert  $OK$ . Folgerungen aus dieser Lagebeziehung. *M. Zacharias.*

**Trigg, Charles W.:** Configuration generated by folding a square. *Scripta math.* **21**, 77—80 (1955).

**Barlotti, Adriano:** Una proprietà degli  $n$ -agoni che si ottengono trasformando in una affinità un  $n$ -agono regolare. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **10**, 96—98 (1955).

**Locher-Ernst, L.:** Konstruktionen des Dodekaeders und Ikosaeders. *Elemente Math.* **10**, 73—81 (1955).

**Saaty, T. L.:** The number of vertices of a polyhedron. *Amer. math. Monthly* **62**, 326—331 (1955).

Es seien in einem Raume mit  $n$  Dimensionen  $F_0$  und  $F_{n-1}$  die Anzahlen der Ecken und der  $(n-1)$ -dimensionalen Seiten eines konvexen Polyeders; dann gilt:

$$\text{(für ein gerades } n) \quad F_0 \leq \frac{2}{n-2} \left[ \sum_{p=1}^{(n-2)/2} \binom{F_{n-1}}{n-2p} - F_{n-1} - 2^n + 2 + \frac{1}{2} n(n+3) \right];$$

$$\text{(für ein ungerades } n) \quad F_0 \leq \frac{2}{n-2} \left[ \sum_{p=1}^{(n-3)/2} \binom{F_{n-1}}{n-2p} - \frac{1}{2} (n-2) F_{n-1} - 2^n + n(n-1) \right].$$

Der Beweis ist eine Anwendung der Formel von Descartes und Euler und einiger elementarer Betrachtungen. Im allgemeinen gibt es für  $F_0$  nicht eine obere Schranke der Form  $F_0 \leq a F_{n-1} + b$ , wo  $a, b$  Funktionen von  $n$  sind.

*E. G. Togliatti.*

**Egloff, Werner:** Ein geometrischer Beweis eines Satzes von Axel Schur. *Arch. der Math.* **6**, 281—283 (1955).

Mit Hilfe einer einfachen geometrischen Schlußweise wird ein anschaulicher Beweis des nachstehend genannten Satzes von A. Schur erbracht: Ein ebenes Polygon bilde mit seiner Sehne einen konvexen Bereich. Dann wird bei jeder „Verwindung“ desselben bei Erhaltung der Längen der Polygonseiten und der Winkel benachbarter Polygonseiten die Sehne länger. Dem Beweis ist eine Figur beigegeben. Für stückweise stetig gekrümmte Kurven ist der entsprechende Satz in eleganter Weise von E. Schmidt [*S.-Ber. preuss. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl.* **1925**, 485—490 (1925)] bewiesen worden. *K. P. Grottemeyer.*

**Bankoff, Leon:** The golden arbelos. *Scripta math* **21**, 70—76 (1955).

**Thébault, Victor:** A propos du tranchet d'Archimède. *Enseignement math.* **40**, 62—69 (1955).

Als Verallgemeinerung der bekannten Figur des „Schustermessers“ oder Arbelos von Archimedes betrachtet Verf. folgende Figur: Zwei beliebige Kreise  $(O_1)$  und  $(O_2)$  berühren einen gegebenen Kreis  $(O)$  innen in den Endpunkten  $A$  und  $B$  einer Sehne von  $(O)$ , und zwei Kreise  $(\omega_1), (\omega_2)$  berühren zugleich die drei Kreise  $(O), (O_1), (O_2)$ . Setzt man  $OO_1 = a, OO_2 = b, \sphericalangle (AB, AO) = \vartheta$ , und sind  $R, \varrho_1, \varrho_2$  die Radien von  $(O), (\omega_1), (\omega_2)$ , so ist  $1/\varrho_1 + 1/\varrho_2 = (2 \cos^{-2} \vartheta) [1/a + 1/b -$



$(1 + \sin^2 \vartheta)/R]$ . Für  $\vartheta = 0$ , d. h. wenn  $AB$  ein Durchmesser von  $(O)$  ist, ergibt sich die Formel  $1/\rho_1 = 1/\rho_2 = 1/a + 1/b - 1/R$  für den Arbelos. Weitere Sätze ergeben sich als Verallgemeinerungen bekannter Eigenschaften der Archimedischen Figur. M. Zacharias.

● Wylie jr., C. R.: *Plane Trigonometry*. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1955. 164 Fig. 30 s.

Dieses elementare Lehrbuch der ebenen Trigonometrie unterscheidet sich von den üblichen Büchern über diesen Gegenstand dadurch, daß es die Trigonometrie in erster Linie als Hilfswissenschaft für analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung, Physik und Technik betrachtet. Infolgedessen werden die analytischen Gesichtspunkte stärker betont als die rechnerischen. Der Funktionsbegriff steht im Mittelpunkt. Außer den üblichen Kapiteln über die trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen, die Berechnung von Dreiecken (mit einfachen Beispielen) und die goniometrischen Gleichungen enthält das Buch auch eine elementare Einführung in die Lehre von den komplexen Zahlen und den Satz von Moivre, sowie in die Theorie der trigonometrischen Reihen und der hyperbolischen Funktionen. Zu seinem Verständnis ist nur die Kenntnis der elementaren Algebra und Geometrie erforderlich, deren Hauptsätze zudem im Anhang zusammengestellt sind. Alles was aus der analytischen Geometrie und der Lehre von den Logarithmen gebraucht wird, ist im Buch selbst entwickelt. Der Verf., der Dekan der mathematischen Abteilung der Universität von Utah ist, hat stets den Lernenden im Auge. Er hat deshalb das Buch rein methodisch aufgebaut, verwendet eine einfache und klare Sprache, schickt den Übungsaufgaben durchgeführte Beispiele voraus, gibt im Anhang außer den Lösungen der Übungsaufgaben eine Anleitung zum Rechnen mit approximativen Zahlen, ein Verzeichnis der Fachausschnitte mit Erläuterungen, ferner Tafeln der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, der natürlichen Logarithmen sowie der Werte der Exponential- und hyperbolischen Funktionen. Ein Sachverzeichnis erleichtert die Benutzung des Buches, das sich zum Selbststudium eignet. E. Löffler.

Noi, Salvatore di: *Geometria euclidea sulla sfera*. Archimede 7, 10–14 (1955).

Facciotti, Guido: *L'iperbole equilatera sulla sfera*. Periodico Mat., IV. Ser. 33, 104–112 (1955).

### Algebraische Geometrie:

Chisini, Oscar: *Aspetti significativi della geometria algebrica*. Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari 6, 22 p. (1955).

Durch geschickte Ausnützung von einigen wenigen fundamentalen Sätzen der Algebra und Funktionentheorie lassen sich sehr elegante Beweise für manche Sätze der klassischen algebraischen Geometrie herleiten (vgl. die Arbeit desselben Verf., dies. Zbl. 52, 166). W. Gröbner.

Turri, Tullio: *Le trasformazioni birazionali involutorie dello spazio*. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 24, 256–265 (1955).

Les transformations birationnelles involutives de l'espace sont réductibles à cinq types déterminés: 1. transformation involutive de Jonquières, 2. transf. (3, 3) déterminées par trois polarités, 3. transf. déterminée par les quadriques passant par 6 points, 4. transf. déterminées par un système linéaire de surfaces cubiques à intersections variables elliptiques, 5. transf. déterminées par un système linéaire de surface du 4<sup>e</sup> ordre à intersections variables de genre 2, ou à un produit de deux des transformations précédentes qui soient permutables. L. Godeaux.

Turri, Tullio: *Le trasformazioni involutorie dello spazio date dalle intersezioni di superficie di ordine quattro*. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 24, 165–176 (1955).

Détermination des transformations birationnelles involutives de l'espace déterminées par un système linéaire de surfaces du quatrième ordre de degré 2. La base de ce système est une courbe d'ordre 8, 9, 11 ou 12. *L. Godeaux.*

**Sydler, J.-P.:** Le triangle comme opérateur géométrique. *Elemente Math.* **10**, 100—105 (1955).

Ist ein beliebiges Dreieck  $P_0Q_0R_0$  gegeben, so kann man jedem Punktepaar  $PQ$  einen einzigen Punkt  $R$  entsprechen lassen, wenn man fordert, daß das Dreieck  $PQR$  dem Grunddreieck direkt ähnlich sei. Setzt man voraus, daß jedem Punkt  $P$  einer Kurve  $C$   $n$ -ter Ordnung vom Geschlecht 0  $k$  Punkte  $Q$  einer Kurve  $D$   $p$ -ter Ordnung und jedem Punkt  $Q$   $h$  Punkte  $P$  entsprechen, und wenn man alle durch zwei entsprechende Punkte  $P, Q$  bestimmten einander direkt ähnlichen Dreiecke  $PQR$  betrachtet, so ist der Ort des Punktes  $R$  eine Kurve  $(h p + k n)$ -ter Ordnung. — Ist  $PQ$  konstant, so findet man: Es gibt  $2 p n r$  kongruente Dreiecke  $PQR$ , deren Ecken auf drei gegebenen Kurven der Ordnungen  $n, p, r$  liegen. — Fallen die Kurven  $C$  und  $D$  zusammen, so folgt: Gleiten die Ecken  $P$  und  $Q$  eines starren Dreiecks  $PQR$  auf einer Kurve  $n$ -ter Ordnung vom Geschlecht 0, so beschreibt die Ecke  $R$  eine Kurve der Ordnung  $n^2$ . — Sodann betrachtet Verf. statt der Korrespondenz zweier Kurven eine Transformation  $B$  der ganzen Ebene in sich selbst. Das Dreieck  $P_0Q_0R_0$  erzeugt dann einen Operator  $T$ , der der Transformation  $B$  die Transformation  $TB$  zuordnet. Ein Sonderfall führt zu einem einfachen Beispiel einer birationalen nicht-cremonaschen Transformation der Ebene auf sich selbst. *M. Zacharias.*

**Balsimelli, Pio:** Su una trasformazione birazionale dell' $S_3$  biduale. *Giorn. Mat. Battaglini* **83** (V. Ser. 3), 77—81 (1955).

Etude de la transformation birationnelle quadratique  $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : x_1^2$  lorsque l'on remplace les coordonnées par des nombres biduels (voir Spampinato, *Geometria superiore*, Vol. IV (Napoli 1949), p. 452 et ce Zbl. **20**, 392). *L. Godeaux.*

**Tullio Cirillo, Elda de:** La trasformazione birazionale (2,7) dell' $S_{11}$  complesso immagine di una trasformazione cremoniana quadratica dell' $S_3$  complesso prolungata nel campo tripotenziale. *Giorn. Mat. Battaglini*, V. Ser. **83**, 83—88 (1955).

Etude de la transformation birationnelle quadratique

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : x_1^2$$

lorsque l'on remplace les coordonnées par des nombres (à trois unités) tripotentiels [voir Spampinato, *Geometria superiore*, vol. V (Napoli 1947), p. 108].

*L. Godeaux.*

**Spampinato, Nicolò:** Rappresentazione in  $S_5$  di un fascio di curve e della serie lineare secata su una curva complessa prolungata nel campo biduale. *Ricerca, Rivista Mat. pur. appl.* **6**, Nr. 1, 18—25 (1955).

Partant d'un faisceau de courbes algébriques planes d'ordre  $n$ :  $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$ , l'A. étudie dans  $S_5$  la variété  $V_4$  d'ordre  $2n$ , d'équation  $f(x) \sum y \partial g / \partial x - g(x) \sum y \partial f / \partial x = 0$ . Elle contient  $\infty^2$  plans. *L. Godeaux.*

**Godeaux, Lucien:** Sur les points de diramation de seconde espèce et de première catégorie d'une surface multiple. *Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. **41**, 703—708 (1955).

Lorsqu'une surface est multiple d'ordre premier  $p$  de la forme  $p = (t + 1) a b + a + b$ , les points de diramation de seconde espèce, ont un cône tangent décomposé en deux cônes rationnels d'ordre  $a$  et  $b$  se coupant selon une génératrice; le point infiniment voisin sur cette génératrice équivaut à  $t$  courbes rationnelles de degré virtuel  $-2$ , chacune rencontrant la précédente en un point. Il en résulte qu'au point de diramation font suite  $[t/2]$  points doubles biplanaires infiniment voisins dont le dernier est ordinaire si  $t$  est pair, et est suivi d'un point double conique si  $t$  est impair. Etude des systèmes linéaires passant au point de diramation; relations entre ces systèmes et les courbes images des singularités. *B. d'Orgeval.*

**Godeaux, Lucien:** Sur la construction d'exemples de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **41**, 798—804 (1955).

L'intersection dans  $S^6$  d'un cône projetant une surface de Véronèse  $V$ , par une hypersurface d'ordre  $n$  ne passant pas au sommet, est une surface d'ordre  $4n$ , sur laquelle les cônes projetant les coniques de  $V$  découpent un réseau de courbes  $C$  d'ordre  $2n$ , réseau de degré  $n$ . On peut faire correspondre à cette surface une  $F$  de  $S^3$  d'ordre  $2n$ , dotée d'un point multiple d'ordre  $n$  dont le cône tangent se compose d'un plan compté  $n$  fois, point auquel est infiniment voisine une droite multiple d'ordre  $n$  située dans ce plan; les sections par ce point sont les homologues des  $C$ , leur genre est  $(n-1)^2$ ; la surface n'est pas rationnelle car son système canonique est  $|(2n-5)C|$ . Si l'on prend  $n = p$  premier et une hypersurface conservée par une homographie de  $S^6$  de période  $p$  engendrée par  $x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : e x_2 : e^a x_3$  ( $e^p = 1$ ) sur la  $F_{4p}$  on a une involution cyclique d'ordre  $p$ ; si  $2, 2a, a+1, a, 1$  ne sont pas congrus à  $p$  on n'a que  $p$  points unis dont la nature est analogue à celle des points unis de l'involution plane génératrice; si  $a = p-1$ , on a de plus  $p$  points unis symétriques. On peut encore construire une homographie dérivée de la précédente telle que sur  $F_{4p}$ , il n'y ait pas de points unis; il suffit d'introduire un nombre  $g$  tel que  $g > 0$ ,  $g \neq 2$ ,  $g-2a \neq 0 \pmod{p}$ . B. d'Orgeval.

**Gallarati, Dionisio:** Sul contatto di superficie algebriche lungo curve. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **38**, 225—251 (1955).

L'A. considère en premier lieu deux hypersurfaces algébriques irréductibles de  $S_r$  qui ont un contact d'ordre  $q-1$  le long d'une variété à  $r-2$  dimensions qui en est l'intersection complète. Il donne une condition nécessaire et suffisante pour leur existence. Il étudie ensuite le contact ordinaire de deux surfaces d'ordres  $m$ ,  $n$  de  $S_3$  et montre que les conditions nécessaires établies par B. Segre (ce Zbl. **9**, 371) sont suffisantes si  $m < 5$ . Il examine en détail les cas  $m = 2, 3$  et donne quelques indications sur les cas  $m = 5, 6$ . L. Godeaux.

**Zappa, Guido:** Sopra una probabile disuguaglianza tra i caratteri invariantivi di una superficie algebrica. Rend. Mat. e Appl. **14**, 455—464 (1944).

L'A. considère une surface algébrique  $F$  susceptible de dégénérer en un système  $M$  de plans distincts. Une droite de connexion est l'intersection de deux plans sans faire partie de la limite de la courbe double de  $F$ . L'intersection de trois plans est un point de connexion triple s'il appartient à trois droites de connexion, un point bicuspidal s'il appartient à deux droites de connexion. En projetant  $F$  et  $M$  d'un point sur un plan, on obtient d'une part une courbe de diramation  $D$  et d'autre part un système de droites qui doit être la limite de  $D$ . La projection d'une droite de connexion doit compter deux fois dans la limite de  $D$ . L'A. établit la formule  $\varrho + \varrho_0 \geq 4p_g + 1$ , où  $\varrho$  et  $\varrho_0$  sont les nombres des cycles bidimensionnels algébriques et transcendants indépendants et  $p_g$  le genre géométrique de  $F$ . L. Godeaux.

**Burniat, Pol:** Sur un lemme de F. Enriques. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **41**, 97—100 (1955).

Das behandelte Lemma von Enriques (dies. Zbl. **36**, 371) lautet: Eine lineare Vollschar  $|C|$  von Kurven auf einer algebraischen Fläche schneidet auf einer irreduziblen Kurve  $\bar{D}$  einer linearen Schar  $|D|$ , die „vergleichsweise groß“ zu  $|C|$  ist, eine Vollschar aus. Verf. gibt eine genaue Begründung des von Enriques a. a. O. skizzierten Beweises. W. Gröbner.

**Severi, Francesco:** Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze algebriche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **18**, 357—361 (1955).

Die auf einer (immer stillschweigend als singularitätenfrei vorausgesetzten) algebraischen Mannigfaltigkeit  $M_r$  liegenden ungemischten Mannigfaltigkeiten  $V_k$  der Dimension  $k$  bilden bekanntlich bei Hinzunahme der virtuellen Mannigfaltig-



keiten eine Abelsche Gruppe. Durch Einführung des (symmetrischen, reflexiven und transitiven) Begriffes der „algebraischen Äquivalenz“ erhält man eine Einteilung der  $V_k$  in Äquivalenzklassen. Dafür werden 3 Definitionen angegeben, bzw. wiederholt:  $\alpha)$   $A \equiv B$  (d. h.  $A$  algebraisch äquivalent  $B$ ), wenn  $A - B = H - K$  und  $H|K$ , d. h.  $H, K$  zwei effektive, in demselben irreduziblen algebraischen System enthaltene Mannigfaltigkeiten sind;  $\beta)$   $A \equiv B$  wenn  $A||B$  oder  $A + C||B + C$ ;  $\gamma)$   $A \equiv B$  wenn  $A = A_1 - A_2$ ,  $B = B_1 - B_2$ ;  $A_1, A_2, B_1, B_2$  effektiv und  $A_1||B_1$ ,  $A_2||B_2$ . Die Gleichwertigkeit dieser drei Definitionen wird gezeigt und der Satz bewiesen: Zwei effektive Mannigfaltigkeiten eines zusammenhängenden algebraischen Systems sind algebraisch äquivalent, aber nicht umgekehrt, wie aus einem Beispiel hervorgeht.

W. Gröbner.

**Severi, Francesco: Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze razionali.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 443—451 (1955).

Wie für die algebraische Äquivalenz (siehe vorstehendes Referat) werden hier drei analoge Definitionen für die rationale Äquivalenz der ungemischten  $k$ -dimensionalen virtuellen Mannigfaltigkeiten auf einer (scil. singularitätenfreien)  $M_r$  gegeben:  $\alpha')$   $A \equiv B$  (d. h.  $A$  rational äquivalent  $B$ ), wenn  $A - B = H - K$  und  $H|K$ , d. h.  $H$  und  $K$  im gleichen rationalen System enthalten sind;  $\beta')$   $A \equiv B$ , wenn  $A|B$  oder  $A + C|B + C$ ;  $\gamma')$   $A \equiv B$ , wenn  $A = A_1 - A_2$ ,  $B = B_1 - B_2$ ;  $A_1, A_2, B_1, B_2$  effektiv und  $A_1|B_1$ ,  $A_2|B_2$ . Und zwar versteht Verf. unter einem „rationalen System virtueller Mannigfaltigkeiten“ die algebraische Summe von endlich vielen rationalen Systemen effektiver Mannigfaltigkeiten; jenes ist birational äquivalent einer Segreschen Mannigfaltigkeit, also wieder rational. — Auf einem anderen Wege gelangt Verf. zu den rationalen Systemen über die „rationalen Elementarsysteme“, die (abgesehen von festen Bestandteilen) auf der  $M_r$  von  $r - k$  allgemeinen Hyperflächen der respektiven Ordnungen  $m_1, \dots, m_{r-k}$  ausgeschnitten werden. Bei passender Festsetzung über die festen Bestandteile sind diese birational invariant. Um zu einer Gruppe und damit zu einem transitiven Äquivalenzbegriff zu kommen, werden alle endlichen algebraischen Summen von derartigen Elementarsystemen hinzugenommen („ $T$ -Typus“) und mit Berufung auf frühere Beweise wird gezeigt, daß dieser Begriff nun mit demjenigen der rationalen Äquivalenz identisch ist.

W. Gröbner.

**Severi, Francesco: Sugli antigheneri d'una varietà algebrica.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 131—140 (1955).

Bedeutet  $|C|$  eine lineare Vollschar von  $V_{r-1}$  auf einer  $V_r$ ,  $|C'|$  die adjungierte Schar, so ist  $|C' - C| = |K|$  das (von eventuellen festen Komponenten) nicht bereinigte kanonische System,  $|C - C'| = |H|$  das antikanonische System. Beide Systeme sind nur relativ invariant (d. h. nur gegenüber regulären birationalen Transformationen). Die um 1 vermehrte Dimension von  $|K|$  ist das geometrische Geschlecht  $P_r^q$  von  $V_r$  (absolut invariant); analog liefert  $|H|$  das „Antigeschlecht“ von  $V_r$  (relativ invariant).  $|H|$  ist im allgemeinen nur dann effektiv, wenn  $|K|$  virtuell ist; daher ist das Antigeschlecht nur im Falle  $P_r^q = 0$  bedeutungsvoll. Der projektive Raum  $S_r$  z. B. hat das Antigeschlecht  $\binom{2r+1}{r}$ . — Im folgenden beschränkt Verf. sich auf  $r = 2$ . Hier hat das antikanonische System  $|H|$  den virtuellen Grad  $\omega - 1$  und das virtuelle Geschlecht 1 ( $\omega =$  virtuelles Geschlecht von  $|K|$ ). Das Antigeschlecht kann alle Werte  $0, 1, 2, \dots, 10$  annehmen, und zwar gilt für die Ebene 10. Um eine absolute Invariante zu gewinnen, definiert Verf. als „absolutes Antigeschlecht“ einer Fläche  $F$  das Maximum der Antigeschlechter aller zu  $F$  birational äquivalenten Flächen. Bei allen Untersuchungen wird aber  $F$  als singularitätenfrei (oder mit gewöhnlichen Singularitäten behaftet) vorausgesetzt; daher wird nachträglich das absolute Antigeschlecht einer singulären  $F$  als dasjenige eines birational

äquivalenten nicht singulären Modells von  $F$  definiert, was nicht ganz in Einklang mit der ersten Definition zu stehen scheint. Die rationalen Flächen sind durch das absolute Antigeschlecht 10 charakterisiert.

W. Gröbner.

**Kähler, Erich:** *Tensori razionali di 1ª specie sopra una varietà algebrica.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 151—154 (1955).

Die vom Verf. eingeführten (dies. Zbl. 5, 176) kovarianten Tensoren 1. Gattung (d. h. überall auf der Mannigfaltigkeit holomorph) liefern die wichtigsten absoluten Invarianten der betrachteten algebraischen Mannigfaltigkeit; analog können aus den kontravarianten und gemischten Tensoren 1. Gattung relative Invarianten (d. h. nur gegenüber regulären birationalen Transformationen) abgeleitet werden. Besonders bedeutungsvoll sind antisymmetrische Tensoren vom Typ

$$A(\partial(s_1, \dots, s_n)/\partial(x_1, \dots, x_n))^h;$$

sie heißen „antikanonische“ ( $h = 1$ ), beziehungsweise „antiplurikanonische“ Formen ( $h > 1$ ). Das „Antigeschlecht“ der Mannigfaltigkeit = Anzahl der linear unabhängigen antikanonischen Formen ist für die Ebene z. B. gleich 10 und stimmt mit dem von Severi (s. vorstehend. Referat) definierten überein. Doch können mit dieser Methode noch weitere relative Invarianten abgeleitet werden.

W. Gröbner.

**Barsotti, Iacopo:** *Un teorema di struttura per le varietà gruppi.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 43—50 (1955).

In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. eine Verfeinerung des Satzes 6.4 seiner Arbeit [2] [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 38, 77—119 (1955)]; er beweist, daß alle group-varieties durch AM (Abelsche Mannigfaltigkeiten) und VM (Vessiot-Mannigfaltigkeiten) konstruierbar sind. Eine Verschärfung des Satzes würde leicht aus der Rationalität der VM folgen, aber man weiß noch nicht, ob eine VM im Falle der Charakteristik  $> 0$  rational ist. — Die hier gebrauchten Definitionen finden sich in [1] [I. Barsotti, Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 2, 236—257 (1953)] und in [2]. Insbesondere ist eine group-variety (oder varietà quasi abeliana, Severi, dies. Zbl. 41, 482) über einem algebraisch abgeschlossenem Körper  $k$  [1, S. 238] eine absolut irreduzible Mannigfaltigkeit  $G$ , auf der eine normale Zusammensetzungsvorschrift [1, 238]  $R = PQ$  und eine echte Untermannigfaltigkeit  $F$  gegeben sind, so daß  $G - F$  eine Gruppe ist. Falls  $F$  leer ist, heißt  $G$  eine AM (nicht notwendig kommutativ!). Eine VM ist eine linear-group variety (keine lineare group-variety!) [2, 78]. — Die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit [3] sind: a) Satz (5), b) Korollar (8), c) Satz (9). a) Ist  $G$  eine group-variety auf  $k$  (algebraisch abgeschlossen), so enthält  $G$  solch eine invariante group-subvariety [2, 79] von Vessiot, daß  $G/H$  [2, 83] eine AM ist; b)  $H$  ist eindeutig bestimmt und jede group-subvariety von Vessiot von  $G$  ist group-subvariety von  $H$ ; c) es existieren eine der Mannigfaltigkeit  $G/H$  isogenous [2, 80] AM  $A$ , eine VM  $B$  ( $A, B$  über  $k$ ), ein Homomorphismus  $\alpha$  von positivem Grad [2, 79—80], eine kommutative rationale group-subvariety  $V$  (über  $k$ ) und ein factor set  $\gamma$  [2, 91] [3, 46] von  $\alpha(A \times B)$  auf  $V$ , so daß  $G \cong \{ \alpha(A \times B), V, \gamma \}$ , wo  $\{ \}$  das crossed product ist [2, 92].

M. Benedicty.

**Benedicty, Mario:** *Sull'equivalenza tra matrici normali di Severi.* Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 38, 51—76 (1955).

Es sei  $\omega^{(g,g')}$  eine quasi-Abelsche Matrix in der Normalform von Severi (M. N. S.), d. h. die primitive Periodenmatrix eines Körpers  $K$  von quasi-Abelschen Funktionen in  $g$  Variablen (vgl. F. Severi, Funzioni quasi abeliane, dies. Zbl. 41, 482),  $p, \delta_1, \delta_2, q$  seien ihre charakteristischen Zahlen (mit  $g = p + \delta_1 + \delta_2$ ;  $g' = 2p + \delta_1 \leq 2g$ ;  $q \leq p$ ;  $q \leq \delta_2$ ) und  $d_1, d_2, \dots, d_p$  ihre Elementarteiler. Zwei M. N. S.  $\omega^{(g,g')}$  und  $\omega^{*(g,g')}$  heißen „äquivalent“, wenn  $\omega^* = \beta^{(g)} \omega B^{(g')}$  gilt, mit einer komplexen nicht ausgearteten Matrix  $\beta^{(g)}$  und einer unimodularen Matrix  $B^{(g')}$ ; bezüglich dieser Erklärung stellt der Verf. das Problem, ob und wann  $\omega$  und  $\omega^*$  die-

selben charakteristischen Zahlen und Elementarteiler haben. Dieses Problem wird folgendermaßen gelöst: im Falle  $p = q$  ist jede M. N. S. einem  $\omega^*$  mit den Charakteren  $p^* = q^* = 0$ ,  $\delta_1^* = \delta_1 + 2q$ ,  $\delta_2^* = \delta_2 - q$  äquivalent; im Falle  $p = q + 1$  ist jede M. N. S. einem  $\omega^*$  mit den Charakteren  $p^* = q^* = 1$ ,  $\delta_1^* = \delta_1 + 2q$ ,  $\delta_2^* = \delta_2 - q$  äquivalent; im Falle  $p > q + 1$  ist eine „allgemeine“ M. N. S. so gebaut, daß jede äquivalente Matrix  $\omega^*$  dieselben charakteristischen Zahlen und dieselben Elementarteiler hat (spezielle  $\omega$  können trotzdem einem  $\omega^*$  mit anderen Charakteren äquivalent sein). In den beiden ersten Fällen haben die charakteristischen Zahlen und die Elementarteiler des ursprünglichen  $\omega$  keine invariante Bedeutung gegenüber der obigen Äquivalenzrelation. Am Ende fragt man sich, welche funktionentheoretische Bedeutung diese Resultate in bezug auf die Körper von quasi-Abelschen Funktionen haben; die Antwort ist noch unbekannt; der Verf. hat schon einige Fragen in dieser Richtung gestellt [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **16**, 716—720 (1954)]. Für den Begriff des „gruppo unimodulare ristretto“, der in dieser Arbeit benutzt wird, s. folgend. Referat.

M. Rosati.

**Benedicty, Mario:** Sulla definizione di Gruppo unimodulare ristretto. Rend. Mat. e Appl. **14**, 368—381 (1955).

Im Laufe seiner Untersuchungen über die quasi-Abelschen Funktionen hat der Verf. den „gruppo unimodulare ristretto  $GR[\Delta, \delta_1]$ “ (vgl. vorstehend. Referat) definiert; die Definition ist eine Erweiterung der Definition des „gruppo modulare ristretto“ (Verallgemeinerung der Modulgruppe), die in der Theorie der Abelschen Modulfunktionen auftritt [s. z. B. F. Conforto, Funzioni abeliane modulari, Corsi dell'Ist. naz. di Alta Mat., Roma (1951)]. In bezug auf eine quasi-Abelsche Matrix  $\omega^{(p+\delta_1+\delta_2, 2p+\delta_1)}$  in der Severischen Normalform (kurz M. N. S.; vgl. F. Severi, Funzioni quasi abeliane, dies. Zbl. **41**, 482), deren charakteristische Zahlen  $p, \delta_1, \delta_2, q$  sind und deren Elementarteiler  $d_1, d_2, \dots, d_p$  Elemente der Diagonalmatrix  $\Delta$  sind, ist  $GR[\Delta, \delta_1]$  die Gruppe aller unimodularen  $(2p + \delta_1)$ -reihigen Matrizen  $\Gamma^{(2p+\delta_1)}$ , für welche  $\Gamma^{-1} M \Gamma = M$  ist, wobei  $(\Gamma^{-1}$  die transponierte von  $\Gamma$  und)  $M^{(2p+\delta_1)}$  die folgende Matrix ist:

$$M^{(2p+\delta_1)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Delta^{-1} \\ 0 & 0^{(\delta_1)} & 0 \\ -\Delta^{-1} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Richtigkeit der angegebenen Definition wird in dieser Arbeit durch folgenden Satz (dessen Notwendigkeit in der vorangehenden Arbeit schon erkannt wurde) bewiesen: Sind eine „allgemeine“ M. N. S.  $\omega^{(p+\delta_1+\delta_2, 2p+\delta_1)}$ , mit  $p - q > 1$ , und eine unimodulare Matrix  $\Gamma^{(2p+\delta_1)}$  vorgegeben, so ist die Zugehörigkeit von  $\Gamma$  zu  $GR[\Delta, \delta_1]$  eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine komplexe nicht ausgeartete Matrix  $\gamma^{(p+\delta_1+\delta_2)}$  existiert, so daß  $\gamma \omega \Gamma$  wieder eine M. N. S. ist. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines ähnlichen wohlbekannten Satzes über die Riemannschen Matrizen, welcher in dem obigen für  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  enthalten ist. Endlich untersucht der Verf. die Fälle  $p - q \leq 1$  und beweist, daß ein gleichartiger Satz in diesen Fällen nicht so bedeutungsvoll würde.

M. Rosati.

**Gherardelli, Francesco:** Un'osservazione sulla catena delle sizigie di un ideale di funzioni theta. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **10**, 190—194 (1955).

Die zu einer (in der Normalform gegebenen) Riemannschen Matrix der Zeilenzahl  $p$  gehörigen Thetafunktionen aller Ordnungen bilden einen homogenen Noether'schen Ring  $\theta$ , in dem der Hilbertsche Algorithmus der Syzygienmoduln abbricht, d. h. jede Syzygienkette nur endlich viele Glieder hat (Andreotti;  $\theta$  ist sogar ZPE-Ring). Verf. führt hier den Beweis für das Abbrechen einer Syzygienkette direkt, indem er den bemerkenswerten Satz ableitet: Jede Thetafunktion der Ordnung  $kn$  des Ringes  $\theta$  läßt sich als Polynom von Thetafunktionen der Ordnung  $n$  (mit ganzzahligen Koeffizienten) ausdrücken, sobald  $n > n_0$  ist; und zwar ist



$n_0 \leq 4$  bei allgemeinen Moduln, sonst jedenfalls  $\leq 2^p$ . Das letztere folgt aus der bekannten Tatsache, daß die Theta mit halbzahligen Charakteristiken den Ring  $\theta$  erzeugen.  
W. Gröbner.

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Voss, K.: Eine Bemerkung über die Totalkrümmung geschlossener Raumkurven. Arch. der Math. 6, 259—263 (1955).

Let  $S$  be a closed, smooth surface in 3-space,  $K$  its Gaussian curvature, and  $dA$  its area element. Obviously  $I(S) = \int_{K>0} K dA$  is  $\geq 4\pi$ . Let  $\mathbf{r}(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$  be a closed space curve,  $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$ ,  $\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}(l)$ .  $k(s) = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|$  is the curvature;  $\kappa = \int_0^l k(s) ds$  is called integral curvature. Consider now the surface  $S$ :  $\mathbf{r}(s, \theta) = \mathbf{r}(s) + r(t_1(s) \cos \theta + t_2(s) \sin \theta)$ , where  $\dot{\mathbf{r}}(s)$ ,  $t_1(s)$ ,  $t_2(s)$  are mutually orthogonal, twice differentiable, and  $r$  is a small positive constant. Direct computation shows:  $I(S) = 2\kappa$ . From these results follow easily known facts concerning the integral curvature of closed space curves ( $\kappa \geq 2\pi$ , and, if  $\mathbf{r}(s)$  is knotted,  $\kappa \geq 4\pi$ ).  
I. Fáry.

Backes, F.: Sur un cas de correspondance avec orthogonalité des éléments. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 41, 101—105 (1955).

Verf. ordnet jeder Fläche  $\Sigma$  von konstanter mittlerer Krümmung eine Fläche  $\Sigma_1$  zu, die sich auf die Schwarzsche assoziierte Minimalfläche reduziert, wenn  $\Sigma$  selbst Minimalfläche ist. Es besteht Orthogonalität zwischen entsprechenden Linienelementen, und die Krümmungslinien von  $\Sigma$  gehen in die Asymptoten von  $\Sigma_1$  über. Dieser Korrespondenz wird eine Geradenkongruenz zugeordnet, deren Abwickelbare auf  $\Sigma$  die Krümmungslinien ausschneiden, und die insofern die Normalenkongruenz einer Minimalfläche verallgemeinert. Das Studium der Korrespondenz zwischen  $\Sigma$  und  $\Sigma_1$  wird verfolgt bis zur Gewinnung einer partikulären Lösung der Moutardschen Gleichung, die in die Methode von Darboux-Lelievre hineinspielt.  
J. Teixidor.

Backes, F.: Sur une configuration particulière des douze surfaces de Darboux. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 41, 370—372 (1955).

$\Sigma$  und  $\Sigma'$  seien Flächen konstanter mittlerer Krümmung, die zu einer Fläche konstanter Gaußscher Krümmung assoziiert sind. Die Flächen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma'_1$ , die aus  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  vermöge der in der vorstehend besprochenen Arbeit untersuchten Transformation hervorgehen, erweisen sich als Brennmäntel einer  $W$ -Kongruenz. Es werden Beziehungen hergestellt zwischen den Kongruenzen, die den Korrespondenzen zwischen  $\Sigma$ ,  $\Sigma_1$  und  $\Sigma'$ ,  $\Sigma'_1$  zugeordnet sind; dabei wird eine weitere Fläche konstanter Gaußscher Krümmung eingeführt.  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma'_1$  erweisen sich als die vier Flächen einer Darbouxschen Konfiguration.  
J. Teixidor.

Backes, F.: Sur les lames liquides en équilibre. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 41, 430—434 (1955).

Unter Verwendung einer in einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. 56, 402) hergeleiteten Formel erhält Verf. einige bekannte Resultate bezüglich des Gleichgewichtes von Membranen, die einem konstanten, nicht verschwindenden Druck ausgesetzt sind.  
J. Teixidor.

Nitsche, Joachim: Beiträge zur Verbiegung zweifach zusammenhängender Flächenstücke. Math. Z. 62, 388—399 (1955).

Verf. hat in einer dreiteiligen Arbeit (dies. Zbl. 51, 125; 56, 405; 64, 158) die Biegeflächen der Halbkugel  $r = 1$  bei Vorgabe der Normalkrümmung am Rande behandelt. Mit derselben Methode wie in III wird hier die Existenz von Biegeflächen einer Kugelzone mit ebenen Rändern in parallelen Ebenen bei Vorgabe der

Normalkrümmungen bewiesen. An Stelle des Hilfssatzes von Joh. Nitsche tritt hier ein solcher von Vekua für mehrfach zusammenhängende Bereiche. Der Fall konstanter Normalkrümmung ( $\varrho_i = 1 + \varepsilon \hat{\varrho}_i$ ,  $i = 1, 2$ ) an den Rändern wird ausführlicher behandelt mit dem Ansatz  $U = M = r^{-2} (k c \cos 2\varphi + \alpha(r) \sin 2\varphi)$ ,  $V = \frac{1}{2}(L - N) = r^{-2} (-k c \sin 2\varphi + \alpha(r) \cos 2\varphi)$ ;  $k, c$  konst. Das sind Lösungen, wenn  $\sqrt{\Sigma} = (\sqrt{1 + \Sigma^2 (k^2 c^2 + \alpha^2)})'$  ist und die Randbedingungen  $\alpha(r_i) - \Sigma^{-1} (\sqrt{\dots} - \varrho_i) = 0$  erfüllt sind [ $\Sigma = (1 + r^2)^2 / 4r^2$ ]. Die Untersuchung der Randbedingungen führt zur Unterscheidung der Fälle  $r_1 r_2 = 1$  und  $r_1 r_2 \neq 1$ , d. h. daß die parallelen Ebenen gleiche oder verschiedene Abstände vom Kugelmittelpunkt haben. Im ersten Fall wird die Existenz von Biegeflächen für  $\varrho_1 = \varrho_2$  bejaht, im zweiten erweist sie sich vom Vorzeichen einer gewissen Linearkombination von  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  abhängig. Die erzielten Ergebnisse stehen scheinbar im Widerspruch zu Resultaten von Grottemeyer und dem Ref.; Verf. wird nach mündlicher Mitteilung die Verhältnisse in einer späteren Note aufklären. *E. Rembs.*

**Aleksandrov, A. D. und E. P. Seĭkin:** Über die Unverbiegbarkeit der konvexen Flächen. Vestnik Leningradsk. Univ. 10, Nr. 8 (Ser. mat. fiz. chim. Nr. 3), 3—13 (1955) [Russisch].

$F_1, F_2$  seien isometrische Flächen positiver Krümmung mit Rand,  $O_1, O_2$  Punkte, von denen  $F_1$  bzw.  $F_2$  ganz 1. von innen, 2. von außen sichtbar sind. Die Entfernungen der Punkte  $O_1, O_2$  von den Flächenpunkten heißen  $r_1, r_2$ . Am Rande sei überall  $r_1 = r_2$ . Die Flächen sind kongruent, wenn im 1. Fall solche Ebenen durch  $O_1, O_2$  existieren, daß die Flächen ganz auf der einen Seite von ihnen liegen, bzw. im 2. Fall wenn von  $O_1, O_2$  ausgehende Strahlen existieren, die sowohl mit allen Strahlen  $O_i X_i$  als mit den inneren Normalen spitze Winkel bilden. Der Beweis zerfällt in einen geometrischen und einen analytischen Teil. Im geometrischen Teil wird folgendes gezeigt. Der Punkt  $O_2$  kann so verschoben werden, daß für die geänderten Entfernungen  $r_1, r'_2$  gilt: In einer abgeschlossenen Menge bei der Isometrie entsprechender Punkte ist  $r_1 - r'_2 = 0$ , sonst überall  $< 0$ . Indem man annimmt, daß  $O_1, O'_2$  zusammenfallen (wir lassen die Striche wieder weg), macht man den Punkt zum Nullpunkt des Koordinatensystems. Dann müssen  $r_1, r_2$  Lösungen derselben Monge-Ampèreschen Gleichung sein, die  $\Phi = 0$  laute. Es gilt aber der Satz, daß die Differenz zweier Lösungen dieser Gleichung, die irgendwo verschwindet, das Vorzeichen wechseln muß. Aus dem Widerspruch folgt die Kongruenz, da überall  $r_1 - r_2 = 0$  gilt. — Die Kongruenz geschlossener konvexer isometrischer Flächen resultiert als Spezialfall. — Auch ein Starrheitssatz wird bewiesen für eine Fläche, die der Ebenenbedingung genügt, wenn am Rande  $r$  stationär sein soll, gleichviel ob sie von außen oder innen erscheint. In der geometrischen Überlegung spielt hier eine zugefügte infinitesimale Verschiebung dieselbe Rolle, wie oben die Verschiebung des Punktes  $O_2$ , und der Widerspruch folgt aus der Betrachtung der variierten Gleichung  $\delta \Phi = 0$  für  $\delta r$ . — Verallgemeinerungen in verschiedenen Richtungen werden angedeutet. *E. Rembs.*

**Gohier, Simone:** Sur les calottes convexes tangentes tout le long de leur bord à une sphère. C. r. Acad. Sci., Paris 241, 154—156 (1955).

Zwei isometrische konvexe Kalotten mit der im Titel genannten Eigenschaft sind kongruent oder symmetrisch. Das war bisher nur unter einer einschränkenden Voraussetzung bewiesen (vgl. S. Gohier, dies. Zbl. 55, 154). Die Voraussetzung ist überflüssig. Zunächst wird nämlich gezeigt, daß die Kugeln, die die beiden Randstreifen der isometrischen Kalotten tragen, notwendig gleiche Halbmesser haben müssen. Da die Kalotten dann beide durch kongruente Kugelkalotten zu isometrischen geschlossenen konvexen Flächen ergänzt werden, die nach Pogorelow kongruent oder symmetrisch sind, folgt die Kongruenz oder Symmetrie auch für die einander entsprechenden Teile, insbesondere die Ausgangsflächen. *E. Rembs.*

**Rembs, Eduard:** Verbiegbarkeit konvexer Kalotten mit zylindrischen und konischen Randstreifen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1954, 315—320 (1955).

In verschiedenen Arbeiten (dies. Zbl. 47, 151; 50, 380; 52, 172; 55, 154) ist die infinitesimale und endliche Unverbiegbarkeit von einfach zusammenhängenden Kalotten mit zylindrischen oder konischen Randstreifen behandelt worden. Dabei wird verlangt, daß die Randstreifen bei der Verbiegung zylindrisch oder konisch bleiben. In der vorliegenden Arbeit wird zum ersten Male bewiesen, daß zwei einfach zusammenhängende, isometrische, konvexe Kalotten mit konischen Randstreifen kongruent oder symmetrisch sind. Ferner werden auch die drei anderen anfangs erwähnten Starrheits- bzw. Kongruenzsätze erneut bewiesen. Verf. wendet die bei Starrheits- bzw. Kongruenzbeweisen üblichen Integralformeln an. Der Nachweis, daß die auftretenden Randintegrale verschwinden, gelingt dem Verf. in einfacher Weise unter Benutzung eines Hilfssatzes: Denkt man sich die Kegel, auf denen die beiden Randstreifen der zwei isometrischen Kalotten liegen, in die Ebene abgewickelt, so wird bewiesen, daß die „Sektorgebiete“, die jeweils von zwei Mantellinien der Kegel und den abgewickelten Randkurven berandet werden, kongruent sind. Nach geeigneter Lage des Nullpunktes des Koordinatensystems läßt sich aus diesem Hilfssatz sofort das Verschwinden des Integranden des Randintegrals ablesen, woraus dann in bekannter Weise die Kongruenz oder Symmetrie der Flächen folgt. Der genannte Hilfssatz führt auch bei infinitesimalen Verbiegungen konvexer Kalotten mit konischen Randstreifen zum Ziel. Im zylindrischen Fall läßt sich ein analoger Hilfssatz beweisen, woraus ebenfalls sehr schnell die Kongruenz oder infinitesimale Starrheit folgt. Übrigens kann der genannte Hilfssatz ganz im Rahmen der Streifentheorie so ausgesprochen werden: Von einem konischen, geschlossenen Streifen erhält man alle möglichen Verbiegungen, bei denen der Streifen konisch bleibt, dadurch, daß man den Streifen fest mit dem Kegel, auf dem er liegt, verbunden denkt und alle Kegelverbiegungen betrachtet. Unter Verwendung des oben genannten Kongruenzsatzes kann man also sagen: Eine geschlossene, konvexe Fläche, die aus einer Eifläche durch Aufsetzen einer Kegelkappe entstanden ist, läßt sich weder endlich noch infinitesimal verbiegen. *K. P. Grottemeyer.*

**Sauer, R.:** Elementargeometrische Modelle zur Differentialgeometrie. III. Elemente Math. 10, 25—32 (1955).

(Teil II, dies. Zbl. 64, 159). Einen wichtigen Sonderfall der vorher behandelten ebeneckigen Vierecksgitter stellen die „ebeneckigen Tschebyscheff-Gitter“ dar, die durch konstante Seitenlängen  $s'$ ,  $s''$  der beiden Leitpolygonscharen gekennzeichnet sind. Die Gittermaschen sind demnach „windschiefe Parallelogramme“ mit den Seiten  $s'$ ,  $s''$ . Beim Fortschreiten längs eines Leitpolygons dreht sich die Knotenebene (die voraussetzungsgemäß die vier von einem Knotenpunkt ausgehenden Gitterstrecken enthält) bei jedem Schritt um denselben Winkel  $\kappa'$  bzw.  $\kappa''$  weiter, wobei nach einer Formel von G. T. Bennett die Beziehung  $(\sin \kappa')/s' = -(\sin \kappa'')/s''$  gilt. Das sphärische Bild des Gitters ist mithin ein aus Großkreisbögen der Längen  $\kappa'$  und  $\kappa''$  bestehendes Tschebyscheff-Gitter auf der Bildkugel. Ein geeigneter Grenzübergang, bei welchem die Größen  $s'$ ,  $s''$ ,  $\kappa'$  und  $\kappa''$  mit gleicher Ordnung gegen Null streben, führt dann zu den Flächen konstanter negativer Krümmung, wobei aus den Leitpolygonen die Asymptotenlinien werden. Dieselben weisen konstante Windungen  $\tau' = \lim (\kappa'/s')$  und  $\tau'' = \lim (\kappa''/s'') = -\tau'$  auf und bilden, ebenso wie ihre sphärischen Bilder, ein Tschebyscheffsches Kurvennetz. Auf diese Weise können zahlreiche Eigenschaften der pseudosphärischen Flächen anschaulich erfaßt werden; insbesondere ergeben sich ihre sogenannten Lieschen Transformationen über die Betrachtung der Verknüchtungen eines jener scheinwinkelgleichen ebenmaschigen Vierecksgitter, die dem Ausgangsgitter parallel-reziprok zugeordnet sind. — Abschließend geht der Bericht auf solche Streifen-



modelle von Drehflächen ein, die sich ergeben, wenn der Drehflächenmeridian durch ein Polygon ersetzt wird. Verbiegt man eine der Kegelzonen des aufgeschnittenen Modells auf einen neuen Drehkegel oder auf eine Schraubtorse, so folgen die übrigen Zonen zwangsläufig nach und man erhält das Streifenmodell einer neuen Dreh- bzw. Schraubfläche. Hierin ist das differenzengeometrische Analogon der ein- bzw. zweiparametrischen Verbiegungsmöglichkeiten einer Drehfläche zu neuen Dreh- bzw. Schraubflächen zu erblicken (Boursches Theorem der Differentialgeometrie). Betrachtung der geodätischen Linienzüge auf den Streifenmodellen führt zu einer einfachen Deutung der bekannten Formeln von Clairaut. Bemerkenswert ist jenes spezielle Streifenmodell, dessen verebnete Kegelzonen ein und demselben Kreisring entstammen, da es als Modell der Pseudosphäre anzusehen ist.

W. Wunderlich.

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Lemoine, Simone: Réductibilité de variétés riemanniennes complètes dans l'espace euclidien. C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 1962—1964 (1955).

On dit qu'une variété riemannienne  $V$  est localement réductible si le groupe d'holonomie homogène de  $V$  est réductible;  $V$  se décompose alors localement en un produit riemannien. L'A. étudie ici le cas particulier d'une sous-variété  $V_{n-1}$  à  $n-1$  dimensions de l'espace euclidien  $R^n$ , munie de la métrique induite, et esquisse les démonstrations des deux résultats suivants: (a) Si  $V_{n-1}$  est localement réductible, alors sa métrique est somme d'une métrique irréductible est d'une métrique euclidienne. (b) Si de plus  $V_{n-1}$  est complète, alors  $V_{n-1}$  est globalement le produit d'un espace euclidien  $R^p$  par une variété à  $p-1$  dimensions irréductible et complète plongée dans un plan à  $p$  dimensions. Elle parvient au premier résultat principalement par considération de la deuxième forme quadratique fondamentale de  $V_{n-1}$  et au deuxième en s'appuyant sur un Mémoire de G. de Rham (ce Zbl. **48**, 157).

A. Borel.

Egorov, I. P.: Maximal bewegliche Riemannsche Räume  $V_4$  von nicht-konstanter Krümmung. Doklady Akad. Nauk SSSR **103**, 9—12 (1955) [Russisch].

Suivant un résultat de l'A. un espace irréductible (d'Einstein) et qui n'est pas à courbure constante possède au plus un groupe de mouvement à  $n(n-1)/2 + 2$  paramètres. Le Ref. a montré que ce maximum peut être atteint seulement pour  $n=4$ , par certains espaces symétriques  $V_4$ . L'A. montre ici comment on peut déterminer la métrique de ces espaces  $V_4$  ayant un groupe  $G_8$  de mouvement. Pour arriver au groupe  $G_8$  l'A. part du groupe de stabilité  $G_4$  orthogonal défini par les transformations infinitésimales

$$Y_1 = X_{12} + X_{34}, \quad Y_2 = X_{12} - X_{34}, \quad Y_3 = X_{13} + X_{24}, \quad X_4 = X_{14} - X_{23}$$

( $X_{ij} = x^i \partial f / \partial x^j - x^j \partial f / \partial x^i$ ) et on lui associe quatre autres transformations infinitésimales  $X_i = \partial f / \partial x^i + \mu_i^s \partial f / \partial x^s$  où  $\mu_i^s$  sont au moins du premier ordre dans l'origine, de façon que  $G_8(X_i, Y_i)$  soit transitif. On trouve que  $\mu_i^s$  sont du second ordre dans l'origine et l'on détermine la métrique de  $V_4$  sous la forme

$$ds^2 = (dx^i)^2 / \varrho^2 - [(x^1 dx^i)^2 + (x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + x^3 dx^4 - x^4 dx^3)^2] / \varrho^4$$

où  $\varrho^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^4)^2 + K$ . On montre ensuite que les espaces  $V_4$  sont des espaces projectifs complexes. Des résultats analogues ont été obtenus par le Ref. qui a donné aussi une autre forme de la métrique de l'espace  $V_4$ . On obtient une ou l'autre de ces deux formes suivant que l'on considère la projection centrale ou la projection stéréographique d'une sphère  $S_2$ , qu'on peut associer au problème.

G. Vranceanu.

Kurita, Minoru: On conformal Riemann spaces. J. math. Soc. Japan **7**, 13—31 (1955).

Bei der konformen Abbildung einer  $V_n$  (Riemannscher Raum) auf eine andere  $V_n$  ist bekanntlich  $'g_{\lambda\kappa} = \sigma g_{\lambda\kappa}$ ;  $'K_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa} + g_{[\nu[\lambda} s_{\mu]\sigma]} g^{\sigma\kappa}$ ;  $s_{\mu\lambda} = 2\nabla_{\mu} s_{\lambda} - s_{\mu} s_{\lambda} +$

$\frac{1}{2} g_{\mu\lambda} s_\sigma s^\sigma$ ;  $s_\lambda = \partial_\lambda \log \sigma$ , und diese Transformation ist konzirkular, wenn  $s_{\mu\lambda} :: g_{\mu\lambda}$ . Fialkow (dies. Zbl. **21**, 65) und Yano [dies. Zbl. **24**, 81, 184; Proc. Imp. Acad. Japan **18**, 446—451 (1941)] haben bewiesen, daß eine  $V_n$  dann und nur dann eine konzirkulare Transformation zuläßt, wenn es zumindest eine geodätische Kongruenz gibt, die zu einem Normalsystem von umbilikalen  $V_{n-1}$  orthogonal ist. Ein kürzerer Beweis, der dem Verf. aber noch nicht bekannt sein konnte, findet sich in J. A. Schouten, Ricci-Calculus, 2. Aufl. (Berlin 1954). Der hier gegebene Beweis ist ziemlich umständlich, was aber nur daran liegt, daß die verwendete Methode der alternierenden Differentialformen für Untersuchungen dieser Art, wo es sich gerade um nicht alternierende Größen handelt, weniger geeignet ist. Die auch schon von Yano behandelten Fälle der Einsteinschen  $V_n$  und der  $S_n$  werden erörtert. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den konformeuklidischen  $V_n$ ,  $n \geq 4$ , die von der Klasse 1 sind, d. h. die sich in eine  $R_{n+1}$  einbetten lassen. Es wird bewiesen, daß bei einer solchen  $V_n$  unter den Hauptwerten von  $s_{\mu\lambda}$  höchstens zwei verschiedene vorkommen können [Schouten, Math. Z. **11**, 58—88 (1921)], und daß das gleiche gilt für die Hauptkrümmungen bei der Einbettung. Ferner wird noch folgendes bewiesen: Gibt es unter den Hauptkrümmungen einer  $V_n$ ,  $n \geq 3$ , in  $R_{n+1}$  nur zwei verschiedene, so ist die  $V_n$  konformeuklidisch, und es gilt die Umkehrung. Ist außerdem keine der Hauptkrümmungen Null, so ist sie Einhüllende einer einparametrischen Schar von Hyperkugeln. Ist eine  $V_n$  konformeuklidisch, sind die Hauptwerte von  $s_{\mu\lambda}$  alle bis auf einen gleich  $p$ , und ist  $p$  nicht größer als eine mittels  $s_\lambda s^\lambda$  festgelegte Zahl, so ist die  $V_n$  von der Klasse 1. Es werden noch n. u. h. Bedingungen abgeleitet dafür, daß eine konformeuklidische  $V_n$  von der Klasse 1 ist.

J. A. Schouten.

Vasil'eva, M. V.: Geometrie eines Integrals. Mat. Sbornik, n. Ser. **36(78)**, 57—92 (1955) [Russisch].

Das Hauptziel der Arbeit ist, die geometrischen Begriffe und Objekte zu konstruieren, die mit dem Integral  $\iint F(x, y, z, p, q) dx dy$  unter der unendlichen Gruppe von Punkttransformationen invariant verknüpft sind. Verf. knüpft an an eine Idee von E. Cartan (Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, dies. Zbl. **8**, 272), und an deren Weiterentwicklung durch V. V. Vagner (dies. Zbl. **41**, 501) (Idee des Cartanschen Raumes). Dabei benutzt Verf. die invariante Methode von G. F. Laptev [Trudy Moskovsk. mat. Obsč. **2**, 275—382 (1953)], der der Kalkül der äußeren Differentialformen von E. Cartan und die Darstellungstheorie von unendlichen Gruppen zugrunde liegt und die darin besteht, eine Fundamentalfolge von geometrischen Objekten herzustellen. Die geometrischen Objekte erster, zweiter und dritter Ordnung werden ausgerechnet und im Riemannschen Fall angewendet. Die geometrische Bedeutung dieser Objekte und die Theorie von Kurven, Flächen und Kurvenkongruenzen werden dargelegt. Am Schluß werden die Ergebnisse für den Fall eines invarianten  $m$ -fachen Integrals in einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit kurz angegeben. Es scheint dem Ref., daß der Verf. keine Kenntnis der Theorie der arealen Räume des Ref. [dies. Zbl. **44**, 371, 372; **45**, 436; **49**, 236; Tensor, n. Ser. **3**, 40—45 (1953)] hatte.

A. Kawaguchi.

Belgodère, Paul: Sur les surfaces minima en géométrie de Minkowski. C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 1504—1505 (1955).

Etudiant le problème des extrémales de l'intégrale  $I = \int g(x, y, z, p, q) dx dy$ , l'A. avait introduit en chaque point  $M$  une indicatrice des aires  $T(M)$ , d'abord dans le cas (minkowskien) où  $g$  ne dépend que de  $p$  et  $q$  [C. r. Acad. Sci., Paris **219**, 272—273 (1944)], puis dans le cas (finslérien) général (ce Zbl. **29**, 217), défini au moyen de celle-ci un „vecteur  $\overrightarrow{MN}$  unitaire normal“ à un élément de contact  $(M, \pi)$  et interprété l'intégrale  $I$  comme flux de  $\overrightarrow{MN}$ . Dans la présente note sont énoncés sans démonstration pour l'espace minkowskien  $EM_n$  à  $n$  dimensions les résultats suivants:

L'isopérimétrice de H. Busemann (ce Zbl. 37, 245; 40, 375) de centre  $M$  est identique à  $T(M)$ . Grâce à la convexité de l'indicatrice des aires l'annulation de  $\text{div } \vec{MN}$  sur une surface  $S$  implique un minimum effectif. Les hypothèses de dérivabilité concernant l'indicatrice  $I$  de  $EM_n$  et les surfaces  $S$  ne sont pas précisées. La définition de l'indicatrice des aires pour  $n = 3$  exige l'existence de  $g'_p$  et  $g'_q$ . L'A. signale que sa méthode ne recourt pas à une métrique euclidienne auxiliaire. A ce propos le rapporteur mentionne l'article de W. Barthel (ce Zbl. 51, 396) qui a cherché, sans y parvenir alors complètement, à libérer la théorie de H. Busemann de la métrique euclidienne auxiliaire; le même auteur y est parvenu dans un article qui doit paraître prochainement.

*Chr. Pauc.*

### Topologie :

**Bruns, Günter und Jürgen Schmidt:** Zur Äquivalenz von Moore-Smith-Folgen und Filtern. Math. Nachr. 13, 169—186 (1955).

Moore-Smith-Folge oder quasi-gerichtete Familie ist jede indizierte Menge  $\varphi = \{a_i; i \in J\}$ , deren Indexmenge  $J$  quasi-gerichtet, d. h. reflexiv-transitiv ist, wobei jede endliche Teilmenge eine obere Schranke besitzt. Die „Reste“  $\{a_i; i \geq j\}$ ,  $j \in J$ , bilden eine Filterbasis; der zugehörige Filter wird mit  $\tilde{\varphi}$  bezeichnet, und  $\varphi$  heißt eine „Darstellung“ von  $\tilde{\varphi}$ . Zu gegebener Filterbasis  $\mathfrak{B}$  gibt es eine gerichtete (= antisymmetrisch, quasigerichtete) Familie  $\varphi$  derart, daß  $\mathfrak{B}$  gerade mit dem System ihrer Reste übereinstimmt. Zu jeder Menge von Filtern gibt es Darstellungen dieser Filter mit einheitlicher Indexmenge. Ist  $\mathfrak{B}$  Basis eines Filters  $\tilde{\gamma}$  und  $\varphi|_{\mathfrak{B}}$  eine „Auswahl“ von  $\mathfrak{B}$ , d. h.  $\varphi(B) \in B$  für  $B \in \mathfrak{B}$ , so heißt  $\tilde{\varphi}$  ein „Auswahlfilter“ von  $\tilde{\gamma}$ . Der Birkhoffsche Äquivalenzsatz (dies. Zbl. 16, 85, p. 45 der ersten Arbeit) erhält hier die Form: Jeder Filter  $\tilde{\gamma}$  ist Durchschnitt aller seiner Auswahlfilter. Die Ultrafilter sind gerade jene Filter, welche außer sich selbst keine weiteren Auswahlfilter besitzen. Die sonstigen Ergebnisse beziehen sich auf eineindeutige Darstellungen  $\varphi$  eines Filters; u. a. wird ein Beispiel eines „unverzweigten“ (d. h. nicht total-geordneten) eineindeutig darstellbaren Filters gegeben. *G. Aumann.*

**Banaschewski, Bernhard:** Über den Ultrafilterraum. Math. Nachr. 13, 273—281 (1955).

Die Menge  $\Omega$  aller Ultrafilter auf einer Menge  $E$  mit unendlicher Mächtigkeit  $|E|$  wird zum Ultrafilterraum, wenn man die Mengen  $\Omega_{\mathfrak{A}}$  (= Menge aller Ultrafilter  $\mathfrak{U} \supseteq \mathfrak{A}$ ),  $\mathfrak{A}$  ein Filter auf  $E$ , als abgeschlossen erklärt. Vorliegende Arbeit — welche einen Abschnitt aus des Verf. Dissertation (Univ. Hamburg 1953) wiedergibt — untersucht die Gruppe  $G$  der topologischen Selbstabbildungen von  $\Omega$ . Diese Gruppe, die Gruppe  $F$  der Ordnungsautomorphismen der geordneten Menge aller Filter auf  $E$ , sowie die volle Permutationsgruppe  $P$  von  $E$  sind 1-1-deutig und in natürlicher Weise aufeinander beziehbar. Die Transitivitätsgebiete von  $\Omega$  bezüglich  $G$  sind gerade die Klassen ordnungsisomorpher Ultrafilter. Von den Filtern  $\{E\}$  und  $\mathfrak{P}E$  abgesehen, sind die invarianten Filter  $\{\mathfrak{A} \text{ heißt invariant, wenn } f(X) \in \mathfrak{A} \text{ für jedes } X \in \mathfrak{A} \text{ und jedes } f \in P\}$  genau jene Mengensysteme  $\mathfrak{F}(\alpha)$  auf  $E$ , die zu gegebener unendlicher Kardinalzahl  $\alpha$  ( $\leq |E|$ ) aus allen Mengen  $M$  bestehen mit  $|C M| < \alpha$ . Die übrigen Ergebnisse beziehen sich auf Mächtigkeitsfragen und knüpfen teilweise an Arbeiten von B. Pospíšil (dies. Zbl. 17, 429; 22, 173) an. U. a. ergibt sich, daß es auf einer Menge mit  $n$  Punkten genau  $2^{2^n}$  verschiedene Klassen ordnungsisomorpher Mengensysteme gibt.

*G. Aumann.*

**Hönig, Chaim Samuel:** Sur les topologies semi-régulières. Anais Acad. Brasil. Ci. 27, 1—6 (1955).

Let  $E$  be a set and  $T$  a topology on  $E$ . Let  $A$  be a family of subsets of  $E$  closed under the formation of finite unions and arbitrary intersections, every element of which has void interior under the topology  $T$ . Let  $T_A$  be the topology on  $E$  obtained



by adjoining  $\mathcal{A}$  to the family of sets closed under  $T$ . Let  $\{T\}$  denote the family of all such topologies  $T_{\mathcal{A}}$  on  $E$ . The author announces without proof a number of theorems, some about topologies  $T_{\mathcal{A}}$  and others proved by their use. He points out that a number of his results are either not new or simple extensions of known facts. The following are typical of his new results. 1. A minimal Hausdorff topology is semi-regular. (That is, open sets  $G$  for which  $G = G^{-\prime-\prime}$  are a basis for open sets.) 2. If  $T$  is semi-regular, then  $\{T\}$  is the class of all topologies on  $E$  for which the associated semi-regular topology is  $T$ . 3. A Hausdorff topology is absolutely closed if and only if the associated semi-regular topology is minimal and Hausdorff. 4. A topology is extremally disconnected (that is, it is Hausdorff and the closure of every open set is open) if and only if it has the form  $T_{\mathcal{A}}$ , where  $T$  is extremally disconnected and completely regular. (Reviewer's note. The author has changed the original definition of extremal disconnectivity [Duke math. J. 19, 309–333 (1943)].) 5. For an arbitrary  $T$ , the maximal elements of  $\{T\}$  admit no pairs of complementary dense subsets. E. Hewitt.

**Michael, Ernest:** Point-infinite and locally finite coverings. Canadian J. Math. 7, 275–279 (1955).

A covering  $\mathfrak{M}$  of a space  $X$  is called point-finite or locally finite according as every point of  $X$  is contained in only finitely many elements of  $\mathfrak{M}$  or every point has a neighbourhood which intersects only finitely many elements of  $\mathfrak{M}$ . The reviewer proved (this Zbl. 41, 97) that every countable, point-finite open covering of a normal space has a locally finite refinement. The author proves in this paper that every point-finite open covering of a collectionwise normal space has a locally finite refinement. Furthermore he gives two examples: the first shows that there exists a normal space, every point-finite open covering of which has a locally finite refinement, but which is not collectionwise normal; and the second shows that there exists a normal space, not every point-finite open covering of which has a locally finite refinement. [The reviewer's note: K. Nagami has also proved the above theorem (cf. the succeeding review) and used the space of the first example above for the same purpose (cf. his forthcoming paper).] K. Morita.

**Nagami, Keiô:** Paracompactness and strong screenability. Nagoya math. J. 8, 83–88 (1955).

R. H. Bing a introduit la propriété suivante („strong screenability“) pour un espace topologique  $R$ : tout recouvrement ouvert de  $R$  admet un recouvrement plus fin, réunion d'une suite de familles d'ensembles ouverts  $\mathfrak{R}_n = (H_\alpha)_{\alpha \in A_n}$  telles que deux  $\bar{H}_\alpha$  d'indices distincts soient sans point commun et que toute réunion d'ensembles  $\bar{H}_\alpha$  ( $\alpha$  parcourant une partie quelconque de  $A_n$ ) soit fermée. E. Michael a démontré (ce Zbl. 52, 187) que pour un espace régulier, cette propriété équivaut à la paracompacité. L'A. obtient indépendamment ce même théorème. J. Dieudonné.

**Nagami, Keiô:** On the dimension of paracompact Hausdorff spaces. Nagoya math. J. 8, 69–70 (1955).

Utilisant son résultat sur la propriété de „strong screenability“ des espaces paracompacts (voir le précédent compte-rendu) l'A. étend aux espaces paracompacts quelques théorèmes classiques sur la notion de dimension. J. Dieudonné.

**Nagami, Kaio:** Alexandroff's mapping theorem for paracompact spaces. Kodai math. Sem. Reports 7, 21–22 (1955).

Etendant un résultat de C. Dowker (ce Zbl. 34, 256) l'A. caractérise les espaces paracompacts comme les espaces  $R$  ayant la propriété suivante: pour tout recouvrement ouvert  $\mathfrak{R}$  de  $R$ , il y a un complexe simplicial  $K$ , dans lequel l'étoile  $S(p)$  de tout point  $p$  est de dimension finie, et une application  $f$  de  $R$  dans  $K$ , continue pour la topologie faible (au sens de J. H. C. Whitehead) sur  $K$  tel que, lorsque  $p$  parcourt l'ensemble des sommets de  $K$ , les ensembles  $f^{-1}(S(p))$  forment un recouvrement plus fin que  $\mathfrak{R}$ . J. Dieudonné.

**Iséki, Kiyoshi:** On a conjecture of K. Nagami. Proc. Japan Acad. 31, 430 (1955).

L'A. remarque que la compactification d'Alexandroff d'un espace discret non dénombrable est un espace non parfaitement normal, mais dans lequel tout sous-espace est paracompact. *J. Dieudonné.*

**Banaschewski, Bernhard:** Abstufungen des Kompaktheitsbegriffes. Arch. der Math. 6, 320—329 (1955).

Eine Reihe von Modifikationen des Kompaktheitsbegriffes und deren Beziehungen zueinander werden betrachtet. Insbesondere wird gezeigt, daß das Analogon zum Tychonoffschen Produktsatz für kompakte Räume für einige hier in Betracht kommende Räume nicht zutrifft, was bei den abzählbar kompakten Räumen bekannt ist (Ref., dies. Zbl. 47, 418; Novak, dies. Zbl. 53, 124). Die kleinste Kardinalzahl  $\mathfrak{k}$  der Elemente eines Filters  $\mathfrak{A}$  heiße Typ von  $\mathfrak{A}$ . Die kleinste Anzahl  $\mathfrak{f}$  von Elementen eines Filters, die eine Basis bilden, heiße Charakter des Filters. Ein Filter  $\mathfrak{A}$  vom Charakter  $\mathfrak{k}$  heiße  $\mathfrak{k}$ -regulär, wenn für jedes  $m < \mathfrak{k}$  je  $m$  Elemente aus  $\mathfrak{A}$  nicht leeren Durchschnitt haben in bezug auf  $\mathfrak{A}$ . Gezeigt wird die Äquivalenz folgender Forderungen bei regulärer Mächtigkeit  $\mathfrak{f}$ .  $A_1$ : Jede offene Überdeckung von  $E$  aus  $\mathfrak{f}$  Mengen enthält eine aus weniger als  $\mathfrak{f}$  Mengen.  $B_1$ : Jeder  $\mathfrak{k}$ -reguläre Filter hat Berührungspunkte.  $C_1$ : Jede Teilmenge von  $E$  aus  $\mathfrak{f}$  Punkten hat vollständige Häufungspunkte.  $C'_1$ : Auf jeder Teilmenge  $A$  von  $E$  aus  $\mathfrak{f}$  Punkten gibt es einen (in  $E$ ) konvergenten Ultrafilter vom Typ  $\mathfrak{k}$ .  $C''_1$ : Bei jeder Teilmenge  $A$  von  $E$  aus  $\mathfrak{f}$  Punkten hat der obere charakteristische Filter von  $A$  Berührungspunkte in  $E$ . (Der obere charakteristische Filter von  $A$  ist der Filter, gebildet aus den Mengen  $M$  mit  $|A - M| < |A|$ ). Räume mit diesen Eigenschaften heißen  $\mathfrak{f}$ -kompakt. Ein Raum  $E$  heiße ferner stark  $\mathfrak{f}$ -kompakt, wenn  $D_1$ : jede Menge  $A \subseteq E$  aus  $\mathfrak{f}$  Punkten eine Teilmenge  $B$  aus  $\mathfrak{f}$  Punkten besitzt, die gegen einen Punkt strömt. [ $A$  strömt gegen  $a$ , wenn  $|A - V \cap A| < |V \cap A|$  bei allen  $V \in \mathfrak{B}(a)$ , vgl. Alexandroff, Math. Ann. 92, 267—274 (1934).] Ein Raum  $E$  heiße schwach  $\mathfrak{f}$ -kompakt, wenn  $E_1$  gilt: jede Teilmenge  $A$  von  $E$  aus  $\mathfrak{f}$  Punkten hat Häufungspunkte. Stark  $\mathfrak{f}$ -kompakte Räume sind  $\mathfrak{f}$ -kompakt und  $\mathfrak{f}$ -kompakte Räume sind wieder schwach  $\mathfrak{f}$ -kompakt, aber nicht umgekehrt. Jede  $\mathfrak{f}$ -Kompaktheit bleibt bei allen stetigen Abbildungen erhalten. Aber sowohl für stark  $\mathfrak{f}$ -kompakte Räume als auch für  $\mathfrak{f}$ -kompakte und schwach  $\mathfrak{f}$ -kompakte Räume ist der Produktsatz im allgemeinen falsch. Schließlich heiße ein Raum  $E$   $\mathfrak{f}$ -ultrakompakt, wenn  $F_1$  gilt: jeder Ultrafilter auf  $E$  vom Typ  $\mathfrak{k}$  konvergiert. Das Produkt zweier Räume der Mächtigkeit  $\mathfrak{f}$  ist nur dann  $\mathfrak{f}$ -ultrakompakt, wenn sie beide kompakt sind. Zusammen mit der Tatsache, daß es  $\mathfrak{f}$ -ultrakompakte Räume gibt, in denen kein Ultrafilter von kleinerem Typ als  $\mathfrak{k}$  konvergiert, ergibt sich daraus, daß der Produktsatz im allgemeinen falsch ist für  $\mathfrak{f}$ -ultrakompakte Räume. Dies widerlegt die Behauptung des Ref. (dies. Zbl., a. a. O.) Bei regulärem  $\mathfrak{k}$  ist aber das Produkt zweier  $\mathfrak{f}$ -ultrakompakter Räume stets  $\mathfrak{f}$ -kompakt. *H. Terasaka.*

**Borsuk, K.:** Sur la notion de diviseur et de multiple des transformations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 81—85 (1955).

Soit  $X_0$  un espace compact,  $Y_0$  un ANR compact,  $f, g \in Y_0^{X_0}$ .  $f$  est appelé diviseur de  $g$ , si pour chaque  $X$  compact,  $X \supset X_0$ , l'existence de prolongements de  $f$  appartenant à  $Y_0^X$  implique celle de prolongements de  $g$ . Pour que  $f$  soit diviseur de  $g$  il faut et il suffit qu'il existe un  $\psi \in Y_0^{X_0}$  telle que  $g$  soit homotope à  $\psi f$ . — Quelques conséquences de ce théorème. —  $g \in Y_0^{X_0}$  est appelé primitif, si „ $f$  diviseur de  $g$ “ implique „ $g$  diviseur de  $f$ “. Problèmes: Si  $X_0, Y_0$  sont des polytopes, existe-t-il des diviseurs primitifs pour chaque  $f \in Y_0^{X_0}$ ? Si  $X_0, Y_0$  sont des polytopes, est-il vrai que le nombre de classes d'homotopie d'ordre fini est fini?

*H. Freudenthal.*

**Borsuk, K.:** Sur la notion de dépendance des transformations continues. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 251—254 (1955).

Soit  $X_0$  un espace compact,  $Y_0$  un ANR compact. Pour  $f \in Y_0^{X_0}$  la classe d'homotopie de  $f$  est appelée  $(f)$ . Pour  $g \in Y_0^{X_0}$  et  $\Phi \subset Y_0^{X_0}$ ,  $g$  est appelé dépendant de  $\Phi$ , si pour chaque  $X$  compact,  $X \supset X_0$ , l'existence de prolongements des  $f \in \Phi$  appartenant à  $Y_0^X$  implique celle de prolongements de  $g$ . L'ensemble des  $f \in Y_0^{X_0}$  dépendant de  $\Phi$  est appelé  $\mathfrak{K}(\Phi)$ . D'une manière analogue on définit la dépendance en dimension  $m$  en soumettant  $X$  au postulat supplémentaire:  $\dim(X \setminus X_0) \leq m$ . L'ensemble des  $f \in Y_0^{X_0}$  dépendant de  $\Phi$  en dimension  $\mathfrak{K}$  s'appelle  $\mathfrak{K}_m(\Phi)$ . Problème: Est-ce que  $\mathfrak{K}(\Phi) = \mathfrak{K}_{m+1}(\Phi)$  pour  $m = \dim X_0$ ; Théorème:  $\dim X_0 = n$ ,  $Y_0 = n$ -sphère,  $n < m < 2n$ ,  $f_i (i = 1, \dots, k) \in Y_0^{X_0}$ . Alors  $\mathfrak{K}_m(f_1, \dots, f_k)$  est le sous-groupe du groupe de Hopf de  $X_0$  engendré par les  $(f_1), \dots, (f_k)$ . La démonstration dépend de la notion de système séparé:  $g_1, \dots, g_k \in Y_0^{X_0}$  sont séparés, si  $g_i^{-1}(Y_0 - (y_0))$  sont disjoints ( $y_0$  étant un point fixé).  $f_1, \dots, f_k \in Y_0^{X_0}$  sont appelés indépendantes si aucune d'elles ne dépend de l'ensemble des autres. La borne supérieure des puissances de tous les systèmes indépendants s'appelle  $J(X_0, Y_0)$ . Problème: Est-ce que  $J(X_0, Y_0)$  est fini pour des polytopes  $X_0, Y_0$ ?

H. Freudenthal.

**Tajmanov, A. D.:** Über Universalmengen. Mat. Sbornik, n. Ser. **37** (79), 117—120 (1955) [Russisch].

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **47**, 58) bewies Verf. folgenden Satz: Im 4-dimensionalen Raume  $R^4$  existiert eine lokalkompakte Menge  $U$ , so daß für jede lokalkompakte Menge  $M$  aus  $R^2$  eine Ebene  $P_{ab}$  ( $x = a$ ,  $y = b$ ) existiert mit der Eigenschaft, daß  $P_{ab} \cap U = M$ . Als Antwort auf eine Frage von L. V. Keldyš ( $n = 2$ ) bzw. von P. S. Alexandroff ( $n > 2$ ) beweist nun Verf. folgenden Satz: Im  $R^{n+1}$  gibt es eine lokalkompakte Menge  $U$  der Dimension  $n$  so, daß jeder lokalkompakten Menge  $M$  aus  $R^n$  eine Zahl  $a$  entspricht mit der Eigenschaft, daß  $M$  gleich dem Durchschnitt von  $U$  und der Hyperebene  $x = a$  ist. Dabei ist  $U$  von der Form  $(V - \bar{E}) \tilde{\mathfrak{A}}$ , wobei  $V$  die Vereinigungsmenge von einem System von Hyper-ebenen  $x = a$  ist, und  $\bar{E}$ ,  $\tilde{\mathfrak{A}}$  zwei abgeschlossene Mengen aus  $R^{n+1}$  sind, die universal für abgeschlossene Mengen aus  $R^n$  sind.

G. Kurepa.

**Banaschewski, Bernhard:** Über zwei Extremaleigenschaften topologischer Räume. Math. Nachr. **13**, 141—150 (1955).

L'A. dit d'un espace topologique  $E$  possédant une propriété  $\tau$  qu'il est  $\tau$ -complet, s'il n'existe aucun espace  $F \neq E$ ,  $F \supset E$  possédant la propriété  $\tau$  et sur lequel  $E$  soit partout dense.  $E$  sera dit  $\tau$ -minimal, si aucune topologie sur  $E$ , strictement moins fine que celle de  $E$  ne confère à  $E$  la propriété  $\tau$ . L'A. examine les cas où  $\tau$  est: séparation, semi-régularité (Il existe une base des ouverts formée d'ensembles égaux à l'intérieur de leur adhérence), régularité, dimension nulle, compacité locale, régularité complète, et démontre que dans tous ces cas: Tout espace  $\tau$ -minimal est aussi  $\tau$ -complet. La réciproque est vraie dans les cas précédents, à l'exclusion de la séparation et de la régularité. Enfin l'A. établit que l'ensemble, ordonné suivant la finesse, des topologies de dimension nulle (resp. complètement régulières) sur un ensemble  $E$  est tel que deux topologies comparables peuvent être reliées par une chaîne maximale bien ordonnée de topologies.

A. Revuz.

**Banaschewski, Bernhard:** Über nulldimensionale Räume. Math. Nachr. **13**, 129—140 (1955).

L'A. dit qu'une structure uniforme est non-archimédienne si la relation d'appartenance du couple  $(x, y)$  à un entourage symétrique est toujours une relation d'équivalence, et établit: La condition nécessaire et suffisante pour que la topologie d'un espace  $E$  dérive d'une structure uniforme non archimédienne est qu'elle soit de dimension zéro. Le complété  $\tilde{E}$  de  $E$  est alors la plus grande extension compacte de dimension zéro de  $E$  et  $\tilde{E}$  est le compactifié de Čech de  $E$  si, en outre,  $E$  est normal et de dimension nulle au sens de Čech. L'A. en déduit diverses conséquences relatives aux espaces métriques de dimensions zéro.

A. Revuz.



**Nagata, Jun-iti:** On complete metric space. J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., Ser. A **6**, 47—53 (1955).

Particularizing some of the results previously obtained by him about the uniform topology of a complete uniform space (see this Zbl. **48**, 409; **52**, 188) the author studies in this paper the case of metric spaces. He characterizes a uniform topology of such spaces by a lattice of uniform coverings, itself determined by a „directed set of uniform nbd functions in the extended meaning“. These nbd functions are functions defined on the metric space  $R$  and taking their values in the real number field. They satisfy two axioms: (I)  $f(x) \geq \varepsilon$  for some  $\varepsilon$ , where  $x \in R$ , and (II)  $f(x) \leq 1/2 n$  and  $d(x, y) \leq 1/2 n$ , where  $d(x, y)$  denotes the distance between  $x$  and  $y \in R$ , imply  $f(y) \leq 1/n$  for every positive integer. A directed set  $D(R)$  of such nbd functions and Cauchy sequences in  $D(R)$  are then defined. An equivalence relation between Cauchy sequences determines Cauchy filters, a family of subsets which serves to define a uniform topology. The main theorem is that two metric spaces  $R_1$  and  $R_2$  are uniformly homeomorphic if and only if  $D(R_1) \cong D(R_2)$ . A few results are derived from this theorem, in particular a new proof of a theorem previously proved by the author (loc. cit.). He shows also that  $D(R_1) \cong D(R_2)$  is a necessary and sufficient condition for the completions of  $R_1$  and  $R_2$  to be uniformly homeomorphic.

*C. Racine.*

**Bokštejn, M. F.:** Über die dimensionelle Dominante von Mengen. Mat. Sbornik, n. Ser. **36 (78)**, 311—334 (1955) [Russisch].

Bekanntlich heißt ein Kompaktum  $A$   $q$ -dimensional zum Modul  $m$ , wenn ein „wahrer“ Zyklus (unendliche Folge kombinatorischer Zyklen) in  $A$  existiert, der in  $A$ , aber nicht in seinem Träger mod  $m$  nullhomolog ist (P. Alexandroff, dies. Zbl. **4**, 73). Das Kompaktum heißt  $q$ -dimensional zur Dominante  $m$ , wenn dasselbe gilt mit beliebiger (variabler) Potenz von  $m$  (statt  $m$  selber). Dimensionsdominante von  $A$  ist die Menge der  $m$ , für die gilt: Dimension zur Dominante  $m$  = Dimension. Dimensionssubdominante ist die Menge der  $m$ , für die gilt: Dimension zum Modul  $m$  = Dimension. Ein Problem von P. Alexandroff verschärfend, fragt Verf., welche Zahlenmengen als Dominanten und Subdominanten zulässig sind. Nennt man Primdominante bzw. Primsubdominante die Menge der Primzahlen einer Dominante bzw. Subdominante, so gilt (für abgeschlossene Teilnengen euklidischer Räume): Jede nichtleere Primzahlenmenge kann als Primdominante und jede ihrer Teilnengen als Primsubdominante auftreten. Im Zusammenhang mit früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. **32**, 122, 123) ergibt das: Notwendig und hinreichend, damit eine nichtleere Menge ganzer Zahlen  $> 1$  als Dominante und eine Teilmenge dieser als Subdominante auftreten kann, ist, daß jede dieser Mengen mit irgendeiner Zahl alle ihre Vielfachen und mindestens einen Primeiler enthält. Die nötigen Beispiele sind dem Pontrjaginschen [C. r. Acad. Sci., Paris **190**, 1105—1107 (1930)] nachgebildet.

*H. Freudenthal.*

**Shirai, Tameharu:** Prolongation of the homeomorphic mapping. Proc. Japan Acad. **31**, 147—151 (1955).

Nach G. Choquet [C. r. Acad. Sci., Paris **219**, 542—544 (1944)] kann jeder Homöomorphismus zwischen zwei ebenen kompakten Untermengen eines  $E^3$  (3-dimensionaler euklidischer Raum) zu einem Homöomorphismus des ganzen  $E^3$  auf sich selber ergänzt werden. Verf. konstruiert hier das niederdimensionale Analogon, d. h. die Fortsetzung eines gegebenen Homöomorphismus  $f$  zwischen zwei linearen kompakten Untermengen  $F_1$  und  $F_2$  eines  $E^2$  zu einem solchen des  $E^2$  auf sich, direkt, unabhängig vom oben erwähnten Satz: Wären die  $F_i$  Jordanbögen, so könnte dies bekanntlich mit funktionentheoretischen Mitteln geschehen (korrespondierende Ränder konformer Abbildungen auf Einheitskreise und deren korrespondierende Radian). Es genügt also, die  $F_i$  in zwei mittels einer Erweiterung von  $f$  homöomorphe Jordanbögen  $J_i$  einzubetten. Für  $J_1$  nimmt man das abgeschlossene Intervall

zwischen den Enden von  $F_1$ . Der wesentliche Inhalt der Arbeit ist die Konstruktion von  $J_2 = J$  für zusammenhanglose  $F_i$ , wobei Verf. sich bemüht, das Auswahlaxiom zu vermeiden. Gibt es aber zusammenhängende Komponenten, so reduziert sich dieser Fall auf den vorigen, indem man zunächst nur deren Endpunkte betrachtet.

*D. Tamari.*

**Bing, R. H.:** Some monotone decompositions of a cube. *Ann. of Math.*, II. Ser. **62**, 279—288 (1955).

Let us denote by  $M = E^3 \cup S^2$  the solid sphere in a 3-space, and let  $f: M \rightarrow H$  be a continuous onto mapping, such that  $f|E^3$  is a homeomorphism, and  $f^{-1}(y)$  is connected for every  $y \in H$ . R. L. Moore has shown that  $f(S^2)$  is a cactoid, i. e. a continuous curve each of whose nondegenerate cyclic elements is homeomorphic to  $S^2$ . Floyd and Fort have proved (this Zbl. **53**, 126) that, if  $f(S^2)$  is homeomorphic to  $S^2$ , then  $H$  is homeomorphic to  $M$ . The author considers here the much deeper general case. Theorem 3:  $H$  is homeomorphic to a cactoid  $C$  in  $S^3$  plus one of its complementary domains:  $C$  has the same number of cyclic elements as  $f(S^2)$ . An interesting special case is (Theorem 1): If  $f(S^2)$  does not contain a simple closed curve,  $H$  is a 3-sphere. The proofs lean heavily upon the author's characterization of the 3-sphere by one of its decreasing sequences of regular partitionings. *I. Färy.*

**Burgess, C. E.:** Certain types of homogeneous continua. *Proc. Amer. math. Soc.* **6**, 348—350 (1955).

Supplementary results to a previous paper by the author (this Zbl. **57**, 151). *I. Färy.*

**Adams, J. F.:** A new proof of a theorem of W. H. Cockcroft. *J. London math. Soc.* **30**, 482—488 (1955).

Let  $K$  be a CW-complex formed by attaching a set of 2-cells,  $E$ , to the 1-skeleton of a connected two-dimensional CW-complex  $L$ . Let  $\pi_2(L) \neq 0$ ,  $\pi_2(K) = 0$ , and let  $P$  be the kernel of the natural map:  $\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(K)$ . The author extends a result of the reviewer (this Zbl. **55**, 419) by proving (a) that  $P$  made Abelian is free on  $\omega\varepsilon$  generators, where  $\omega$  is the order of  $\pi_1(K)$  and  $\varepsilon$  is the number of cells in  $E$ , and (b) that  $P$  has a non-trivial perfect subgroup. The proof of (a) is direct; that of (b) follows from an analysis of properties of incidence matrices associated with covering spaces of  $K$  (the analysis systematises devices of S. Eilenberg, this Zbl. **16**, 138).

*W. H. Cockcroft.*

**Mizuno, Katuhiko:** On factor set of the third obstruction. *Proc. Japan Acad.* **31**, 414—417 (1955).

Verf. betrachtet Abbildungen eines Polyeders  $K$  in einem topologischen Raum  $Y$  mit Homotopiegruppen  $\pi_i = \pi_i(Y) = 0$  für  $0 \leq i < n$ ,  $n < i < q$  und  $q < i < r < 2q - 1$ . Sei  $L$  ein Teilkomplex von  $K$  und  $f$  eine Abbildung  $K^n \cup L \rightarrow Y$  mit  $f(K^{n-1}) = y_0$ . Seien  $f_1, f_2: K^q \cup L \rightarrow Y$  zwei Erweiterungen von  $f$ , welche ihrerseits auf  $K^{q+1} \cup L$  erweiterbar sind. Dann wird ein Ausdruck für die Differenz der Obstruktionen  $z^{r+1}(f_1) - z^{r+1}(f_2)$  sowie für die dritte Obstruktion  $\{z^{r+1}(f)\}$  angegeben. In diesen Formeln werden neben den von Eilenberg-MacLane (dies. Zbl. **57**, 153) eingeführten Operationen  $y \vdash$  weitere ähnlich definierte Operationen verwendet, bei denen an Stelle der Eilenberg-MacLane-Komplexe  $K(\pi_n, n)$  die vom Verf. (dies. Zbl. **57**, 151) eingeführten allgemeineren Komplexe  $K(\pi_n, n, \pi_q, q, k)$  treten, an Stelle der Eilenberg-MacLane-Invarianten  $k$  die l. c. eingeführten Invarianten  $k_q^{r+1}$ , die jetzt mit  $k_{n,q}^{r+1}$  bezeichnet werden. Die ausführlichen Beweise der angeführten Sätze sollen demnächst erscheinen.

*E. Burger.*

**James, I. M.:** Reduced product spaces. *Ann. of Math.*, II. Ser. **62**, 170—197 (1955).

Consideration of the space of loops on a given space has played an important role in algebraic topology since Serre generalized the notion of fibre space and applied spectral homology technique to the computation of homotopy groups.

However, loop-spaces have the disadvantage of being very „large“ and not susceptible to the familiar combinatorial techniques. — In this paper the author removes this disadvantage, at least under fairly general conditions. More precisely, let  $A$  be a countable CW-complex with a single vertex,  $a^0$ , the base point. Such a complex is called special; and the author constructs a special complex  $A_\infty$  and a map  $\alpha$  of  $A_\infty$  into the space,  $\Omega$ , of loops on the suspension of  $A$  which induces homology and homotopy isomorphisms. Moreover,  $A$  is embedded in  $A_\infty$  and in  $\Omega$  and  $\alpha$  is the identity on  $A$ , so that  $\alpha$  induces isomorphisms of the homotopy sequence of the pair  $(A_\infty, A)$  onto that of the pair  $(\Omega, A)$  and of the singular homology sequence of the pair  $(A_\infty, A)$  onto that of the pair  $(\Omega, A)$ . The map  $\alpha$  is defined by means of a distance function,  $\varrho$ , at  $a^0$ , that is a map of  $A$  into the non-negative reals which is zero only at  $a^0$ . Such a  $\varrho$  may always be defined and the choice of  $\varrho$  does not affect the homotopy class of  $\alpha$  and therefore the induced isomorphisms. — We now give the construction of  $A_\infty$ . Let  $A_m$  be the set of sequences of at most  $m$  points of  $A - a^0$ ; the empty sequence is identified with  $a^0$ . Let  $A^m$  be the topological product of  $m$  copies of  $A$ . A point of  $A^m$  may be regarded as an infinite sequence  $(a_r)$ ,  $a_r \in A$ , with  $a_r = a^0$ ,  $r > m$ ; then a map  $p_m: A^m \rightarrow A_m$  is defined by associating with each sequence  $(a_r)$  the finite subsequence obtained by omitting the terms  $a^0$ , and  $A_m$  is given the identification topology induced by  $p_m$ . Let  $A_\infty = \bigcup_{m \geq 0} A_m$  be given the weak

(fine) topology:  $F \subseteq A_\infty$  is closed if and only if  $F \cap A_m$  is closed for all  $m$ . If  $(e_i)$  is the set of cells of  $A$ , then the cells of  $A_m$  are  $a^0$  together with product cells  $e_1 \times e_2 \times \dots \times e_r$ ,  $1 \leq r \leq m$ . Thus if  $A = S^n$ , an important example,  $A_m = a^0 \cup e^n \cup e^{2n} \cup \dots \cup e^{mn} = S^n \cup e^{2n} \cup \dots \cup e^{mn}$ , and  $A_\infty = S^n \cup e^{2n} \cup \dots \cup e^{mn} \cup \dots$ , and  $A_\infty$  has the singular homotopy type of  $\Omega(S^{n+1})$ . The homology of  $A_\infty$  is given as follows. Let the sequence of graded groups  $G^1, G^2, \dots, G^m, \dots$ , be given by

$$G^1 = \sum_{r=1}^{\infty} H_r(A), \quad G^m = G^1 \otimes G^{m-1} + G^1 * G^{m-1}. \quad \text{Then } \sum_{r=1}^{\infty} H_r(A_m) \cong \sum_{n=1}^m G^n,$$

$m = 1, 2, \dots, \infty$ . — Two further useful features of the reduced product complex  $A_\infty$  are mentioned by the author; first the filtration of  $A_\infty$  by the subcomplexes  $A_m$ , and, second, the presence of certain canonical extension properties. Clearly a map  $h: A, a^0 \rightarrow B, b^0$  induces maps  $h^m: A^m \rightarrow B^m$ ,  $h_m: A_m \rightarrow B_m$ ,  $h_\infty: A_\infty \rightarrow B_\infty$ . More generally, a map  $h: A_m, A_{m-1} \rightarrow B_n, b^0$  admits a combinatorial extension  $h': A_\infty \rightarrow B_\infty$  which is natural in an obvious sense. The results of this paper are to be applied in a forthcoming paper, On the suspension triad, by the author. H. Toda [Proc. Japan. Acad. 29, 299—304 (1953)] has also described a method of replacing the space of loops on a suspension space by a more tractable space within its singular homotopy type.

P. J. Hilton.

**Spanier, E. H. and J. H. C. Whitehead:** On fibre spaces in which the fibre is contractible. *Commentarii math. Helvet.* 29, 1—8 (1955).

Les AA. établissent tout d'abord un théorème dont nous ne mentionnerons que le cas particulier suivant: Soient  $X$  un espace fibré, localement compact, séparable métrique, rétracte absolu de voisinage, localement trivial, de base  $Y$ , fibre  $A$ , projection  $p$ . Si  $A$  est contractile en un point dans  $X$ , alors  $A$  est un  $H$ -espace. La démonstration consiste à construire une extension  $h: A \times A \rightarrow X$  de l'application  $g$  du joint  $A \vee A$  dans  $A$  définie par les applications identiques des deux composantes, puis à prouver que  $p \circ h$  est homotope, relativement à  $A \times A$ , à une application constante, d'où par relèvement des homotopies, une application  $A \times A \rightarrow A$  prolongeant  $g$ . Ils montrent ensuite que si  $X$  est compact et est une sphère d'homologie entière alors (1)  $A$  est un rétracte absolu ou bien a la cohomologie rationnelle d'une sphère de dimension impaire; (2) si  $A = A_1 \times A_2$ , l'un des deux facteurs est un rétracte absolu. Ils s'appuient pour cela sur des considérations d'algèbre spectrale et sur un théorème du rapp. relatif à l'impossibilité de fibrer une sphère en produit des sphères: ce Zbl. 39, 192; *Ann. of Math.*, II. Ser. 57, 115—207 (ce Zbl. 52, 400), p. 165.

A. Borel.



**Wu, Wen-Tsün:** On Pontrjagin classes. IV. Acta math. Sinica 5, 37—63 und engl. Zusammenfassg. 63 (1955) [Chinesisch].

(Part III, this Zbl. 57, 156). The aim of this paper is to give a second proof that the Pontrjagin classes reduced mod 3 of a closed differentiable manifold are topological invariants of that manifold. The proof is different from a preceding one in that Steenrod powers do not come explicitly in the considerations. A comparison of the two proofs which exhibits besides some general aspects about Steenrod powers will be given later. Engl. Zusammenfassg.

**Libermann, Paulette:** Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières. Bull. Soc. math. France 83, 195—224 (1955).

Exposé très lisible de la théorie des structures infinitésimales dont le groupe de structure est un sous-groupe du groupe orthogonal. A signaler la bibliographie de plus de 85 titres. H. Guggenheimer.

**Hopf, Heinz:** Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Commentarii math. Helvet. 29, 132—156 (1955).

Der Verf. versteht unter einer schlichten Abbildung einer (reell) 4-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  in eine vierdimensionale komplexe Mannigfaltigkeit  $Y$  eine holomorphe, nicht konstante Abbildung  $f$  von  $X$  in  $Y$ , die außerhalb einer analytischen Menge  $A = f^{-1}(a)$ ,  $a \in Y$ , umkehrbar ist.  $X$  heißt eine lokale Modifikation von  $Y$ , wenn darüber hinaus  $X - A$  eineindeutig auf  $Y - a$  abgebildet wird.  $f$  sei in diesem Falle die Modifikationsabbildung von  $X$  auf  $Y$  genannt. Offenbar kann man sich immer eine lokale Modifikation auf die Weise entstanden denken, daß in  $Y$  der Punkt  $a$  durch die Menge  $A$  ersetzt wird, so daß  $Y - a$  nicht verändert und  $X = (Y - a) \cup A$  wieder zu einer komplexen Mannigfaltigkeit wird. Der Verf. führt als Beispiel einer lokalen Modifikation einen sog.  $\sigma$ -Prozeß an, bei dem der Punkt  $a$  durch die projektive Gerade  $S$  der komplexen Linienelemente in  $a$  ersetzt wird. Diesem  $\sigma$ -Prozeß kommt in der Theorie der schlichten Abbildungen eine zentrale Bedeutung zu. Der Verf. zeigt nämlich: Ist  $f$  eine schlichte Abbildung von  $X$  in  $Y$ , so gibt es zu jeder kompakten Menge  $K \subset A$  eine komplexe Mannigfaltigkeit  $\tilde{Y}$ , die durch  $k$ -malige Anwendung des  $\sigma$ -Prozesses aus  $Y$  entstanden ist, und eine umkehrbar holomorphe Abbildung  $F$  einer Umgebung von  $K$  auf einen Teilbereich von  $\tilde{Y}$ , so daß  $f = \varphi_k F$ . Dabei bezeichnet  $\varphi_k$  die Modifikationsabbildung von  $\tilde{Y}$  auf  $Y$ . Ist  $X$  in bezug auf  $f$  eine lokale eigentliche Modifikation von  $Y$ , d. h. bildet  $f$  die Mannigfaltigkeit  $X$  eigentlich auf  $Y$  ab, so kann man sogar  $F$  als umkehrbar holomorphe Abbildung von  $X$  auf  $\tilde{Y}$  wählen. Jede holomorphe eigentliche Modifikation ist also ein iterierter  $\sigma$ -Prozeß. Der Verf. untersucht weiterhin die topologische und komplexe Struktur von  $X$  in der Nähe von  $A$  und kommt zu sehr interessanten Ergebnissen. Einige Sätze der vorliegenden Arbeit waren bereits früher ohne Beweis (dies. Zbl. 44, 200) angeführt. H. Grauert.

**Yokota, Ichiro:** On the cell structure of the octanion projective plane II. J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., Ser. A 6, 31—37 (1955).

Using the matrix representation the author proves that the projective plane of octaves is a CW-complex (see J. H. C. Whitehead, this Zbl. 40, 387) in which a 16-cell is attached to the  $\delta$ -sphere by the Hopf map. [Remark of the referee: eventually this is the G. Hirsch construction of the plane of octaves (this Zbl. 39, 398).] Some homotopy groups are calculated; about other homotopy groups a conjecture is pronounced. H. Freudenthal.

**Hermann, Robert:** Sur les espaces homogènes compacts de caractéristique positive. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 1303—1305 (1955).

L'A. étudie quelques propriétés des espaces homogènes  $G/H$  où  $G$  est un groupe de Lie compact connexe et  $H$  un sous-groupe connexe ayant même rang que  $G$ , relatives notamment à l'existence d'une structure presque complexe ou kählerienne invariante. Il donne aussi des conditions de nature topologique pour que si un groupe de Lie compact  $K$  agit transitivement sur un tel espace, le groupe d'isotropie

soit nécessairement maximal dans  $K$ . Il utilise la détermination connue des sous-groupes de rang maximum, la formule de Hirsch, et quelques considérations d'espaces fibrés. Le dernier théorème de la Note affirme que le plan projectif des octaves et l'espace projectif quaternionien à  $2n$  dimensions quaternioniennes n'ont pas de champs de  $k$  plans ( $k$  strictement compris entre 0 et la dimension de l'espace envisagé).

A. Borel.

Araki, Shôrô: On the homology of spinor groups. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 9, 1—35 (1955).

J. H. C. Whitehead [Proc. London math. Soc., II. Ser. 48, 243—291 (1944)], a introduit une décomposition cellulaire des variétés de Stiefel, reprise par C. E. Miller (ce Zbl. 50, 175), pour étudier la cohomologie et l'homologie (produit de Pontrjagin) du groupe orthogonal unimodulaire  $SO(n)$ . L'A. construit ici de manière très semblable une décomposition cellulaire du groupe des spineurs  $Spin(n)$ , qui est un revêtement à deux feuillets de la décomposition de Whitehead. Dans le cas de  $SO(n)$ , on part de la correspondance  $x \rightarrow h(x)$  qui associe à tout vecteur unité de  $R^n$  la symétrie à l'hyperplan orthogonal, d'où une application  $f_n: x \rightarrow h(x) \cdot h(x_0)$ , ( $x_0$  fixé), de l'espace projectif  $P_{n-1}$  dans  $SO(n)$ . Ici, l'A. s'appuie sur la correspondance  $x \rightarrow A(x)$ , où  $A(x)$  est une transformation linéaire involutive de l'espace vectoriel complexe à  $2^v$  dimensions ( $v$  étant la partie entière de  $n/2$ ), qui est à la base de la théorie des spineurs, et en tire une application  $x \rightarrow A(x) \cdot A(x_0)$  de la sphère  $S_{n-1}$  dans  $Spin(n)$ , qui joue le rôle de  $f_n$ . Il calcule l'opérateur bord de ce complexe, le produit de Pontrjagin des cellules, et démontre que l'algèbre  $H_*(Spin(n), Z_2)$  d'homologie mod 2 de  $Spin(n)$  possède un système simple de générateurs, (au sens du rapp., ce Zbl. 56, 164),  $v_1, \dots, v_{n-k(n)}$ , où  $k(n)$  est l'entier tel que  $2^{k(n)-1} < n \leq 2^{k(n)}$  et où la suite des degrés  $\{d^0 v, \dots, d^0 v_{n-k(n)}\}$  s'obtient en enlevant les puissances de deux et en ajoutant  $2^{k(n)} - 1$  à la suite  $\{3, 4, \dots, n-1\}$ ; c'est le pendant en homologie d'un théorème du rapp. (loc. cit.) sur la cohomologie mod. 2 de  $Spin(n)$ , obtenu de manière très différente. Enfin, sans détailler les calculs, l'A. dit que sa méthode conduit aisément aux résultats du rapp. (loc. cit.) qui décrivent complètement la structure multiplicative de  $H_*(Spin(n), Z_2)$  pour  $n \leq 10$ .

A. Borel.

### Angewandte Geometrie:

Morehead jr., James C.: Perspective and projective geometries. A comparison. Rice Inst. Pamphlet 42, 1—25 (1955).

Auseinandersetzung gewisser grundlegender Beziehungen zwischen dem praktischen perspektivischen Zeichnen und der projektiven Geometrie und Anführung gegenseitiger Anwendungen: Vollständiges Vierseit, harmonische Würfe, Perspektive des Kreises, Kegelschnitte.

M. Zacharias.

Wunderlich, W.: Zur Entbehrlichkeit des Satzes von Pohlke im Unterricht der darstellenden Geometrie. Elemente Math. 10, 87—88 (1955).

Bei der Herstellung eines axonometrischen Bildes braucht man nicht die Raumlage des Achsenkreuzes und die Projektionsrichtung, sondern nur die Tatsache, daß die Gesetze der Parallelprojektion angewendet werden dürfen. Diese Tatsache läßt sich aber einfacher begründen als der Satz von Pohlke. Verf. gibt eine einfache Begründung. Dies vereinfacht die Lehre von der Axonometrie; man kann den Satz von Pohlke weglassen oder erst am Schluß als Ergänzung anfügen. Ähnliche Auffassungen zeigen die Lehrbücher von E. Stiefel (dies. Zbl. 31, 280) und F. Hohenberg (Konstruktive Geometrie für Techniker, Wien, erscheint 1956).

F. Hohenberg.

Hohenberg, F.: Ein einfacher Beweis des Satzes von Pohlke. Elemente Math. 10, 40—42 (1955).

Die im Lehrsatz von Pohlke ausgesprochene Tatsache, daß jedes schiefaxono-

metrische Bild ein Parallelriß ist, wird mittels der beiden elementaren Sätze bewiesen, daß 1. jedes frontalaxonometrische Bild stets ein Parallelriß ist und 2. durch zwei im Innern einer Ellipse  $u$  liegende Punkte stets zwei Ellipsen laufen, die  $u$  in diametralen Punkten berühren. Bei dieser Beweisführung ergeben sich die möglichen Lagen des räumlichen Dreibeins, das ein vorgegebenes ebenes Dreibein zum Schrägriß besitzt, mittels Darstellung der Einheitskugel, deren scheinbarer Umriß durch Verwendung affiner Hilfsfiguren gewonnen wird.

*H. Horninger.*

**Hohenberg, F.: Herstellung von Perspektiven aus axonometrischen oder perspektiven Bildern.** Elemente Math. 10, 57—61 (1955).

Verf. charakterisiert die auf dem allgemeinen Zweibilderprinzip beruhenden Darstellungsmethoden, bei denen die den Augpunkten  $O, O_1$  zugeordneten Bildebenen mit der Zeichenebene  $\pi$  zusammenfallen. Die besonders einfachen geometrischen Beziehungen zwischen je zwei solchen Bildern  $K^e, K^z$  eines Gegenstandes  $K$  ermöglichen die rasche Ermittlung von  $K^z$  bei gegebenem  $K^e$  und umgekehrt. Dieses Prinzip des „Umzeichnens“ wird an mehreren Beispielen (Transformation von zugeordneten Normalrissen und axonometrischen Bildern in Zentralrisse, Verwandlung eines perspektiven Bildes in ein anderes u. s. w.) erläutert.

*H. Horninger.*

**Krames, Josef: Elementargeometrischer Nachweis des „gefährlichen“ Drehzylinders beim räumlichen Rückwärtseinschnitt.** Elemente Math. 10, 106—108 (1955).

Die Aufgabe beim räumlichen Rückwärtseinschnitt läuft bekanntlich darauf hinaus, ein bekanntes Geländedreieck  $ABC$  mit einem durch Messung bestimmten Sehstrahldreieck  $abc$  zur Inzidenz zu bringen. Sie besitzt im wesentlichen vier Lösungen; fallen von diesen zwei zusammen, so liegt eine „gefährliche“ Annahme vor. — Verf. untersucht zunächst die Möglichkeiten für perspektive Lage zweier gleichsinnig-kongruenten Dreiecke in der Ebene und findet, daß von den beiden Umkreisschnittpunkten einer das Perspektivitätszentrum abgeben muß (während der andere den Drehpol darstellt). Wird dann das erste Dreieck festgehalten und das zweite um die Perspektivitätsachse aus der Ebene herausgekippt, so wird die perspektive Lage nicht zerstört, und das Perspektivitätszentrum beschreibt einen gewissen Kreis  $s$ . Für zusammenrückende Dreiecke strebt nun  $s$  gegen eine zur Dreiecksebene senkrechte und den Umkreis treffende Gerade. Damit ist der von S. Finsterwalder entdeckte „gefährliche Drehzylinder“ — Ort der zu einem festen Geländedreieck  $ABC$  gehörigen Aufnahmezentren, die bei der Auswertung auf eine infinitesimale Unsicherheit führen — elementar nachgewiesen. [Einen anderen elementaren Beweis gab bereits E. Gotthardt, Mitt. Deutsche Ges. Photogramm. 1, 193—198 (1940).]

*W. Wunderlich.*

**Lemos, Victor Hugo de: Die Genauigkeit der Vermessungen in der Kartographie.** Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 4, 283—292 (1955) [Portugiesisch].

**Sauer, Robert: Darboux-Kranz verknickbarer Vierecksgitter.** Arch. der Math. 6, 180—184 (1955).

In der Theorie der Verknickung von Vierecksgittern spielen eine besondere Rolle die ebenflächigen und die ebeneckigen Gitter, die Paare orthogonaler, reziprok-paralleler und antiparalleler Gitter, endlich die flächenstarr und die eckenstarr verknickbaren Gitter. Den ebenflächigen Gittern entsprechen in der Differentialgeometrie die konjugierten Netze, den ebeneckigen die Netze aus Asymptotenlinien. Zur Konstruktion eines Darboux-Kranzes geht man von einem ebeneckigen Gitter und einer flächenstarken Verknickung aus, bestimmt dazu das orthogonale Gitter, das reziprok-parallele „Drehriß-Gitter“ und das zum orthogonalen in  $W$ -Beziehung liegende „Verschiebungsriß-Gitter“. Sie sind ebenflächig. Wie in der Differentialgeometrie kommt man durch Polarenbildung an der Einheitskugel um den Nullpunkt zu neuen Gittern und letztlich zu zwölf Gittern, von denen vier



ebeneckig und flächenstarr verknickbar, vier ebenflächig und flächenstarr verknickbar, endlich vier ebenflächig und eckenstarr verknickbar sind. Zum Kranz angeordnet, sind benachbarte Gitter orthogonal, reziprok-parallel oder antiparallel, solche, zwischen denen zwei weitere Gitter liegen, stehen in Polarbeziehung oder in  $W$ -Beziehung. *E. Rembs.*

## Theoretische Physik.

### Elastizität. Plastizität:

**Noll, Walter:** On the continuity of the solid and fluid states. *J. rat. Mech. Analysis* **4**, 3—81 (1955).

Maxwell hat den Versuch unternommen, das mechanische Verhalten deformierbarer Körper durch einen Ansatz  $ds/dt = \mu da/dt - s/\tau$  zu beschreiben ( $s$  = Spannung,  $a$  = Deformation,  $\mu$  = Scherungsmodul,  $\tau$  = Relaxationszeit). Der zunächst eindimensionale Ansatz ist nicht ohne weiteres auf 3 Dimensionen zu verallgemeinern, es bedarf dazu noch weiterer Annahmen. Verf. untersucht die Verallgemeinerung und entwickelt die Theorie für den entsprechend verallgemeinerten Ansatz (in dem sowohl die Merkmale fester Körper wie jene von Flüssigkeiten enthalten sind). *E. Hardtwig.*

**Truesdell, C.:** Hypo-elasticity. *J. rat. Mech. Analysis* **4**, 83—133 (1955).

Entscheidend für den Aufbau einer Elastizitätstheorie ist immer die Form der Beziehung zwischen Spannung und Deformation. Zwischen Spannungsgröße  $\bar{s}$ , Deformation  $\bar{d}$  und Spannungstensor  $\bar{s}$  wird allgemein eine Beziehung  $\bar{s} = f(\bar{s}, \bar{d})$  bestehen. Verf. spezialisiert auf  $\bar{s}_j^i = A_{jl}^{ik} d_k^l$ , wo der Tensor  $A_{jl}^{ik}$  eine dimensionslose Funktion der Komponenten  $s_n^m$  ist. Er nennt einen Körper, für den diese Beziehung gilt, hypoelastisch und untersucht dessen Eigenschaften unabhängig von der Frage, ob es einen solchen Körper in der Natur auch wirklich gibt. Die klassische Elastizitätstheorie ist als Spezialfall in der hier entwickelten Theorie enthalten. *E. Hardtwig.*

**Truesdell, C.:** The simplest rate theory of pure elasticity. *Commun. pure appl. Math.* **8**, 123—132 (1955).

Vom Standpunkt der Elastizitätstheorie erscheint es als geringere Forderung, daß sich ein Stoff an einen gerade vorübergegangenen Zustand als an den längst vergangenen Anfangszustand „erinnert“. Es wird deshalb statt der linearen Beziehung zwischen Spannung und Dehnung angenommen, daß der Spannungszuwachs eine Funktion des Dehnungszuwachses ist. Der Tensor, der das Spannungsmaß bestimmt, hängt dann vom Maß der Deformation ebenso ab wie in der klassischen Theorie die Spannung von der Dehnung, aber die Beziehungen zwischen Spannung und Dehnung kommen als Ergebnis, nicht als Annahme heraus. Ein Stoff, der dieser Voraussetzung unterliegt, wird „hypoelastisch vom Grad Null“ genannt. Für den Spezialfall der homogenen, d. h. räumlich konstanten Verformung ohne Beschleunigung werden die Bewegungserscheinungen für Dehnung oder Kontraktion mit Verdünnung oder mit Verdickung untersucht. Schließlich wird das homogene Feld der Dehnungs- und Querspannung für die Streckungsbewegung berechnet und der quasielastischen Lösung ohne Querspannung gegenübergestellt, welche den Stoff weicher darstellt, als er in Natur ist. *J. Pretsch.*

**Rivlin, R. S. and J. L. Ericksen:** Stress-deformation relations for isotropic materials. *J. rat. Mech. Analysis* **4**, 323—425 (1955).

Auf Grund der Theorie von Truesdell werden die Spannungstensorkomponenten in Abhängigkeit von der Deformation für homogene und isotrope Stoffe mit komplizierteren mechanischen Eigenschaften abgeleitet. Unter der Annahme, daß die Spannungskomponenten nur von den Gradienten der Verzerrung, Geschwindig-

keit und der Beschleunigungen bis zur  $(n - 1)$  Ordnung abhängen, sind die Spannung-Dehnung-Beziehungen invariant gegen kartesische Koordinatentransformationen. Nach einer Abhandlung über symmetrische Matrixfunktionen und skalare Invarianten von symmetrischen Matrizen wird gezeigt, daß die Spannungsmatrix als Linearkombination einfacher Matrizenpolynome darstellbar ist, deren Koeffizienten skalare Invarianten aller auftretenden Matrizen sind. Bevor die Kräfte bei einer speziellen Deformation berechnet werden, sollen in einer weiteren Mitteilung die Spannung-Dehnung-Beziehungen auf ein allgemeines krummliniges Koordinatensystem übertragen werden. *J. Pretsch.*

**Rivlin, R. S.:** Further remarks on the stress-deformation relations for isotropic materials. *J. rat. Mech. Analysis* **4**, 681—702 (1955).

Im Anschluß an eine frühere Mitteilung (Rivlin und Ericksen, vorsteh. Referat) wird gezeigt, daß diejenige Spannungsmatrix, die als Polynom in nur zwei der kinematischen Matrizen darstellbar ist, mit Hilfe des Satzes von Hamilton-Cayley auf ein Matrizenpolynom von geschlossener Form zurückgeführt werden kann. *J. Pretsch.*

**Reiner, M.:** The complete elasticity law for some metals according to Poynting's observations. *Appl. sci. Research, A* **5**, 281—295 (1955).

Die allgemeine Spannung-Dehnung-Beziehung eines isotropen elastischen Stoffes, die Verf. (dies. Zbl. **35**, 116) aufgestellt hat, wird exakt in geschlossener Form für die Torsion eines Kreiszylinders gelöst. Die Anwendung des Tensorkalküls gibt die von Poynting an Metalldrähten experimentell gefundene Verlängerung bei Drillung im Gegensatz zu der von Timoshenko unter einem Trugschluß vorausgesagten Verkürzung richtig wieder. Die beobachtete Volumenvergrößerung rührt von der Schubwirkung her. *J. Pretsch.*

**Czechowski, J., M. Fisz, W. Sadowski and R. Zasepa:** On determining the safety factor. *Zastosowania Mat.* **2**, 190—197, russische und engl. Zusammenfassg. 197—198 (1955) [Polnisch].

The strength of any structural material is a random variable. For this reason nominal stresses have, for a long time, been determined, as a rule below the theoretical strength  $R_0$ , e. g. as  $R_0/T$ . The number  $T$ , because of the rôle it plays, is called the safety factor. This factor has usually been determined in a subjective way by the authors of appropriate building regulations. It is only in the works of W. Wierzbicki [cf. *Przegląd Techn.* **24**, 690—691 (1936)] that we find an attempt to form a theory, based on the theory of probability, making it possible to determine the safety factor in an objective way. This note aims at establishing the number of trials which should be made in order to estimate the safety factor with the a priori determined confidence factor and accuracy. The problem has been solved on the assumption that the strength of the structural material is a random variable with a normal distribution (the mean value and the standard deviation being unknown). As a result, a formula has been obtained, on the basis of which it has been possible to construct suitable tables, which may be a guide in determining the number of experiments necessary to determine the safety factor. Engl. Zusammenfassg.

**Hopkins, H. G. and W. Prager:** Limits of economy of material in plates. *J. appl. Mech.* **22**, 372—374 (1955).

**Ericksen, J. L.:** Deformations possible in every compressible isotropic, perfectly elastic material. *J. Math. Physics* **34**, 126—128 (1955).

Es wird bewiesen, daß eine Verzerrung in einem kompressiblen isotropen und vollkommen elastischen Material, die durch Oberflächenzug allein hervorgerufen wird, homogen sein muß. *J. Pretsch.*

**Plass jr., H. J.:** An approximate nonuniform bending theory and its application to the swept-plate problem. *J. appl. Mech.* **22**, 383 (1955).

Verf. gibt eine Näherungstheorie des Pfeilflügelproblems unter der Annahme, daß der Flügel als ein homogener isotroper Zylinder betrachtet werden kann. Aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie werden die Differentialgleichungen und die Randbedingungen der behinderten Biegung des schiefen zylindrischen Kragträgers aufgestellt. Die daraus entstehenden Gleichungen, wie auch ähnliche Gleichungen der Wölbkrafttorsion, werden zur Näherungslösung des Torsions- und

Biegungsproblems des schiefen zylindrischen Kragträgers verwendet. Die Ergebnisse werden mit experimentellen Verschiebungs- und Spannungswerten verglichen.

V. Bogunović.

**Zickel, J.: Bending of pretwisted beams.** J. appl. Mech. **22**, 348—352 (1955).

The general theory of pretwisted beams and columns (J. Zickel, General theory of pretwisted beams and columns, Report AII-73, Graduate Division of Applied Mathematics, Brown University, June 1952) is applied to the bending of an initially straight and uniformly pretwisted beam of doubly symmetric thinwalled section. Pretwisting brings planes of various bending stiffness into play with a resulting stiffness which in a certain sense averages the stiffness of the beam in its principal directions. It is shown that compared with bending of an untwisted beam in its most flexible direction a thin strip can have its deflection in the plane of bending reduced 72 per cent by an initial twist of  $0,83\pi$ . Simultaneously, however, lateral deflections of almost equal magnitude are induced. For pretwists above  $2\pi$  the lateral deflections become practically negligible and the deflections in the plane of bending are still reduced as much as 44 per cent. With increasing initial twist, however, the pretwisted beam becomes more flexible and for an initial twist of  $6,5\pi$  it is as flexible as the untwisted beam in its most flexible direction. Beams of equal flexibility in all directions simply become more flexible with initial twist, a fact which corresponds to the observations made by J. P. Den Hartog (Advanced strength of materials, New York 1952, p. 319) in some of his experiments. — From the results one can draw the following conclusions: Pretwisting a beam of thin-walled section has two effects. The obvious one is that flexible and stiff axes of bending are distributed continuously in many or all directions so that the properties of the beam may be almost equalized for all planes of bending. A necessary and probably undesirable accompaniment is an increase in flexibility caused by the inclinations of the fibers.

R. Gran Olsson.

**Friedrich, E.: Die zusätzlichen Momente beim frei aufliegenden Balken infolge der elastischen Verformung.** Österreich. Ingenieur-Arch. **9**, 94—105 (1955).

**Woinowsky-Krieger, S.: Über ein Verfahren zur Bestimmung der Biegemomente von Platten unter Einzellasten.** Ingenieur-Arch. **23**, 349—353 (1955).

In dieser Arbeit geht es um die Ermittlung der Feldgrößtmomente einer dünnen Platte infolge einer Einzellast, die sich gleichförmig auf eine gewisse Druckfläche verteilen möge. Wenn man dies Problem unter Anwendung eines numerischen Verfahrens, insbesondere der Differenzenrechnung lösen will, müssen zunächst besondere Annahmen über die Begrenzung der Lastfläche gemacht werden. Die auf dieser Grundlage der Berechnung gewonnenen Ergebnisse lassen sich auf Druckflächen anderer Form oder Größe nicht übertragen. — Das in dieser Arbeit entwickelte einfache Verfahren erlaubt es indessen, die einer numerischen Untersuchung entnommenen und für den Einzelfall der Belastung gültigen Momentenwerte zur Konstruktion ziemlich allgemeiner Ausdrücke für die Biegemomente im Mittelpunkt einer rechteckigen oder kreisförmigen Lastfläche nutzbar zu machen. Eine wiederholte Anwendung des numerischen Verfahrens läßt sich damit umgehen.

R. Gran Olsson.

**Tiffen, R.: Some problems of thin clamped elastic plates.** Quart. J. Mech. appl. Math. **8**, 237—250 (1955).

The present paper gives some contributions to problems of transverse displacements of thin elastic plates occupying the following regions: a) half-planes, b) those which can be mapped conformally onto a half-plane, c) infinite strips, the boundaries being clamped. Solutions to similar plate problems have been given by A. C. Stevenson [Philos. Mag., VII. Ser. **33**, 639—661 (1942)], H. G. Hopkins (this Zbl. **35**, 254), W. R. Dean (this Zbl. **51**, 160). The present investigation aims at general methods rather than particular solutions. Proofs of uniqueness are given, with emphasis



on difficulties which occur in the cases of materials extending to infinity in some, but not all directions. Problems of isolated interior loading are considered for all the above types of region. The conclusion of the investigations may be expressed in the following manner: Whilst these problems show much in common with the corresponding problem of generalized plane stress, their interest lies in the fact that each presents its own particular difficulty.

*R. Gran Olsson.*

**Cleaves, H. F.:** The stresses in an aeolotropic circular disk. Quart. J. Mech. appl. Math. 8, 59—80 (1955).

Es wird das verallgemeinerte ebene Spannungsproblem für die aeolotrope Kreisscheibe unter allgemeinsten Randlast behandelt. Die Rechnungen von R. Morris (dies. Zbl. 43, 186) für die elliptische Scheibe lassen sich nicht leicht übertragen. Dagegen folgt die von Okubo (dies. Zbl. 49, 252) mitgeteilte Spannungsverteilung in einer diametral gedrückten aeolotropen Kreisscheibe als Spezialfall. Die Kreisscheibe wird von gleichförmiger Dicke und mit zwei zueinander senkrechten Symmetrierichtungen in der Scheibenebene angenommen. Zugrunde gelegt werden die Rechnungen von Livens und Morris (dies. Zbl. 30, 41), wobei die Randspannungen in Fourier-Reihen entwickelt werden. Das Problem ist schwieriger als der von Holgate [Proc. Cambridge philos. Soc. 40, 172 (1944)] behandelte Fall des Kreisloches in einer aeolotropen Platte, die nur am Lochrand unter Spannung steht, weil die im Kreisinnern liegenden Verzweigungspunkte der Transformation das eine Mal im Material, das andere Mal außerhalb des Materials gelegen sind. Als Sonderfälle von Randspannungen werden für die Vorbereitung der Fourier-Reihe behandelt: a) reelle konstante Randlast, reeller Druck; b) imaginäre konstante Randlast, resultierendes Moment; c) veränderliche Randlast  $a_1 e^x + a_{-1} e^{-x}$  und d) veränderliche Randlast  $a_n e^{nx} + a_{-n} e^{-nx}$ . Als Anwendungsbeispiel wird die Reifen-spannung am Rand einer eichenen Kreisscheibe berechnet, die von einem Paar gleicher und entgegengesetzter Radialkräfte senkrecht zur Maserung herrihrt.

*J. Pretsch.*

**Hoskin, B. C. and J. R. M. Radok:** The root section of a swept wing. A problem of plane elasticity. J. appl. Mech. 22, 337—347 (1955).

The authors of the present paper have used the methods of N. I. Muskhelishvili (Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, this Zbl. 52, 414) to obtain the stresses in an approximately square plate, subject to concentrated forces at two opposite corners, acting in the direction of the diagonal, and to certain shear-stress distributions along the sides. These shear-stress distributions have been chosen to conform approximately with those observed at the corresponding boundaries during tests on a 45° sweptback tube with ribs normal to the leading edge („structural“ ribs). Numerical results, involving loading parameters, are presented in the form of tables and diagrams. Use of the numerical results is illustrated by application to a wing under varying degrees of torsion and bending.

*R. Gran Olsson.*

**Beer, H.:** Ein baustatisches Verfahren zur Berechnung orthotroper Platten und Plattenroste. Österreich. Ingenieur-Arch. 9, 78—85 (1955).

**Karas, K.:** Zur Berechnung rotierender Scheiben vorgegebenen Profils. Österreich. Ingenieur-Arch. 9, 157—171 (1955).

**Gedizli, H. S.:** How one can use Tölke's tables for the computation of the circular plate on elastic support under a moment applied to the stiff center piece? Z. angew. Math. Mech. 35, 315—316 (1955).

Gekürzte Wiedergabe einer bereits in deutscher Sprache erschienenen Arbeit (dies. Zbl. 50, 187).

*R. Gran Olsson.*

**Kappus, Robert:** Strenge Lösung für den durch zwei Einzelkräfte belasteten Kreisring. Z. angew. Math. Mech. 35, 210—231 (1955).

Verf. löst das Problem des durch zwei diametrale am Außenrand  $r_a$  resp. am Innenrand  $r_i$  angreifende Einzelkräfte elastisch gedrückten Kreisrings nach der

Methode von Mushkelishvili (Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, dies. Zbl. 52, 414), die sich komplexer Funktionen zur Lösung von Randwertaufgaben des ebenen Problems bedient. In beiden Fällen wird die Lösung gewonnen durch Superposition eines mit Singularitäten behafteten Spannungszustandes mit dem singularitätenfreien Spannungszustand eines Kreisringes, der am Innenrand resp. Außenrand kontinuierlich belastet ist. Die Gewinnung der beiden komplexen Funktionen, von denen die Lösung des Problems abhängt, gelingt durch Reihenansatz, dessen Koeffizienten sich unter Ausnützung des Residuensatzes für beliebige Werte von  $r_a:r_i$  bestimmen lassen. Die Formeln sind zur numerischen Berechnung geeignet. Für  $r_a = 2r_i$  berechnet Verf. die Spannungsverteilung in den beiden zueinander senkrechten Hauptquerschnitten des Rings und die Radialverschiebung am Innen- und Außenrand an der Stelle senkrecht zur Lastrichtung. Das vorliegende, insbesondere für die Spannungsoptik wichtige Problem wurde in anderer Weise von S. Timoshenko [Philos. Mag., IV. Ser. 44, 1014—1019 (1922)] und von L. N. G. Filon (The stresses in a circular ring. Selected Engineering Papers No. 12, London 1924) gelöst. Verf. vergleicht die dort erhaltenen Werte mit seinen Resultaten und berichtigt einen Fehler bei Timoshenko.

*R. Moufang.*

**Kennard, E. H.: Cylindrical shells: Energy, equilibrium, addenda and erratum.** J. appl. Mech. 22, 111—116 (1955).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 50, 188), die die Herleitung der Epsteinschen Bewegungsgleichungen für zylindrische Schalen zum Ziele hatte, wird nun hier ein Ausdruck für die Deformationsenergie aufgestellt. Da bei strenger Formulierung der gesuchte Ausdruck sehr kompliziert wird, macht Verf. Annahmen, die ihn berechtigen, Glieder von der Größenordnung  $h^2$  und  $h^3$  zu vernachlässigen ( $h$  = gleichförmige Schalendicke). Der resultierende Energieausdruck  $U = U_m + U_b$  bleibt trotzdem noch recht kompliziert ( $U_m$  = Membranenergie,  $U_b$  = Biegeenergie). Eine weitere Abkürzung für den Energieausdruck wird angegeben, die Bewegungsgleichungen werden nochmals angeschrieben. Die in ihnen enthaltenen Unbestimmtheiten werden diskutiert. Abschließend werden die Bewegungsgleichungen in einer abgekürzten Form wiedergegeben, ebenso wie die Ausdrücke für die resultierenden Spannungen.

*E. Hardtwig.*

**Hoff, N. J.: The accuracy of Donnell's equations.** J. appl. Mech. 22, 329—334 (1955).

Similarly to an earlier paper from the same school (Kempner, this Zbl. 64, 191, Flügge's and Donnell's sets of differential equations of equilibrium for circular cylindrical shells are compared. In the present paper a more general method of comparison is used and the range of the basic parameters is found within which the two solutions are approximately equal. In this respect the paper completes the useful discussion of the accuracy of various shell theories by J. Moe (Publ. Int. Ass. f. Bridge and Struct. Eng. 1953).

*D. Radenković.*

**Roth, Werner: Die strenge Lösung für den belasteten Membranstreifen bei großer Ausbiegung.** Z. angew. Math. Mech. 35, 316—319 (1955).

Der Verformungs- und Spannungszustand eines an den Enden unverschieblich gestützten biegeweichen Membranstreifens, der durch beliebig verteilte Vertikalkräfte belastet ist, wird mit Hilfe der strengen Theorie berechnet. Das Ergebnis wird an 2 Beispielen (sinusförmig verteilte und stückweise konstante Streckenlast) erläutert.

*A. Weigand.*

**Horvay, G. and J. S. Born: Tables of self-equilibrating functions.** J. Math. Physics 33, 360—373 (1955).

Am linken Rand  $x = 0$  des nach der  $+x$ -Richtung unendlich ausgedehnten elastischen Streifens sind a) die Normalspannungen  $\bar{\sigma}_x$ , b) die Scherspannungen  $\bar{\tau}$  vorgeschrieben. Der Streifen hält sich selbst im Gleichgewicht. Ist die (unbekannte) Spannungsfunktion  $\varphi(x, y)$ , so lassen sich die Randwerte  $\bar{\varphi}(y)$  im Falle a) und  $\bar{\varphi}_{,x}(y)$

im Falle b) nach Polynomen  $f_n(y)$  entwickeln. Diese genügen einer Differentialgleichung

$$(1 - y^2)^2 f^{IV} - 10 y (1 - y^2) f^{III} + (\lambda - 24) (1 - y^2) f'' + (12 - 4 \lambda) y f' - 2 \lambda f = 0,$$

wo  $\lambda = (n + 2)(n + 3)$ , und bilden ein Orthogonalsystem. Die Polynome werden entwickelt, ihre Werte tabuliert (5 bzw. 7 Dezimalen). *E. Hardtwig.*

**Cenway, H. D.:** Stress distributions in orthotropic strips. *J. appl. Mech.* **22**, 353—354 (1955).

**Kammerer, Albert:** Note sur les contraintes latentes des pièces prismatiques traitées thermiquement. *C. r. Acad. Sci., Paris* **241**, 730—732 (1955).

**Melan, E.:** Spannungen infolge nicht stationärer Temperaturfelder. Österreich. Ingenieur-Arch. **9**, 171—175 (1955).

**Hieke, Max:** Eine indirekte Bestimmung der Airyschen Fläche bei unstetigen Wärmespannungen. *Z. angew. Math. Mech.* **35**, 285—294 (1955).

Für die genaue Ermittlung der Eigenspannungen, die durch diskontinuierliche Dichteänderungen innerhalb eines Mediums auftreten, ist an Hand zweier allgemeiner Sätze ein einfaches Verfahren angegeben worden. Der Verf. beschränkt sich auf den Fall von Eigenspannungen in sehr schlanken Stäben beliebigen Querschnitts, und macht die Voraussetzungen, daß alle Größen längs der Zylinderachse konstant sein sollen und daß der Dichteunterschied eines Teiles des Körpers gegenüber dem restlichen auf einer zylindrischen Trennfläche einen konstanten Wert haben soll. Dann läßt sich behaupten: 1. daß Spannungsvektoren sich finden lassen, die auf der Diskontinuitätsfläche stetige Normalkomponenten haben und 2. daß die in Richtungen parallel zur Tangentialebene an die Diskontinuitätsfläche liegenden Normalspannungen an dieser einen konstanten Sprung erleiden. Der Beweis stützt sich auf den Gaußschen Satz und auf die Einführung eines stetigen Verschiebungsvektors. Das Verfahren ist durch Beispiele (Wärmespannungen im exzentrisch erhitzten Kreiszyylinder und in einem Zylinder mit ebener Trennfläche) illustriert.

*D. Radenković.*

**Tremmel, E.:** Beitrag zum Problem der Wärmespannungen in Scheiben. Ingenieur-Arch. **23**, 159—171 (1955).

Unter dem Einfluß stationärer ebener Temperaturfelder bleiben die Querschnitte zylinder- oder prismenförmiger Körper oder dünner Scheiben, da die Verträglichkeitsbedingungen von selbst erfüllt sind, spannungsfrei, wenn sie keine Kurven enthalten, die eine Wärmequelle umschließen [E. Melan, Österreich. Ingenieur-Arch. **6**, 1—3 (1951); dies. Zbl. **41**, 103; E. Melan und H. Parkus, Wärmespannungen, S. 9ff., Wien 1953]. Nur dann können nämlich die aus der Temperatur allein folgenden Verschiebungen eindeutige Ortsfunktionen sein. Ist das nicht der Fall, so werden die mehrdeutigen Formänderungsgrößen durch Überlagerung eines zusätzlichen, einem Selbstspannungszustand zugeordneten Verschiebungsfeldes getilgt. Zu seiner Festlegung ist daher eine den Randbedingungen angepaßte Airysche Spannungsfunktion so aufzubauen, daß die aus ihr abgeleiteten Verschiebungsgrößen bestimmte, die mehrdeutigen Temperaturverschiebungen kompensierende Funktionen enthalten. — In der vorliegenden Arbeit wird das Problem zunächst allgemein behandelt; die Aufgabe, eine Spannungsfunktion aus den berechneten Temperaturverschiebungen zu bestimmen, führt auf eine Poissonsche Differentialgleichung, deren Partikulärintegral aus einem in komplexer Form ausgedrückten Ansatz berechnet wird. Da die Verträglichkeitsbedingungen im Falle eines stationären Wärmeflusses von vornherein erfüllt sind, bleibt die auf Temperaturwirkungen erweiterte Differentialgleichung der Airyschen Spannungsfunktion homogen. Die gesuchte, die Randbedingungen befriedigende endgültige Lösung wird daher durch Überlagerung jenes Partikulärintegrals mit anderen passend gewählten Integralen der Bipotentialgleichung als Linearkombination biharmonischer Funktionen erhalten. In einem



Beispiel wird die praktische Durchführung der Berechnung an einem von exzentrisch liegenden Kreiszyllindern begrenzten Rohr gezeigt. *R. Gran Olsson.*

**Ono, Akimasa:** Formulation of the stress in rotating disk with regard to the effect of permanent strain. Proc. Japan Acad. **31**, 169—174 (1955).

Verf. setzt  $\sigma_r = \sigma'_r + \sigma_r^*$ ,  $\sigma_t = \sigma'_t + \sigma_t^*$  mit

$$\sigma'_r = -\frac{1}{2} \sigma' (1 + N^{-2} - x^{-2} - N^{-2} x^2), \quad \sigma'_t = \frac{1}{2} \sigma' (1 + N^{-2} + x^{-2} - n x^2),$$

wo  $x = r/r_i$ ,  $N = r_a/r_i$ ,  $\sigma'$  eine gegebene, zu der Winkelgeschwindigkeit proportionale Konstante und  $n$  eine gegebene, von  $N$  und der Poissonschen Zahl abhängende Konstante ist,

$$\sigma_r^* = C(\ln x + L x^{-2} - L), \quad \sigma_t^* = C(1 + \ln x - L x^{-2} - L),$$

wo  $L$  eine gegebene, von  $N$  abhängende Konstante ist. Es ist angenommen, daß die Verzerrungen in einen elastischen und einen bleibenden Anteil zerfallen und daß der elastische Anteil der Tangentialverschiebung die Form  $2 C r \varphi / E$  hat. Über die Unbekannte  $C$  wird so verfügt, daß die mittlere quadratische Abweichung von  $\sigma_t$  von einem Mittelwert ein Minimum ist, und alsdann versucht, einen Ausdruck für die Beanspruchung der Scheibe und die Bruchgefahr abzuleiten. *R. Moufang.*

**Adkins, J. E.:** A note on the finite plane-strain equations for isotropic incompressible materials. Proc. Cambridge philos. Soc. **51**, 363—367 (1955).

Die nichtlinearen Differentialgleichungen für elastische Deformationen jenseits des Bereiches der klassischen Elastizitätstheorie lassen sich für besondere Deformationsformen oder Dehnungsenergiefunktionen vereinfachen. Mooney [J. appl. Phys. **11**, 582 (1940)] hat die Dehnungsenergiefunktion als lineare Funktion der Dehnungsinvarianten angesetzt; Verf. reduziert die Gleichungen für die Ebenendehnung für solches Material auf symmetrische Formen, welche die Spannungskomponenten nicht enthalten. *J. Pretsch.*

**Manacorda, Tristano:** Sulla torsione di un cilindro circolare omogeneo e isotropo nella teoria delle deformazioni finite di solidi elastici incompressibili. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **10**, 177—189 (1955).

The paper gives a complete analysis of the problem of torsion and extension of a cylinder in the scope of the nonlinear (second order) elasticity, not only determining the forces which are supposed to be distributed at the two bases in the condition of equilibrium, but also succeeding to ascertain that, corresponding to a given value of twist (or the extension of the cylinder) on each of the bases the totality of such forces is reduced precisely to a couple. (From author's summary.) *D. Radenković.*

**Adkins, J. E.:** Finite deformation of materials exhibiting curvilinear aeolotropy. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **229**, 119—134 (1955).

Es wird eine Theorie der krummlinigen Aeolotropie für endliche Deformationen und völlig unsymmetrische, orthotrope oder transversal isotrope Stoffe entwickelt und dabei die Dehnungsenergiefunktion in Abhängigkeit von den Dehnungskomponenten oder Dehnungsinvarianten ausgedrückt. Als Beispiele werden zylinder- und kugelsymmetrische Probleme (Dehnung, Verdrehung und Aufweitung einer Röhre und Aufblähung einer Kugelschale) behandelt. *J. Pretsch.*

**Ericksen, J. L.:** Singular surfaces in plasticity. J. Math. Physics **34**, 74—79 (1955).

This paper is concerned with singular surfaces which may occur in solutions to the von Mises equations of plasticity. It is shown that on a surface  $S(t)$  which is singular relative to the velocity vector, the stress tensor is continuous except under some rather restrictive conditions. Results are also obtained which indicate that, in general, the motion of the material surface which coincides with  $S(t)$  is instantaneously that of an inextensible membrane. (From author's summary.)

*D. Radenković.*

**Schlechtweg, H.:** Zur Problematik des Entlastungsvorganges nach plastischer Verformung. Z. angew. Math. Mech. **35**, 176—183 (1955).

Den Spannungszustand in einer Hohlkugel, die ohne Berücksichtigung der Verfestigung durch den Innendruck  $p$  teilweise plastisch verformt wird, hat Hill (dies. Zbl. 41, 108) bestimmt. Im Anschluß an diese Formeln bestimmt Verf. das Verhalten der Hohlkugel, wenn der Innendruck  $\bar{p}$  auf den Wert  $p$  vermindert wird, so daß sich die ursprüngliche Grenze  $r = \bar{c}$  zwischen elastischem und plastischem Gebiet nach dem kleineren Wert  $c$  verschiebt. Hierbei sind 3 Zonen zu berücksichtigen: die bei Belastung und Entlastung sich elastisch verhaltende Außenzone  $r > \bar{c}$ ; die durch Entlastung aus dem plastischen Zustand entstehende mittlere Zone  $c > r > \bar{c}$ ; die nach der Entlastung noch plastische Innenzone  $r < c$ . An den Grenzen sind die Randbedingungen und Übergangsbedingungen — Stetigkeit der Radialspannung und Radialverschiebung und die Fließbedingung — zu erfüllen. Zur Bestimmung des Spannungstensors in der mittleren Zone bedient sich Verf. eines analogen Ansatzes wie Moskvitin (dies. Zbl. 46, 178), demzufolge die Entlastung in linear elastischer Weise erfolgt, wobei im plastischen Gebiet Inkompressibilität vorausgesetzt wird. Für  $\mathfrak{P}(r, c)$  in  $c > r > \bar{c}$  gilt  $\mathfrak{P}(r, c) - \mathfrak{P}_{pl}(r, r) = A|\mathfrak{E}(r, c)| + B(\mathfrak{E}(r, c) - \mathfrak{E}_{pl}(r, r))$ , wo  $\mathfrak{P}_{pl}(r, r)$  den an der Stelle  $r$  herrschenden plastischen Spannungstensor bezeichnet, wenn die Grenze des plastischen Gebietes von  $\bar{c}$  auf  $r < c$  zurückgegangen ist;  $\mathfrak{E}$  bezeichnet die zugehörigen Verzerrungstensoren und  $\mathfrak{E}$  die Spur von  $\mathfrak{E}$ ,  $A, B$  die bekannten elastischen Konstanten. Zur Vereinfachung nimmt Verf. auch für das durch Entlastung aus dem plastischen Zustand entstehende Gebiet Inkompressibilität an. Die Durchführung der Rechnung ergibt für den Wert  $\mu = 0,5$ , daß der zunächst unbekannte plastische Zustand  $\mathfrak{P}_{pl}(r, r)$  in obiger Formel der an der Stelle  $r$  herrschende, durch Belastung hervorgerufene Zustand ist, bei dem die Grenze zwischen plastischem und elastischem Gebiet in  $r = c$  liegt.

R. Moufang.

**Onat, E. T.:** The plastic collapse of cylindrical shells under axially symmetrical loading. Quart. appl. Math. 13, 63—72 (1955).

This paper is concerned with the plastic behaviour and the load carrying capacities of thin cylindrical shells composed of a plastic-rigid material that obeys Tresca's yield condition and the associated flow rule. The discussion is restricted to axially symmetric types of loading and edge support. Under these conditions a yield surface is found for the relevant stress resultants. Once the yield surface and the associated flow rule are known, the approximations from above and below to the load carrying capacity can be obtained by using the theorems of limit analysis. For mathematical simplification it is found convenient to approximate the curved yield surface by a polyhedron or other suitable shapes. A simple example is treated using this approximate approach.

(From author's summary.) D. Radenković.

**Shield, R. T.:** The plastic indentation of a layer by a flat punch. Quart. appl. Math. 13, 27—46 (1955).

The problem under consideration is the plastic indentation by a flat smooth punch of the plane surface of a layer of elastic-perfectly plastic material resting on a rough rigid base. A complete solution to the problem under conditions of plane strain has been obtained by A. Wang and E. H. Lee (Report AC-47 to Armstrong Cork Co., Brown University, 1953). The three dimensional punch problem is one of considerable difficulty at the present stage of elastic-plastic analysis. However, as in a previous paper by R. T. Shield and D. C. Drucker (this Zbl. 52, 209) on the indentation of an infinitely thick layer, the limit design theorems can be used to determine upper and lower bounds for the indentation force during the incipient plastic yielding of the layer [H. J. Greenberg and W. Prager, Proc. Amer. Soc. Civil. Engrs. 77, Separate Nr. 59 (1951); Trans Amer. Soc. Civil Engrs. 117, 447—484 (1952); D. C. Drucker, H. J. Greenberg and W. Prager, this Zbl. 44, 399; 47, 432]. — In the present paper the material of the layer is assumed to obey Tresca's yield criterion of constant maximum shearing force  $k$  during plastic deformation.

This yield condition approximates to the behaviour of a frictionless cohesive soil such as clay. The square punch is considered first and the bounds obtained for the average pressure on the punch for layers of varying thickness determine the indentation force with sufficient accuracy for practical purposes. The lower bound  $5k$  for the punch pressure obtained in the paper of Shield and Drucker mentioned above for a square or rectangular punch on a layer of infinite thickness is improved to the plane strain layer  $(2 + \pi)k$ . Finally, bounds are obtained for a circular punch, and these bounds are in close agreement for layers which are thin compared with the width of the punch. The stress field used to obtain lower bounds for the circular punch pressure can be adapted to provide lower bounds for any convex area of indentation.

*R. Gran Olsson.*

**Huth, J. H.:** A note on plastic torsion. *J. appl. Mech.* **22**, 432—434 (1955).

**Wang, A. J.:** The permanent deflection of a plastic plate under blast loading. *J. appl. Mech.* **22**, 375—376 (1955).

**Hult, J. A. H.:** Critical time in creep buckling. *J. appl. Mech.* **22**, 432 (1955).

**Schaefer, H.:** Über das Verfahren von Baranow und seine Erweiterung auf die Ermittlung der Eigenschwingungsformen von Schwingerketten. *Ingenieur-Arch.* **23**, 307—313 (1955).

Baranow gab ohne Beweis ein besonders einfaches graphisches Verfahren zur Ermittlung der Torsionseigenschwingungszahlen an, das von der höchsten Eigenschwingungsform ausgeht. In der vorliegenden Arbeit wird auf recht einfache Weise bewiesen, daß das Verfahren streng gültig ist, wobei die schrittweise Reduktion des  $(n + 1)$ -Massensystems auf Systeme mit  $n, n - 1, \dots$  Massen benutzt wird. Auch die Bestimmung der Schwingungsformen wird erläutert.

*A. Weigand.*

**Stanišić, Milomir M.:** Free vibration of a rectangular plate with damping considered. *Quart. appl. Math.* **12**, 361—367 (1955).

The paper presents the problem of free vibration of a thin ( $h$ ) elastic rectangular plate ( $a \cdot b$ ) fixed along each edge considering the influence of internal viscous damping proportional to velocity. Assuming that a uniform plate's vibration is harmonically the transverse deflection of the plate is

$$w(x, y, t) = \varphi(x, y) \exp(-\alpha t) \cos \omega t,$$

where  $\varphi(x, y)$  is the amplitude,  $x = k/2q h$ , and  $\omega$  the angular frequency. The motion of the plate is then governed by the special partial differential equation  $\Delta^4 \varphi(x, y) - \lambda \varphi(x, y) = 0$  with the solution

$$\varphi(x, y) = \sum_r^m \sum_s^n a_{rs} X_r Y_s, \quad (r, s = 1, 2, 3, \dots).$$

Using the generalized Galerkin's method the natural frequencies ( $\lambda$ ) are determined by means of a system of linear homogeneous equations with the unknown coefficients  $a_{rs}$ . The appropriate characteristic functions  $Q$  of this system be given in the form

$$Q = (\text{Ch } \mu q/l - \cos \mu q/l) - \beta (\text{Sh } \mu q/l - \sin \mu q/l)$$

where are:  $Q = X_r$  (or  $Y_s$ ),  $q = x$  (or  $y$ ) and  $l = a$  (or  $b$ ). The values of  $\beta$  and  $\mu$  are calculated and the frequencies for the first three modes of vibration for a square plate fixed along each edge are obtained also, it is shown that the natural frequency decreases when the damping factor increases. The approximations for the eigenvalue parameter for the vibration of a clamped square plate agree very well with the D. Young results, obtained by the Ritz method (this *Zbl.* **39**, 207).

*D. Rašković.*

**Zoller, K.:** Über die Koppelung der Dehnungs- und Torsionsschwingungen von umlaufenden Scheiben. *Ingenieur-Arch.* **23**, 254—261 (1955).

Es wird die Aufgabe der Berechnung der durch Corioliskraft verkoppelten Dehnungs- und Torsionsschwingungen rasch umlaufender Scheiben behandelt. Aus dem Hamiltonschen Prinzip werden zunächst die Schwingungs-Differentialgleichungen



gen hergeleitet. Sodann wird der Variationsausdruck unmittelbar benutzt, um mit Hilfe eines Ritz-Ansatzes die ersten Eigenfrequenzen numerisch zu bestimmen. Während bei sehr hohen Umlaufzahlen die Frequenzen stark von den Coriolis- und Fliehkräften beeinflusst werden, erweist sich für die heute üblichen niedrigen Drehzahlbereiche das bisher übliche Vorgehen der Rechnung an der ruhenden Scheibe als durchaus zulässig.

*R. Zurmühl.*

**Mettler, E.:** Nichtlineare Schwingungen und kinetische Instabilität bei Saiten und Stäben. *Ingenieur-Arch.* **23**, 354—364 (1955).

Die Frage der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper ist in den letzten Jahren viel bearbeitet worden (vgl. E. Mettler, dies. Zbl. **53**, 134). Trotzdem kann man nicht sagen, daß das Problem erschöpfend behandelt worden sei, sondern daß die theoretisch viel erörterte Erscheinung der Instabilität praktisch nie beobachtet worden ist (mit einer Ausnahme, die in der Arbeit noch besonders angegeben wird). — In diesem Zusammenhang wird die Frage nahegelegt, wie sich die bemerkenswerte Erscheinung äußern muß oder was man bei einer experimentellen Verwirklichung als sichtbare Erscheinung zu erwarten hat. Die letztere Frage läßt sich naturgemäß mit der bisher geförderten linearen Stabilitätstheorie nicht vollständig beantworten. Diese kann zwar bestimmte Schwingungen als stabil oder instabil nachweisen, sagt aber gerade in dem zur Erörterung stehenden Fall der Instabilität lediglich aus, was man nicht beobachtet, nämlich die instabile Schwingung. Dagegen kann die lineare Theorie ihrem Wesen nach nicht angeben, welche Bewegung an Stelle der instabilen Schwingung tatsächlich eintritt. Das leistet nur eine nichtlineare Theorie, die bisher nicht über wenige Ansätze hinausgediehen ist, wobei sie sich auf die Biegeschwingungen von Saiten und Stäben beschränkte. — Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich zunächst mit einer Aufstellung und Deutung der letztgenannten Ergebnisse, die somit das Verhalten einer elastischen Schwingung in der Umgebung eines Bereiches der Instabilität erster Art wiedergeben. Ferner werden einige darüber hinausgehende Untersuchungen über die Kippschwingungen des Stabes ausgeführt mit dem Ziel, entsprechende Resultate für einen Bereich zweiter Art zu gewinnen.

*R. Gran Olsson.*

**Murta, M. N.:** On three-dimensional plastic wave propagation. Univ. Lisboa, *Revista Fac. Ci.*, II. Ser. A **4**, 63—78 (1955).

On the basis of Prager-Trifan flow law (a stress theory of plastic flow, cf. Trifan, this Zbl. **33**, 228) and the dynamical compatibility condition across a surface of discontinuity, the author states a number of interesting qualitative conclusions about the propagation of regular loading waves in a strain-hardening plastic medium without boundaries. It is shown that if the influence of plastic anisotropy can be neglected, a plastic medium in loading can be expected to behave approximately as possessing a non-homogeneous isotropic non-linear elasticity, with constant bulk modulus  $K$  and a shear modulus  $G$  depending on the intensity of the deviatoric strain. The possibility of dilatational and distortional waves, the velocities of which (approximately  $\sqrt{\frac{1}{3}G + K}/\rho$  and  $\sqrt{G/\rho}$  resp.) decrease as the plastic deformation increases, is demonstrated. If the plastic anisotropy must be taken into account, the problem becomes much more complicated. Then, as a rule, the direction of a discontinuity will be neither parallel nor perpendicular to the direction of propagation and moreover there may exist three distinct velocities for each direction varying with the plastic deformation itself.

*D. Radenković.*

**Boley, B. A.:** An approximate theory of lateral impact on beams. *J. appl. Mech.* **22**, 69—76 (1955).

Die Bernoulli-Eulersche Theorie des elastischen Balkens liefert solange ein befriedigendes Abbild der experimentellen Befunde, als nicht die Fortpflanzung von Impulsen kleiner Wellenlänge ins Spiel kommt. In letzterem Falle muß auf die von Timoshenko entwickelte Theorie zurückgegriffen werden, in der Scherungs-

deformationen und Rotationsträgheit mit berücksichtigt werden. Für spezielle Fälle werden exakte Lösungen der Gleichungen von Timoshenko gefunden, im allgemeinen aber ist ihre strenge Behandlung zu schwierig. Hier setzt Verf. mit einer Näherungstheorie ein und studiert die Wirkung transversaler Stöße auf den Balken. Eine eingehende Untersuchung ist der Scherung und Rotation in unmittelbarer Umgebung einer Sprungstelle in der Geschwindigkeit gewidmet. Schon in geringer Entfernung von der Sprungstelle wird deren Einfluß vernachlässigbar klein. Die Größenordnungen einer Reihe von Gliedern in den Grundgleichungen werden abgeschätzt; es zeigt sich, daß in unmittelbarer Umgebung des Stoßpunktes Scherung und Trägheitsmoment von wesentlichem Einfluß sind, besonders innerhalb einer „Grenzschicht“, die der Störungsfront unmittelbar folgt. Die Ausdehnung dieser Schicht ist von der Größenordnung des Balkenquerschnittes. Es ergibt sich damit ein zweifacher Ansatz für die Lösung: einerseits für die unmittelbare Umgebung der Störstelle, das andere Mal außer ihr. Das Näherungsverfahren ist den Verhältnissen innerhalb der Grenzschicht angepaßt und es werden Ausdrücke hergeleitet für die Biegung und für den von der Störung in bestimmter Zeit zurückgelegten Weg. Beide Größen erscheinen als Funktionen von Parametern, die ihrerseits aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebung hergeleitet werden. *E. Hardtwig.*

**Newman, Marcel K.: Effect of rotatory inertia and shear on maximum strain in cantilever impact excitation.** J. aeronaut. Sci. 22, 313—320, 348 (1955).

Mit Hilfe der Theorie von Timoshenko, die beim schwingenden Stab die Schubverformung und die Drehträgheit der Querschnitte berücksichtigt, wird der Einschaltvorgang für einen Stab untersucht, der an einem Ende frei, am anderen eingespannt ist. Der Einspannstelle wird eine Bewegung von der Form einer Sinushalbwellen aufgezwungen. Die Aufgabe wird mittels der Laplace-Transformation gelöst und numerisch ausgewertet. Wählt man als Maß der Beanspruchung die größte an der Einspannung auftretende Dehnung, so zeigt es sich, daß diese Größe mit der aus der elementaren Theorie (Schubverformung und Drehträgheit vernachlässigt) gefundenen gut übereinstimmt, falls das Verhältnis der Frequenz der Sinushalbwellen zur Grundfrequenz des Stabes kleiner als rd. 100 ist. Für größere Werte dieses Verhältnisses bleibt die Beanspruchung fast konstant, während sie nach der elementaren Theorie nahezu linear mit ihm anwächst. *A. Weigand.*

**Brand, R. S.: Inertia forces in lubricating films.** J. appl. Mech. 22, 363—364 (1955).

**Oesterle, Fletcher and Edward Saibel: On the effect of lubricant inertia in hydrodynamic lubrication.** Z. angew. Math. Phys. 6, 334—339 (1955).

## Hydrodynamik:

**Prakash, Prem: Self-superposability in axially symmetrical flows.** Proc. nat. Inst. Sci. India 21, 1—7 (1955).

Im Zuge der Entwicklung einer Theorie der Überlagerung von Flüssigkeitsbewegungen wird für axialsymmetrische Strömungen die Bedingung der Überlagerungsfähigkeit abgeleitet. Außerdem werden Beispiele für sog. selbstüberlagernde Strömungen angegeben wie die stationäre zähe Strömung durch Rohre mit Kreis- oder Kreisringquerschnitt, der nichtzähe Kugelwirbel von Hill sowie die instationäre Strömung mit Stromlinien auf koaxialen Zylindern nach Art des ebenen radialen Wärmeflusses und schließlich die instationäre Strömung durch ein Kreis- oder Kreisringrohr mit Zähigkeitsbedingtem Abklingen. *J. Pretsch.*

**Collins, W. D.: On the steady rotation of a sphere in a viscous fluid.** Mathematika 2, 42—47 (1955).

Es wird eine Analogie abgeleitet zwischen der langsamen stationären Drehung eines Umdrehungskörpers um seine Achse in zäher Flüssigkeit und seiner mit kon-

stanter Geschwindigkeit erfolgenden Bewegung längs seiner Achse in idealer Flüssigkeit. Für die Kugel werden Geschwindigkeiten, Stromfunktion und Druck nach der Reynoldszahl entwickelt und die Näherungslösungen nach einem der Methode von Bickley [Philos. Mag., VII. Ser. **25**, 746—752 (1938)] ähnlichen Verfahren bestimmt. *J. Pretsch.*

**Anzelius, Adolf:** Two flow problems in a viscous fluid. Ark. Fys. **9**, 391—398 (1955).

Für die Stromfunktion in ebener zäher Strömung wird eine Näherungslösung durch Entwicklung nach dem reziproken Wert der kinematischen Zähigkeit angegeben; die Stromlinien werden für einen Sektor und einen Streifen des Strömungsgebietes berechnet. *J. Pretsch.*

**Li, Ting-Yi:** Simple shear flow past a flat plate in an incompressible fluid of small viscosity. J. aeronaut. Sci. **22**, 651—652 (1955).

**Emersleben, O.:** Über eine doppelperiodische Parallelströmung zäher Flüssigkeiten. Z. angew. Math. Mech. **35**, 156—160 (1955).

Als Lösung der hydrodynamischen Grundgleichungen für ein zylindrisches Strömungsbett hatte Verf. [Physik. Z. **26**, 601 (1925)] eine doppelperiodische Parallelströmung mittels Epsteinscher Zetafunktionen angegeben. Durch Überlagerung derartiger Strömungen mit verschiedenen Gewichten werden nunmehr Parallelströmungen mit gemischter Faserstärke erzeugt; dazu werden die Funktionalgleichungen zwischen Zetafunktionen verschiedener Parameter aufgestellt und für die numerische Berechnung vorbereitet. — Eine Zetafunktion dreier Variabler, das Bornsche Grundpotential, hat eine Anwendung für Kristallenergieberechnungen. *J. Pretsch.*

**Zwick, S. A. and M. S. Plesset:** On the dynamics of small vapor bubbles in liquids. J. Math. Physics **33**, 308—330 (1955).

Das Wachsen (bzw. sich Zusammenziehen) einer kleinen kugelförmigen Dampfblase in einer überhitzten (unterkühlten) Flüssigkeit wird betrachtet. Kompressibilität und Zähigkeit der Flüssigkeit werden vernachlässigt, von äußeren Kräften (z. B. Erdanziehung) wird abgesehen, die Wärmeleitung spielt nur in einer kleinen Temperaturgrenzschicht an der Blasenwand eine Rolle. Damit wird man auf ein System aus zwei nichtlinearen Integro-Differentialgleichungen geführt. Beim Wachstum interessiert besonders der Übergangsbereich zur „asymptotischen“ Lösung (vgl. Verf., dies. Zbl. **56**, 205). Eine analytische Lösung läßt sich finden, wenn die Wachstumsphase in drei Zwischenbereiche eingeteilt wird und in jedem Bereich passende Vereinfachungen vorgenommen werden. Da bei der zusammenbrechenden Blase große Temperaturunterschiede auftreten (die Wandtemperatur steigt gegen Schluß sehr stark an), werden hier tabulierte Dampfdruckwerte verwendet und die Gleichungen numerisch integriert. Die numerische Lösung unterscheidet sich in einem Zahlenbeispiel nur sehr wenig von der Rayleighschen Lösung (Wärmeübergang vernachlässigt). *K. Nickel.*

**Martin, M. H.:** An existence and uniqueness theorem for unsteady one-dimensional anisotropic flow. Commun. pure appl. Math. **8**, 367—370 (1955).

Die eindimensionale, nichtstationäre, nichtisentropische Gasströmung, bei der das spezifische Volumen  $\tau$  als Funktion des Drucks  $p$  und der Stromfunktion  $\psi$  willkürlich vorgeschrieben ist, wird auf eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung mit  $p$  und  $\psi$  als unabhängigen Veränderlichen zurückgeführt. Jede Lösung  $\xi(p, \psi)$  dieser Gleichung liefert eine Gasströmung, bei der der Ort  $x$  und die Zeit  $t$  als Funktionen von  $p$  und  $\psi$  vorliegen. Aus der Theorie des Cauchyschen Anfangswertproblems ergibt sich folgender Existenz- und Eindeutigkeitssatz: Für eine vorgegebene Funktion  $\tau(p, \psi)$ , die in einem Gebiet  $R(|\psi - \psi_0| < \delta, p_1 \leq p \leq p_2)$  mit  $\tau(p_0, p) \neq 0$  regulär analytisch ist, kann ein vorgegebener Kurvenbogen  $C(x = x(p),$



$t = t(p)$  als Bahnlinie  $\psi = \psi_0$  in genau einer Gasströmung  $x = x(p, \psi)$ ,  $t = t(p, \psi)$  auftreten, falls  $C$  analytisch ist und  $dt/dp$  in  $p_1 \leq p \leq p_2$  nicht verschwindet. Das Ergebnis wird angewandt auf die Mediengrenze in der Strömung zweier aneinandergrenzender verschiedener Gase. *R. Sauer.*

**Bernstein, B. and T. Y. Thomas:** The differential equations of the stream lines for compressible gas flow. *J. rat. Mech. Analysis* **4**, 703—719 (1955).

Für die stationäre zweidimensionale Strömung eines Gases mit verschwindender Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit leiten Verff. eine Differentialgleichung für die Stromlinien ab. Es werden zu diesem Zweck zunächst der Druck und dann die Dichte aus Eulergleichung, Kontinuitätsgleichung und Energiesatz eliminiert, so daß sich zwei Gleichungen für die beiden Geschwindigkeitskomponenten ergeben. Diese werden dann durch den Neigungswinkel  $\omega$  der Stromlinien und durch  $M^2 - 1$  ersetzt. Schließlich ergibt sich eine nichtlineare Differentialgleichung nur für  $\omega$ , deren Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmethode besprochen wird. *F. Cap.*

**Schubert, Hans und Erich Schincke:** Zur Ermittlung von Unterschallströmungen mit der Transformationsmethode bei quadratischer Approximation der Adiabate. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl.* **101**, Nr. 6, 32 S. (1955).

In früheren Arbeiten von R. Sauer (dies. Zbl. **46**, 425) und W. Müller (dies. Zbl. **56**, 192) wurden Druck-Dichte-Beziehungen hypothetischer Gase aufgestellt, bei denen das Geschwindigkeitspotential oder die Stromfunktion der stationären, ebenen, isentropischen Unterschallströmung in der Hodographenebene der Laplaceschen Differentialgleichung genügt. Die gefundenen Druck-Dichte-Beziehungen enthalten 3 Parameter und gestatten daher quadratische Approximationen von Druck-Dichte-Beziehungen realer Gase. Diese Approximationen sind jedoch nur möglich in Mach-Zahl-Bereichen  $M_1 \leq M \leq M_2$ , welche die Mach-Zahlen  $M = 0$  (Staupunkte) und  $M = 1$  (Schallgeschwindigkeit) nicht enthalten. In der vorliegenden Arbeit wird durch eine analoge Reduktion der Differentialgleichung der Stromfunktion auf die Wellengleichung statt auf die Laplacesche Gleichung erreicht, daß sich quadratische Approximationen auch für  $M = 0$ , also auch für Strömungen mit Staupunkten, durchführen lassen. Im Rahmen dieser quadratischen Approximation wird das Konturproblem behandelt und als Beispiel die zirkulationsfreie Unterschallströmung um ein kreisnahes Profil durchgerechnet. *R. Sauer.*

**Lidov, M. L.:** Zur Theorie der linearisierten Lösungen in der Nähe der ein-dimensionalen automodulierten Bewegungen eines Gases. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **102**, 1089—1092 (1955) [Russisch].

In the general case the characteristics of a not stabilized adiabatic motion of an ideal perfect gas depend on three real parameters, the dimensions of which can be adopted in the following way without restricting the generality:  $\text{Dim}(a) = ML^k T^s$ ,  $\text{Dim}(b) = L^m T^n$ ,  $\text{Dim}(c) = T^l$ . Then there are given the nondimensional variables that have to be used if spherical coordinates are applied, namely the components of the velocity, the pressure and the density. For  $(\varepsilon \cdot t') = 0$  the motion under consideration shall degenerate into an automodel motion with spherical symmetry, and in the ranges where  $(\varepsilon \cdot t')$  is small, it is possible to linearize the corresponding nondimensional system of equations. In the general case the problem is reduced to the solution of a system of five linear partial differential equations with variable coefficients. Then a short discussion is given of the integration of a function constructed of pressure and density over a space that is enclosed between two spheres, and also at small deviations from the spherical symmetry. It is possible to represent the value of this integral still in another way. By differentiating these two expressions with respect to time and by comparing their right sides we arrive after transition to nondimensional variables at a nondimensional equation for the entropy function. From this equation we obtain after introduction of three new variables the equation

that is competent for these motions. Finally the following examples are taken into consideration: 1. The considered motion is not automodel-like but rather spherically symmetric. 2. The case of an arbitrary monomial decomposition of the variable. For small deviations from the automodel-like motions with cylindrical and plane symmetry we obtain analogous relations. The concept of the „automodel“ is not altogether clear from the paper reviewed, but the methods of computation are worthy of notice. The well known papers by Bechert have not been mentioned.

*F. Cap.*

**Riabouchinsky, Dimitri:** Sur une solution du problème des mouvements presque linéaires non permanents d'un fluide parfait compressible. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 716—718 (1955).

Verf. ergänzt eine eigene Arbeit (dies. Zbl. **22**, 87), die sich auf eine nahezu geradlinige Strömung einer kompressiblen Flüssigkeit bezieht, indem er die Behandlung auch auf instationäre Strömungen erweitert. Die Einführung zeitabhängiger kleiner Zusatzpotentiale und Zusatzstromfunktionen ermöglicht es, das Potential und die beiden Stromfunktionen als neue unabhängige Variable zu verwenden. Die Anwendung der Kontinuitätsgleichung führt auf eine durch Zusatzglieder modifizierte Wellengleichung, die man auch als Wellenbewegung in bezug auf ein mit bestimmter Geschwindigkeit translatorisch mitbewegtes Koordinatensystem deuten kann.

*G. Heinrich.*

**Murai, H.:** Theorie über die Gitterströmung beliebig geformter Flügelprofile mit großen Wölbungs- und Dicken-Verhältnissen. Z. angew. Math. Mech. **35**, 48—54, 400 (1955).

Das Sehnengitter wird in bekannter Weise auf den Einheitskreis abgebildet. Die erhaltene Kurve der Profilabbildung läßt sich dann nach Kármán-Trefftz und Theodorsen-Garrick auf den Einheitskreis abbilden. Ein Vergleich mit dem Experiment zeigt recht gute Übereinstimmung. Das Verfahren wird als einfach bezeichnet. In Z. angew. math. Mech. **35**, 400 (1955) ist eine Formelkorrektur angegeben.

*W. Szablewski.*

**Jones, D. S.:** Note on the steady flow of a fluid past a thin aerofoil. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **6**, 4—8 (1955).

Verf. legt seiner Untersuchung über den gleichmäßigen Fluß einer Flüssigkeit hinter einem dünnen Tragflügel die Annahme zugrunde, daß die rückseitige Tragflügelbegrenzung eine gerade Linie mittlerer Lage, also eine Kante sei, für die  $0 \leq X \leq l$ ,  $Y = 0$  mit  $l =$  Länge jener Kante, daß ferner die Geschwindigkeit des Hauptstromes unter dem kleinen Winkel  $\alpha$  zur  $X$ -Achse geneigt sei und die Größe  $U_0$  besitze, daß  $U_0 \cos \alpha + u$ ,  $U_0 \sin \alpha + v$  die Komponenten der Geschwindigkeit der Flüssigkeit sind, wobei  $u$  und  $v$  mit dem Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  in dem Zusammenhang  $u = \partial\Phi/\partial x$ ,  $v = \partial\Phi/\partial y$  mit  $x = X/l$ ,  $y = Y/l$  stehen, daß der Drucküberschuß über den hydrostatischen  $p$  durch  $p = p_0 - \rho U_0 \partial\Phi/\partial x$  darstellbar sei mit  $\rho =$  Dichte der Flüssigkeit und  $p_0 =$  Druck-Überschuß für  $x \rightarrow -\infty$ , daß  $\nabla^2\Phi = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\Phi = 0$ . Weiter sei 1.  $\partial\Phi/\partial y = A_n x^{n-1}$  (mit  $n \geq 1$  für  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y = 0$ ); 2. Normalgeschwindigkeit  $\partial\Phi/\partial y$  kontinuierlich über  $y = 0$ ; 3. Druck ( $\partial\Phi/\partial x$ ) kontinuierlich über  $y = 0$ ,  $x > 1$ ; 4.  $\Phi = O(1)$ ,  $|\text{grad } \Phi| = O(1/r^2)$  für  $r \rightarrow \infty$  mit  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ ; 5. an der schleppenden Kante Erfüllung der Kutta-Joukowski-Bedingung, also  $\partial\Phi/\partial x = O(1)$ ,  $\partial\Phi/\partial y = O(1)$ , wenn sich der Beobachtungspunkt der schleppenden Kante (trailing edge) nähert; 6. Eindeutigkeitsbedingung  $\Phi = O(1)$  für  $r \rightarrow 0$ . Aus 2. und der Tatsache, daß  $\Phi = 0$  für  $y = 0$ ,  $x < 0$  und daß 1. erfüllt sein muß, folgt  $\Phi = O(r^{1/2})$  und  $|\text{grad } \Phi| = O(r^{-1/2})$  für  $r \rightarrow 0$ .

*J. Picht.*

**Woods, L. C.:** Subsonic plane flow in an annulus or a channel with spacewise periodic boundary conditions. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **229**, 63—85 (1955).

Equations for the calculation of the subsonic flow of an inviscid fluid in channels

with boundary conditions which are periodic in distance along the channel (for example flow in a closed circuit such as an annulus) are derived. Three types of boundary conditions are considered, namely, (i) shape of the walls given („direct“ problem), (ii) pressures or velocities on the walls given („indirect“ problem), and (iii) pressures on one wall and the shape of the other wall given („mixed“ problem). The theory, which is shown to have numerous aerodynamic applications, is illustrated by several examples. (Author's summary.) *A. van Heemert.*

**Woods, L. C.:** Unsteady plane flow past curved obstacles with infinite wakes. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **229**, 152—180 (1955).

A theory of unsteady flow about obstacles behind which are wakes or cavities of infinite extent is developed for the case when the velocities and displacements of the unsteady perturbations about the mean steady motion are small. Unsteady Helmholtz flows (constant wake pressure) receive detailed attention both for general non-uniform motion and for the special case of harmonic motions of long duration. A number of possible applications of the theory to aerodynamic problems are indicated, the most important being the flutter of a stalled aerofoil. The classical theory of unsteady aerofoil motion in shown to be a special case of the theory given in this paper. (Author's summary.) *A. van Heemert.*

**Woods, L. C.:** The aerodynamic forces on an oscillating aerofoil in a free jet. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **229**, 235—250 (1955).

The forces acting on an aerofoil placed centrally in a two dimensional jet of inviscid incompressible fluid are calculated exactly for the case when the aerofoil is performing small oscillations about its mean position. The theory is a generalization of the classical theory due to Theodorsen and others for an oscillating aerofoil in an infinite stream. The results, which are expressed in terms of a „generalized Theodorsen function“, have a direct application to the correction of open-jet wind-tunnel measurements on oscillating aerofoils. (Author's summary.) *A. van Heemert.*

**Kainer, Julian H.:** Spanwise variation in the pitching-moment coefficient and the center of pressure due to various basic twist distributions on triangular wings having supersonic leading and trailing edges. *J. aeronaut. Sci.* **22**, 598—606 (1955).

Die Auftriebsverteilung von Flugzeugen wird durch Rumpffinterferenz, Grenzschichten und Aeroelastizität beeinflusst. Diese Einflüsse können durch eine gleichwertige Verwindung der Flügelschnitte ersetzt werden. In der vorliegenden Arbeit wird die linearisierte Theorie des Überschallflügels benutzt, um für gegebene Grundverteilungen der Verwindung (Verwindung konstant, linear, parabolisch, kubisch) an Dreieckflügeln mit reinen Überschallkanten die Längsmomentenverteilung und die Druckpunktlage zu ermitteln. Entsprechende Formeln werden abgeleitet und Zahlenergebnisse für  $M = 1,6$  und einen  $45^\circ$ -Dreieckflügel mitgeteilt. *W. Wuest.*

**Brüning, Gerhard:** Zur Stabilität des Hubschraubers. *Z. Flugwissenschaften* **3**, 241—260 (1955).

Für das Preisausschreiben 1953 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt war u. a. eine systematische und zusammenfassende Behandlung der dynamischen Stabilität des Hubschraubers als Aufgabe gestellt. Die vorliegende Preisarbeit knüpft an die Stabilitätstheorie des Drachenflugzeugs an. Zu den 6 Differentialgleichungen für die translatorischen und rotatorischen Bewegungen des starren Flugzeugs treten aber beim Hubschrauber noch 6 weitere Gleichungen hinzu, welche die Bewegung der Rotorblätter beschreiben. Die Zahl der Stabilitätsderivativa beträgt im allgemeinsten Fall 144. Man ist daher für die praktische Rechnung gezwungen, erhebliche Vernachlässigungen einzuführen. Die von verschiedenen Verfassern entwickelten theoretischen Ansätze unterscheiden sich im wesentlichen durch die Art der getroffenen Vernachlässigungen. Die von Hohenemser aufgestellten Theorien für den Schweb- und Vorwärtsflug werden ausführlich wieder gegeben. Ihre Weiterentwicklung ist auf Grund der zahlreichen Hinweise auf



moderne, vorwiegend amerikanische und englische Arbeiten möglich. Abschließend wird die Stabilisierung des Hubschraubers durch Autopiloten oder spezielle Stabilisatoren besprochen.

W. Wuest.

**Wadhwa, Y. D.:** On boundary layer thickness. Z. angew. Math. Mech. **35**, 295—300 (1955).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **64**, 202) gab der Verf. eine verbesserte Abschätzung für die Dicke der Grenzschicht an einem umströmten parabolischen Zylinder. Wie dort wird in dieser Arbeit nach der synthetischen Methode von Seth die Umströmung eines elliptischen Zylinders in Richtung der großen und der kleinen Ellipsenachse untersucht, als Grenzfall die Umströmung einer endlichen Platte. Es ergibt sich, daß die Grenzschichtdicke von der Größenordnung  $R^{-k/(2+\lambda)}$  ist ( $R$  = Reynoldssche Zahl), wobei  $0 < k < 1$ ,  $\lambda > 0$  sind und  $k$  von der Durchwirbelung der Grenzschicht,  $\lambda$  von  $R$  abhängen. In Formel (3.4) müßte die erste Klammer  $(f' + q)$  heißen, in der ersten der Gleichungen (3.11) steht links  $f$ .

G. Hämmerlin.

**Libby, Paul A. and Marian Visich jr.:** Laminar heat transfer in two-dimensional subsonic effusers. J. aeronaut. Sci. **22**, 425—430 (1955).

Die Arbeit behandelt den laminaren Wärmeübergang in zweidimensionalen Gebläsen, wie sie in Windkanälen gebraucht werden. Annahmen: Ideales Gas, Prandtl-Zahl Eins, lineare Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur. Die Grenzschichtgleichungen für Strömungen mit Druckgradient in Achsenrichtung werden nach Kármán integriert, wobei die vorzugebenden Profile durch Polynome 4. und 5. Grades approximiert werden. Der Einfluß des Druckgradienten auf den Wärmeübergang wird diskutiert und für zwei spezielle Gebläsequerschnitte durchgerechnet. Es zeigt sich, daß bei einer dieser Querschnittformen der Übergang besonders gering ist. Die numerischen Ergebnisse finden sich in graphischen Darstellungen.

G. Hämmerlin.

**Rouleau, W. T. and J. F. Osterle:** The application of finite difference methods to boundary-layer type flows. J. aeronaut. Sci. **22**, 249—254 (1955).

Für die Lösung der Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen bei allgemeinen Randbedingungen wird ein numerisches Differenzenverfahren mit zwei Varianten angegeben. Die Differenzengleichungen werden nach der Relaxationsmethode iterativ gelöst, und es werden auch die Konvergenzbedingungen angegeben. Als Beispiel wird das asymptotische Absaugeprofil längs einer ebenen Platte behandelt, sowie das Problem der Vermischung eines aus einem Kanal austretenden Strahles mit dem umgebenden gleichförmigen Flüssigkeitsstrom. Im ersteren Fall ergibt der Vergleich mit der exakten Lösung eine gute Übereinstimmung.

H. Schlichting.

**Sanyal, Lakshmi:** On „similarity“ solutions of Prandtl's boundary layer equations. Proc. nat. Inst. Sci. India **21**, 8—14 (1955).

Die Frage nach ähnlichen Lösungen zweidimensionaler, inkompressibler Grenzschichten ist von Goldstein und Mangler für den Fall behandelt worden, daß als Maßstabsfaktor für  $u$  die Potentialgeschwindigkeit  $U(x)$  angenommen wird. Läßt man hier einen beliebigen Faktor  $h(x)$  zu, so ergibt sich eine umfassendere Klasse von Potentialgeschwindigkeiten, die ähnliche Lösungen der Grenzschichtgleichungen mit sich bringen. So wird gezeigt, daß mit diesem erweiterten Ähnlichkeitsbegriff auch der von einem schmalen Schlitz in eine ruhende Flüssigkeit ausströmende zweidimensionale Strahl erfaßt wird.

G. Hämmerlin.

**Glauert, M. B. and M. J. Lighthill:** The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **230**, 188—203 (1955).

Für die Berechnung der laminaren Grenzschicht an einem in Längsrichtung  $x$  angeströmten dünnen Zylinder wird eine dem Pohlhausen-Verfahren ähnliche Methode angegeben, indem für die Geschwindigkeitsverteilung  $u(y)$  in der Grenz-

schicht der Ansatz gemacht wird:  $u/U = (1/\alpha) \ln(1 + y/a)$  für  $y \leq \delta \leq a(e^\alpha - 1)$ , wo  $U$  die Außengeschwindigkeit,  $a$  der Zylinderradius und  $\alpha$  als Funktion von  $x/a$  und der Reynoldszahl bestimmt ist. Außerdem wird eine asymptotische Entwicklung der exakten Geschwindigkeitsverteilung in reziproken Potenzen von  $\ln(4\nu x/Ua^2)$  weit stromab angegeben, wo  $\delta \gg a$  ist. Für die Grenzschicht nahe der Nase ( $\delta \ll a$ ) war früher von Seban und Bond (dies. Zbl. 43, 400) und von Kelly (dies. Zbl. 56, 197) eine Reihenentwicklung angegeben worden. Die Pohlhausen-Methode stimmt gut mit beiden Reihen überein und gestattet, zwischen ihren Gültigkeitsbereichen zu interpolieren.

*J. Pretsch.*

**Gregory, N., J. T. Stuart and W. S. Walker:** On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 248, 155—199 (1955).

In dieser Arbeit werden Experimente zur Stabilität dreidimensionaler Grenzschichten beschrieben, und im Anschluß daran wird eine theoretische Untersuchung gegeben. Die ersten Versuche wurden an einem leicht mit Ton bestrichenen schräg angeströmten symmetrischen Tragflügel vorgenommen; sobald Wirbel auftreten, wird an diesen Stellen der feuchte Ton besonders schnell getrocknet (china-clay evaporation technique). Es zeigen sich bei gewissen Bedingungen Streifen, die auf ein System von Wirbeln hinweisen. Weitere Versuche wurden an einer rotierenden Scheibe gemacht. Hier sind drei deutlich getrennte Bereiche zu erkennen: Bis zu einem gewissen Radius laminare Strömung, am äußeren Rand völlig turbulente Strömung; in dem dazwischenliegenden Kreisring sind spiralförmige Wirbelspuren zu sehen (Photographien sind in der Arbeit enthalten). Messungen laminarer und turbulenter Geschwindigkeitsprofile wurden ebenfalls durchgeführt. Der theoretische Teil bringt zunächst einen Überblick über bisher behandelte zwei und dreidimensionale Instabilitäten. Eine Variationsmethode wird entwickelt, die — angewandt auf den Fall der rotierenden Scheibe — eine qualitative Erklärung der oben beschriebenen Erscheinung gestattet. Im Gegensatz zu den an konkaven Wänden auftretenden Görtler-Wirbeln handelt es sich hier um eine Instabilität, deren Komponenten in Richtung der Strömung und senkrecht dazu durchweg von derselben Größenordnung sind. In guter Übereinstimmung mit dem Experiment errechnen sich Wirbel, deren Achsen, bezogen auf die Scheibe, logarithmische Spiralen sind, die ihre Ortsvektoren hier unter einem Winkel von  $103^\circ$  schneiden. Da die Zähigkeit unberücksichtigt bleibt, ist die weniger gute Übereinstimmung zwischen theoretischer und experimenteller Wellenzahl plausibel. Ein Querschnitt senkrecht zu den Wirbelachsen zeigt zwei Reihen von Wirbeln, von denen eine sich direkt an der angeströmten Wand, die andere hingegen in einiger Entfernung davon ausbildet.

*G. Hämmerlin.*

**Görtler, H.:** Boundary layer effects in aerodynamics. Bericht über ein Symposium. Z. Flugwissenschaften 3, 159—164 (1955).

Es wird ein ausführlicher Bericht über das „Grenzschicht-Symposium“ gegeben, das vom 31. 3. bis 1. 4. 1955 von dem National Physical Laboratory, Teddington (England) veranstaltet wurde. Die nachfolgend aufgeführte Vortragsfolge gibt einen eindrucksvollen Querschnitt durch die neuesten Probleme auf diesem Forschungsgebiet: 1. L. Howarth: Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung. 2. R. Timmann: Die Theorie der dreidimensionalen Grenzschichten. 3. M. J. Lighthill: Über die achsensymmetrische Grenzschicht an einem langen dünnen Zylinder. 4. N. Gregory, J. T. Stuart, W. S. Walker: Über die Stabilität der dreidimensionalen Grenzschichten mit Anwendung auf die von einer rotierenden Scheibe hervorgerufene Strömung. 5. G. B. Schubauer, P. S. Klebanoff: Beiträge zur Mechanik des Grenzschichtumschlages. 6. D. Küchemann: Einfluß der Zähigkeit auf den Charakter der Strömung am schiebenden Flügel. 7. R. C. Pankhurst: Einige neuere Untersuchungen über die Methoden der Grenzschichtbeeinflussung. 8. A. D. Young, S. Kirby: Der Profilwiderstand von bikonvexen Profilen und Doppelschneidenprofilen bei Überschallgeschwindigkeit. 9. D. W. Holder, G. E. Gadd: Die Wechselwirkung zwischen Verdichtungsstößen und Grenzschichten bei Überschallströmungen. 10. H. H. Pearcy: Über die durch Verdichtungsstöße hervorgerufene Ablösung turbulenter Grenzschichten bei transsonischer Strömung um Tragflügel. — Die Vorträge werden später ausführlich veröffentlicht werden, so daß an dieser Stelle eine eingehendere Erörterung unterbleiben kann.

*H. Schlichting.*

Szablewski, W.: Wandnahe Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg. Ingenieur-Arch. 23, 295—306 (1955).

Die Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Grenzschicht wird unter Vernachlässigung der Trägheitsglieder mit dem Prandtlschen Mischungswegansatz für Strömungen mit Druckanstieg in geschlossener Form näherungsweise berechnet.

J. Pretsch.

Chandrasekhar, S.: A theory of turbulence. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 229, 1—19 (1955).

Après avoir passé en revue les diverses techniques dont il a été fait usage pour édifier les théories quantitatives de la turbulence, et avoir rappelé leurs insuffisances fondamentales, l'A. annonce son intention de construire une théorie déductive de la turbulence. Il suppose que le fluide est incompressible, obéit aux équations de Navier-Stokes, que la turbulence est homogène, isotrope, stationnaire dans le temps. Ces hypothèses, en l'absence de données sur les conditions aux limites, ne permettent pas de calculer les corrélations doubles (même en supposant qu'on sache résoudre les équations de Navier-Stokes). L'A. les complète par une hypothèse statistique que l'expérience semble assez bien vérifier, et qui constitue un moyen de calcul commode et souvent utilisé depuis quelques années. Si  $Q_{ij} = u_i(\mathbf{r}', t') u_j(\mathbf{r}'', t'')$  désigne les corrélations doubles d'espace et de temps de la vitesse, et

$$Q_{ij,kl} = \overline{u_i(\mathbf{r}', t') u_j(\mathbf{r}', t') u_k(\mathbf{r}'', t'') u_l(\mathbf{r}'', t'')}$$

certaines corrélations quadruples, il suppose que les  $Q_{ij,kl}$  sont reliés aux  $Q_{ij}$  comme dans une distribution normale. Grâce à cette hypothèse, le scalaire  $Q$  qui définit le tenseur  $Q_{ij}$  est fonction de la distance  $r = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|$  et de l'intervalle de temps  $t = |t' - t''|$ , et vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(\partial/\partial r)(\partial^2/\partial t^2 - \nu^2 D_5^2)Q = -2Q(\partial/\partial r)D_5Q,$$

où  $D_5$  est le laplacien isotrope à 5 dimensions, et  $\nu$  le coefficient de viscosité. Si  $f$  désigne la fonction de corrélation longitudinale, et si l'on mesure  $r$  avec une unité de longueur arbitraire  $l$ , et  $t$  avec  $l/\sqrt{u_1^2}$  comme unité, on trouve que

$$\partial^3 f / \partial r \partial t^2 = [f \partial/\partial r + \nu^2 (\partial/\partial r) D_5] D_5 f.$$

Dans cette équation, les effets de l'inertie et de la viscosité sont visiblement additifs. Dans les paragraphes suivants, on se limite au cas où le nombre de Reynolds est infini, c'est à dire à l'étude de l'équation  $\partial^3 f / \partial r \partial t^2 = f(\partial/\partial r) D_5 f$ , qui se trouve en bon accord avec la théorie de Kolmogoroff. Pour les petites valeurs de  $t$ ,  $\Phi = 1 - f$  vérifie l'équation linéaire  $\partial^2 \Phi / \partial t^2 = \epsilon^2 \Phi / \partial r^2 + (4/r) \partial \Phi / \partial r$ . Cette équation admet des solutions de la forme  $\Phi = r^\alpha \psi(t/r)$ , où  $\psi$  est une fonction dont l'expression est donnée. Pour les grandes valeurs de  $t$ , on peut chercher des solutions de la forme  $f = \psi(r)/t^2$ , et tracer les courbes représentatives de diverses fonctions  $\psi$  possibles. Ces solutions élémentaires ne sont d'ailleurs peut être pas celles qui correspondent aux écoulements réels. Mais il est difficile de préciser la totalité des conditions aux limites et de définir les solutions physiquement intéressantes. En outre, les hypothèses d'isotropie et d'homogénéité ne sont pas valables pour les grandes valeurs de  $r$ .

J. Bass.

● Ward, G. N.: Linearized theory of steady high-speed flow. London: Cambridge University Press 1955. XV, 243 p.; 29 text-fig. 30 s. net.

Diese Monographie gibt den heutigen Stand der linearisierten Theorie wieder. Dabei werden neben bekannten auch noch nicht veröffentlichte Resultate angegeben, wodurch die linearisierte Theorie eine Geschlossenheit erhält, wie sie in bisherigen Darstellungen nur selten erreicht wurde. Dies gilt besonders von dem ersten Teil (allgemeine Theorie), und hier wieder von dem ersten (Linearisierung der Bewegungsgleichung) und vierten (Randbedingungen, Luftkräfte, Eindeutigkeits- und Umkehrströmungssätze) Kapitel. Dabei beschränkt sich der Verf. nicht auf wirbelfreie



Strömungen. Der zweite Teil (spezielle Methoden) bringt die Behandlung von Unterschallströmungen um flache Körper (auf der Grundlage der Prandtl-Glauert-Regel und der Prandtischen Theorie der tragenden Linie) und die Tragflügeltheorie für Überschallgeschwindigkeit. Ein Kapitel ist in diesem Teil den konischen Strömungen gewidmet. Schließlich wird die Anwendung der Laplace-Transformation, wie sie vom Verf. in dieser Form eingeführt wurde (dies. Zbl. 34, 117), besprochen. Im dritten Kapitel werden die schlanken Körper untersucht, und zwar zunächst Drehkörper bei axialer Anströmung, sodann allgemeinere schlanke Körper, worunter auch Drehkörper mit Anstellwinkel fallen. Flügel mit kleinem Seitenverhältnis und Drehkörper mit Flügeln werden gesondert behandelt. Ein ausführliches Literaturverzeichnis beschließt die Monographie, die nicht nur dem Lernenden gute Dienste leisten wird, sondern auch dem Kenner dieses weit verzweigten Teilgebietes der Gasdynamik manche Anregungen geben kann. Die Darstellung ist, bei aller Betonung der wesentlichen Dinge, knapp und gut verständlich. *C. Heinz.*

**Samelson, Klaus:** Überschallströmung um unter kleinem Anstellwinkel angeblasene Drehkörper mit anliegender Kopfwelle. Z. angew. Math. Mech. 35, 170—175 (1955).

Die „halblinare“ Methode von R. Sauer (s. z. B. dies. Zbl. 50, 411), bei der mittels Störungsrechnung von einer bekannten Strömung ausgehend eine benachbarte Strömung gewonnen wird, wird auf die Überschallströmung um einen Drehkörper bei kleinem Anstellwinkel angewandt. Als bekannt wird hierbei die axiale Strömung angenommen. Zunächst werden die Störungsgleichungen aufgestellt. Diese werden sodann in Beziehungen zwischen den Ableitungen längs der Charakteristiken umgesetzt. Ferner werden die Randbedingungen angegeben und die Bedingungen für den Durchgang durch die Stoßfront, die erst noch bestimmt werden muß, da sie sich i. a. nicht nur gegenüber der Stoßfront der achsensymmetrischen Strömung dreht, sondern auch deformiert. *C. Heinz.*

**Stewartson, K.:** On the motion of a flat plate at high speed in a viscous compressible fluid. II. Steady motion. J. aeronaut. Sci. 22, 301—309 (1955).

(Teil I, dies. Zbl. 64, 206). Die Theorie der stationären Strömung einer zähen kompressiblen Flüssigkeit hinter einer ebenen Platte bei hohen Machzahlen wird durch eine Erörterung der idealen Strömung zwischen Stoßwelle und Grenzschicht erweitert. In diesem Strömungsgebiet existieren „ähnliche“ Lösungen, welche an die ähnlichen Lösungen der wandnahen Schicht angeschlossen werden können. Die leichte Abänderung der Anschlußbedingung wird dadurch plausibel gemacht, daß sie beim instationären Problem gerechtfertigt ist. Die Grenzschichtgleichungen werden mit Hilfe des Energieintegrals auf diejenigen der inkompressiblen Flüssigkeit reduziert, so daß die für diese ausgearbeiteten Lösungsverfahren (v. Kármán-Pohlhausen) benutzt werden können. *J. Pretsch.*

**Truitt, Robert Wesley:** Free streamline analysis for slotted two dimensional supersonic minimum-length nozzles. J. aeronaut. Sci. 22, 658—659 (1955).

**Jacobs, Willi:** Downwash behind wings at supersonic speeds. A simplified method for calculation and experimental results for wings with small aspect ratio. Flygtekn. Försöksanstalt., Medd. 61, 52 p. (1955).

**Manwell, A. R.:** A new singularity of transonic plane flows. Quart. appl. Math. 12, 343—349 (1955).

Morawetz und Kolodner (dies. Zbl. 50, 198) haben gezeigt, daß in einer ebenen Strömung um ein Profil mit Schalldurchgang keine Grenzlinie (an der die Funktionaldeterminante der Abbildung der Strömungs- auf die Hodographenebene verschwindet) auftreten kann, wenn die Krümmung des Profils endlich ist. Verf. gibt nun Singularitäten der Stromfunktion an, bei denen die Beschleunigung unendlich wird, das Profil aber glatt bleibt. In diesem Falle hat das Bild der Profilkontur in der Hodographenebene einen Knick. Verf. diskutiert die Möglichkeit des

Auftretens einer solchen Singularität und findet Fälle, in denen diese tatsächlich gegeben zu sein scheint. *C. Heinz.*

**Trilling, L. and E. E. Covert: Quasi-steady nonlinear pitching oscillations in transonic flight.** *J. aeronaut. Sci.* **22**, 617—627 (1955).

Beim Pfeilflügel ist der Auftrieb und das Längsmoment jenseits eines kritischen Anstellwinkels, der von der Mach-Zahl und den geometrischen Größen abhängt, nicht mehr proportional zum Anstellwinkel. Diese Erscheinung hängt mit dem seitlichen Abfluß der Grenzschicht zusammen, durch den ein vorzeitiges Ablösen der verdickten Grenzschicht an den Flügelenden hervorgehoben wird. Auch das Auftreten von Verdichtungsstößen bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten ist verantwortlich für das nichtlineare Verhalten. Die Abhängigkeit des Momentes vom Anstellwinkel entspricht dann einer Kurve 3. Grades mit einem Minimum und einem Maximum. Einem bestimmten Längsmoment sind also 3 Stellungen des Flugzeuges zugeordnet, von denen die mittlere instabil ist. Die Gleichungen für die Längsschwingungen eines gepfeilten Flugzeuges werden abgeleitet und zwei Näherungsverfahren für das Problem der Anfangsstörung angegeben. Durchgeführte Rechenbeispiele zeigen, daß bei genügend starker Anfangsstörung das Flugzeug die instabile 2. Gleichgewichtslage erreichen kann, besonders beim Flug in großen Höhen. *W. Wuest.*

**Roumieu, Charles: Sur la structure du choc oblique raccordant deux écoulements uniformes.** *C. r. Acad. Sci., Paris* **241**, 356—357 (1955).

Ausgehend von dem entsprechend verallgemeinerten Gleichungssystem wird gezeigt, daß mit der Struktur des senkrechten Stoßes auch jene des schiefen, stationären Stoßes gegeben ist. Darüber dürften sich allerdings die Bearbeiter dieses Problemkreises schon immer im klaren gewesen sein. Denn es ist eine oft geübte Methode, schiefe und instationäre Stöße mittels Koordinatentransformation aus dem stationären, senkrechten Stoß zu erzeugen, die natürlich auch beim Strukturproblem des Stoßes angewendet werden kann, sofern sich die Bedingungen vor und hinter dem Stoß hinreichend wenig mit dem Ort oder mit der Zeit ändern. *K. Oswatitsch.*

**Womersley, J. R.: Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. The linear approximation for long waves.** *Philos. Mag., VII. Ser.* **46**, 199—221 (1955).

Um die Strömung des Blutes in den größeren Arterien zu verstehen, wird die Bewegung einer Flüssigkeit in einer elastischen Röhre unter periodischem Druckgradienten berechnet. Die Trägheitsglieder werden zunächst vernachlässigt, sollen jedoch durch eine später mitzuteilende Korrektur berücksichtigt werden. Verf. scheint die Arbeit von L. Castoldi [*Rivista Fis. Mat. Sci. natur.*, II. Ser. **14**, 316—322 (1940)] nicht gekannt zu haben. In zäher Strömung ist die Bewegung gedämpft und die Druckwellengeschwindigkeit steigt mit wachsender Frequenz. Bei konstanter Frequenz steigt die Wellengeschwindigkeit mit abnehmender Geschwindigkeit der Flüssigkeit gegen einen Grenzwert, den Lamb schon für ideale Strömung angegeben hat. Die Längsschwingung der Röhrenwand bestimmt die Durchflußmenge, die bis zu 10% größer sein kann als bei starrer Röhrenwand, die demselben Druckgradienten ausgesetzt ist. *J. Pretsch.*

**Kravtchenko, Julien and John S. McNown: Seiche in rectangular ports.** *Quart. appl. Math.* **13**, 19—26 (1955).

Es wird das Geschwindigkeitspotential für die scheinbaren Gezeiten in einem Hafen von rechteckigem Grundriß und konstanter Tiefe mit senkrechten Wänden abgeleitet, wenn die von außen kommende Welle sowie Ort und Größe der Einfahrt gegeben sind. Die Lösungen in Doppelreihen werden für die Fälle der Resonanz und Nichtresonanz aufgestellt; sie sind absolut konvergent. Wegen der Singularitäten und der Unstetigkeit der tangentialen Geschwindigkeitskomponente an der Ein-

fahrtsöffnung muß die analytische Gültigkeit der Lösung noch näher untersucht werden. *J. Pretsch.*

**Šulejkin, V. V.:** Die Gleichungen eines Feldes von Windwellen im flachen Wasser. Doklady Akad. Nauk SSSR **104**, 397—400 (1955) [Russisch].

**Šulejkin, V. V.:** Die Entwicklung von Windwellen im flachen Meer. Doklady Akad. Nauk SSSR **104**, 215—218 (1955) [Russisch].

**Winter, H.:** Beitrag zum hydraulischen Verzweigungsproblem. I. Österreich. Ingenieur-Arch. **9**, 239—249 (1955).

**Heinrich, G. und K. Desoyer:** Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen. Ingenieur-Arch. **23**, 73—84 (1955).

Die Grundwasserströmung ist eine Mikroströmung im unregelmäßigen Gefüge eines Festkörpers, die über eine Mittelwertbildung durch eine Makroströmung ersetzt werden kann. Die Differentialgleichung für die Flüssigkeit wird aus einem verallgemeinerten Filtergesetz (Darcy-Gesetz) genommen. Die auf die Begrenzungsfläche des Festkörpers wirkenden Oberflächenkräfte (Korn-zu-Korn-Kräfte) stehen mit der Schwerkraft des Festkörpers, den Druck- und Reibungskräften der Flüssigkeit im Gleichgewicht. Mit der Relaxationsmethode sollen in einer späteren Mitteilung praktische Beispiele behandelt werden. *J. Pretsch.*

### Elektrodynamik. Optik:

**Vanhuyse, V. J.:** On the proper frequencies of terminated corrugated waveguides. Physica **21**, 269—280 (1955).

Starting from the Maxwell equations, the author deduces the properties of circularly symmetric T. M.-waves in a corrugated wave guide, terminated on both sides in the middle of a corrugation. It is assumed that the longitudinal electric field component at each corrugation mouth is an even function. These properties are known. The interest of the author's method consists in its usefulness at calculating the proper frequencies of closed systems of cavities with slightly different diameters. Following the method worked out in part I, in part II approximate frequency equations are obtained for the different resonance modes of circularly symmetric T. M.-waves in terminated corrugated wave guides, in which the diameters of the cavities may differ slightly. The influence of a definite cavity-diameter on the frequency depends on the considered mode and on the place of the cavity in the system. The results of the theory are tested on systems of 1, 3 and 5 plus 2 half cavities in which one of them has a radius differing from the others. There is a complete agreement between theory and experiment. (From the author's summary.) *H.-J. Hoehnke.*

**Aymerich, Giuseppe:** Guide d'onda anisotrope con „fili“ non perfettamente conduttori. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **10**, 165—171 (1955).

Con una semplice applicazione del teorema di reciprocità e nell'ordine delle usuali approssimazioni, l'A. determina il coefficiente di attenuazione per i modi che si propagano in una guida anisotropa con pareti imperfettamente conduttrici. Osserva inoltre che l'imperfetta conduttività può eliminare il caso di modi diversi che si propagano con la stessa velocità. *D. Graffi.*

**Westpfahl, Konradin:** Zur strengen Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an ebenen Schirmen. Z. Phys. **141**, 354—373 (1955).

Entsprechend einer Methode, wie sie von Hönl (dies. Zbl. **46**, 431) auf skalare Probleme angewandt worden ist, wird die Beugung elektromagnetischer Wellen an ebenen, unendlich dünnen, ideal leitenden Schirmen beliebiger Gestalt untersucht. Die zwei Fälle Schirm bzw. Öffnung ganz im Endlichen werden gesondert behandelt. Im ersten Fall wird das Streufeld aus einem Hertzschen Vektor abgeleitet, der als zweifaches Fourier-Integral angesetzt wird. Zur Bestimmung der Fourier-Transformierten des Flächenstroms ergeben sich zwei simultane Integralgleichungen.



deren Lösung im Prinzip durch Entwicklung nach einem Orthogonalsystem auf ein algebraisches Problem zurückgeführt werden kann. Es wird der Zusammenhang mit dem Huygensschen Prinzip und der Schwingerschen Variationsmethode diskutiert. Im zweiten Fall wird das Beugungsfeld aus einem Fitzgeraldschen Vektor abgeleitet, die weitere Behandlung verläuft analog. Für diesen Fall wird auch eine andere Lösungsmethode angegeben: die zwei Integralgleichungen erster Art werden in eine einzige zweiter Art umgeformt, die durch ein Iterationsverfahren gelöst werden kann. Die nullte Näherung wird als Kirchhoffsche Näherung interpretiert. Anwendungen auf spezielle Probleme werden nicht gegeben. *B. R. A. Nijboer.*

**Franz, Walter und Raimund Galle:** Semiasymptotische Reihen für die Beugung einer ebenen Welle am Zylinder. *Z. Naturforsch.* **10a**, 374—378 (1955).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **56**, 211) wurden von dem ersten Verf. neuartige Reihenentwicklungen für die skalare Wellenfunktion  $u(\varrho, \varphi)$  angegeben, die außerhalb eines unendlich langen Zylinders der Differentialgleichung  $\Delta u + k^2 u = \gamma$  und an dessen Oberfläche  $\varrho = a$  entweder der 1. oder der 2. Randwertbedingung genügt und für  $\varrho \rightarrow \infty$  einen ebenen Wellenzug beschreibt. Der Übergang von der für diese Aufgabe gewöhnlich angegebenen Lösungsreihe zu der oben erwähnten gelingt nach dem gleichen Verfahren, das Watson im Falle der Aufgabe über die Wellenausbreitung um die Erdkugel herum benutzt hat. In den transformierten Reihen treten aber in gewissen Fällen außer den Residuenreihen auch Fouriersche

Integrale auf. Sie haben z. B. die Form  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu(\varphi - \pi/2)} [H_\nu^{(1)}(ak)]^{-1} d\nu$ . Diese Integrale werden in der vorliegenden Arbeit im wesentlichen nach der Sattelpunktmethode ausgewertet. Hierzu müssen die Nullstellen der Funktionen  $H_\nu^{(1)}(x)$  und  $H_\nu^{(1)'}(x)$  bekannt sein. Die Reihen, die für diese Nullstellen angegeben werden, werden ihrerseits aus Entwicklungen berechnet, die die Hankelsche Funktion  $H_\nu^{(1)}(x)$  bei festem  $x$  und variablem  $\nu \approx x$  mit großer Genauigkeit ausdrücken. Nach diesem Verfahren werden für die Beugung einer ebenen Welle am Zylinder Entwicklungen angegeben, die bis zur Größenordnung  $(ak)^{-2}$  gehen. Die Rückstrahlung in Richtung  $\varphi = 0$  kann nach den mitgeteilten Formeln berechnet werden, so lange etwa  $ak > 2$  ist. Die Formeln für die Nullstellen werden für beliebige Werte des Index  $\nu$  angegeben, so daß sie also auch im Falle der Integration der Wellengleichung in Kugelkoordinaten zur Berechnung der Nullstellen von  $H_\nu^{(1)}(x)$  mit  $\nu = 1/2, 3/2, 5/2 \dots$  gebraucht werden können. *H. Buchholz.*

**Signorini, Antonio:** Sopra una questione di ottica geometrica. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* **24**, 37—44 (1955).

Sia dato un mezzo ottico isotropo, sede di una propagazione di luce monocromatica, riferito a un sistema cartesiano ortogonale  $Oxyz$ , e indichiamo con  $r$  la distanza da  $O$  di un punto  $M(x, y, z)$  del mezzo, con  $u_M \equiv u(x, y, z)$  il modulo della velocità di propagazione locale, con  $c$  la velocità nel vuoto, con  $n(x, y, z) = c/u$  l'indice di rifrazione assoluto. — È ben noto che se  $u = \text{cost.}$ , ogni fronte d'onda epicentrale è sferico; tale fatto si verifica però (questo Zbl. **41**, 561), anche se  $u$  può farsi rientrare nel tipo: (1)  $u = \omega x$ , con  $\omega = \text{cost.}$ , ovvero (2)  $u = h r^2 + k$ , con  $h$  e  $k$  costanti. — L'A. dà qui una semplice ed elegante dimostrazione — basata su considerazioni elementari di cinematica e geometria differenziale dello spazio ordinario — della proprietà inversa: se in un mezzo isotropo ogni fronte d'onda epicentrale è sferico, la  $u$  ha necessariamente o l'espressione (1) o quella (2), purché s'intenda che le sfere considerate possano degenerare in piani. *V. Dalla Volta.*

● **Sturrock, P. A.:** *Static and dynamic electron optics.* (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.) London: Cambridge University Press 1955. X, 240 p; 45 text-fig. 30 s net.

Das Buch beschränkt sich auf eine knappe und elegante Vermittlung des theoretischen Rüstzeugs zur geometrisch-optischen Berechnung der Bewegung geladener

Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern, enthält also nichts über die Konstruktion elektronenoptischer Geräte oder ihre Anwendungsgebiete. Infolge der Beschränkung auf die geometrische Elektronenoptik ist von Beugungserscheinungen und konsequenterweise auch vom Auflösungsvermögen der elektronenoptischen Abbildung nicht die Rede. Der Teil „Statische Elektronenoptik“ behandelt die Bewegung geladener Teilchen in zeitlich konstanten Feldern (Elektronenlinsen, Ablenkfelder, Beta- und Massenspektrometern), während die „dynamische Elektronenoptik“ sich auf die Bewegung in zeitlich veränderlichen Feldern bezieht. Hierbei werden als Beispiele das Synchrotron und der Linearbeschleuniger behandelt, nicht dagegen diejenigen Elektronenstrahlgeräte, in denen infolge der Wechselwirkung zwischen Elektronenstrahl und elektromagnetischem Feld die Erzeugung und Verstärkung von Mikrowellen möglich ist. Nicht nur die Fokussierung und Abbildung in den statischen Geräten, sondern auch die Stabilität in Beschleunigern wird aus Variationsprinzipien abgeleitet, wobei die als „perturbation characteristic functions“ bezeichneten Modifikationen der Hamiltonfunktion eine wesentliche Rolle spielen. Hierbei bevorzugt Sturrock das Punkteikonal im Gegensatz zu Glaser, der in seinen Arbeiten die Bildfehlertheorie aus dem gemischten Eikonal abgeleitet. In der „dynamischen Elektronenoptik“ wird, im wesentlichen unter Weiterverwendung der bei der „statischen Elektronenoptik“ verwandten Methoden, die Zeit einfach als zusätzliche Koordinate eingeführt. Dem Begriff der „Fokussierung“ in der statischen entspricht in der dynamischen Elektronenoptik die „Stabilität“.

*F. Lenz.*

**Timm, U.: Zur Berechnung elektrostatischer Linsen.** Z. Naturforsch. **10a**, 593—602 (1955).

Da Ausfallslage und -richtung einer Elektronenbahn aus einer Elektronenlinse ebenso wie aus einem Teil einer Elektronenlinse oder einem System von Linsen in der paraxialen Näherung linear von der Einfallslage und -richtung abhängen, läßt sich dieser lineare Zusammenhang durch eine zwispaltige und zweizeilige Matrix beschreiben, deren Elemente in einfacher Weise von den üblicherweise zur Kennzeichnung der Eigenschaften einer schwachen Linse verwandten „asymptotischen Brennweiten“ und „asymptotischen Brennpunktslagen“ abhängen. Bei Verwendung dieser Formulierung der Eigenschaften elektrostatischer Linsen, die Ch. Fert (dies. Zbl. **47**, 204) bereits verwandt hat, kann man das Zusammenwirken zweier oder mehrerer Linsen durch Multiplikation der entsprechenden Matrizen beschreiben. Ebenso können die Eigenschaften einer einzelnen Linse dadurch berechnet werden, daß man sie in mehrere Abschnitte aufteilt, die Matrizen für jeden dieser Teilabschnitte berechnet und anschließend multipliziert. Als Beispiel werden elektrostatische Immersionslinsen und Systeme aus solchen behandelt. Die Fokussierung, die Brennweite eines Systems aus mehreren Linsen könne den ganzen Bereich von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchlaufen, beruht auf einer Mißdeutung der abgeleiteten Beziehungen. Man kann die asymptotische Brennweite eines solchen Systems zwar wie die einer Einzellinse unendlich machen („teleskopischer Strahlengang“), zwischen zwei teleskopischen Linsenstärken bzw. Linsenabständen liegt aber nie eine Nullstelle, sondern stets ein Minimum der asymptotischen Brennweite.

*F. Lenz.*

**Thomas, Johannes: Zur Theorie der Elektronenbahnen in einer Elektronenschleuder (Betatron).** Math. Nachr. **13**, 73—128 (1955).

In Erweiterung und als Fortsetzung der vom Ref. 1946/47 durchgeführten, 1950 veröffentlichten Untersuchungen „Zur Theorie der Elektronenbeschleunigung im magnetischen Wechselfeld“ [Optik **6**, 40—55, 61—79, 133—144 (1950)] werden vom Verf. auf Veranlassung des Ref. die Elektronenbahnen unter Zugrundelegung des Hertzschen Vektors  $\mathfrak{H}$  mit Berücksichtigung der relativistischen Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit untersucht. Es werden die Bewegungsgleichungen für das einzelne Elektron sowie Bedingungen für den Sollkreis aufgestellt, auf dem

sich das Elektron unter dem Einfluß des elektromagnetischen Feldes bewegt. Auch für den Fall, daß sich die Anfangswerte (Lage und Geschwindigkeit) eines Elektrons nur wenig von denen eines Sollkreis-Elektrons unterscheiden, wird das System der Bewegungsgleichungen integriert. Die Integrale werden nach Potenzen der Variationen der Anfangswerte entwickelt. Vernachlässigung aller Bahngrößen-Variationen höherer als erster Ordnung ergibt die Bahngleichungen erster Ordnung. Das sich hierbei ergebende System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung in drei zeitabhängigen Variablen wird durch Einführung neuer Variabler als System von Differentialgleichungen erster Ordnung in 6 zeitabhängigen Variablen geschrieben. Ihre partiellen Ableitungen nach den Anfangswerten der unabhängigen Variablen bilden die Entwicklungskoeffizienten der linearen Glieder, also die Bahngrößen (erster Art und) erster Ordnung, deren physikalische Bedeutung angegeben und deren Werte berechnet werden. Einführung des elliptischen Normalintegrals führt die zeitvariablen Funktionen  $\cos \omega t$ ,  $\sin \omega t$  und  $\sqrt{\sin^2 \omega t + (c^4 m_0^2 / e^2 \omega^2 \psi^*(\tilde{x}, 0))}$  in die Jacobischen elliptischen Funktionen  $\operatorname{sn} x$ ,  $\operatorname{cn} x$  und  $\operatorname{dn} x$  über und ergibt ein neues System von 6  $\times$  6 simultanen Differentialgleichungen, die sich zu 6 Differentialgleichungen 3. Ordnung, 6 Differentialgleichungen 2. Ordnung und 6 Differentialgleichungen 1. Ordnung zusammenfassen lassen, von denen sich die Differentialgleichungen 3. Ordnung durch einmalige Integration in Differentialgleichungen 2. Ordnung umformen lassen. Die Differentialgleichungen 2. Ordnung erfordern die Lösung einer Laméschen Differentialgleichung. Dadurch gelingt es, das allgemeine Integral des ursprünglichen Systems von Differentialgleichungen anzugeben und die Bildfehlerkoeffizienten zu berechnen. Es werden Stabilitätsbedingungen abgeleitet, die mit den Stenbeckschen identisch sind. Es werden die „Fokussierungsbedingungen“ — insbesondere für die zur Sollkreisebene geneigten Elektronenbahnen — aufgestellt bzw. diskutiert. — Die Bahngrößen erster Art aber höherer als erster Ordnung sind nun durch Quadraturen auffindbar. — Es werden weitere Untersuchungen der Bahnverhältnisse unter Benutzung des Azimutalwinkels (statt der Größe  $\omega t = \tau$ ) als unabhängige Variable durchgeführt. — Bestimmung des Sollkreisradius  $R$  und der das Feld kennzeichnenden Funktion  $\Psi^*(r, z)$ , für die die Fokussierungsbedingungen erfüllt ist.  $\Psi^*(R, 0)$  darstellbar als dreigliedrige Summe Besselscher Funktionen erster Ordnung (verschiedener Argumente), deren Koeffizienten so zu bestimmen sind, daß drei angegebene Gleichungen erfüllt sind. Angabe der Gleichungen der zur Realisierung des geeigneten Feldes erforderlichen Polschuhform.

*J. Picht.*

**Nardini, Renato:** Osservazioni su una relazione energetica della magnetoidrodinamica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 376—377 (1955).

Verf. beweist, daß in der Magneto-Hydrodynamik dieselbe energetische Beziehung gilt wie diejenige, die entsteht, wenn ein elektromagnetisches Feld sich in einer Flüssigkeit, unabhängig von ihrer Bewegung, ausbreitet. Es wird auch bewiesen: wenn die Gültigkeit jener Beziehung angenommen wird und der übliche Ausdruck der Kraft auf einem Stromelement benützt wird, das einem magnetischen Feld unterworfen ist, ist es möglich, die charakteristischen Gleichungen der Magneto-Hydrodynamik zu erhalten.

*D. Graffi.*

**Loinger, Angelo:** Sull'elettrodinamica classica dell'elettrone puntiforme. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 309—313 (1955).

Verf. diskutiert die Herleitung der Lorentz-Diracschen Bewegungsgleichungen für ein Elektron im elektromagnetischen Feld.

*G. Höhler.*

### Relativitätstheorie:

**Straneo, Paolo:** A cinquant'anni dalle maggiori scoperte di A. Einstein. Archimede 7, 97—107 (1955).



**Matsumoto, Toshizô:** Sur la déduction axiomatique des formules de transformation de Lorentz. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 29, 55—58 (1955).

Une déduction des formules de Lorentz-Poincaré où l'on préfère ne pas poser au départ le postulat de l'invariance de  $c$ . *O. Costa de Beauregard.*

**Prosperi, Giovanni Maria:** Sulle equazioni relativistiche del moto di una particella soggetta a forze derivanti da potenziale scalare. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 69—74 (1955).

Spezielle Relativitätstheorie. Als relativistische Verallgemeinerung von  $m\ddot{x} = -\text{grad } \varphi(x, t)$  schlägt Verf.  $(d/d\tau) [(m_0 + c^{-2}\varphi) \dot{x}_\mu] = -\varphi_{,\mu}$  vor. Diese Gleichungen lassen sich aus einem Variationsprinzip herleiten, können in hamiltonscher Form geschrieben werden und folgen im Limes  $\hbar \rightarrow 0$  aus der Dirac- oder der Klein-Gordon-Gleichung. Beim Übergang zur Hydrodynamik einer idealen Flüssigkeit liefern sie die von Pauli (Encyklop. d. Math. Wiss., Leipzig 1922) angegebenen Bewegungsgleichungen. Analoge, aber von den Paulischen verschiedene Bewegungsgleichungen finden sich bei Einstein (The Meaning of Relativity, 4. ed., dies. Zbl. 37, 420); ein Vergleich der entsprechenden Beziehungen der Punktmechanik spricht zugunsten der Paulischen Gleichungen. *W. Urich.*

**Duimio, Fiorenzo:** Su una generalizzazione della dinamica relativistica della particella. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 75—78 (1955).

Spezielle Relativitätstheorie. Variiert man in dem mit der Lagrangefunktion  $L = \dot{x}_\mu \dot{x}_\mu / 2 + A_\mu(x) \dot{x}_\mu + B(x)$  gebildeten Wirkungsprinzip die  $x_\mu$  und die Eigenzeit unabhängig voneinander, so erhält man die Bewegungsgleichungen eines Teilchens der variablen Masse  $m_0 = 1/\varrho + (\varrho/c^2) B(x)$  ( $\varrho$ : willkürliche Konstante) in dem elektromagnetischen Feld  $(c/e) A_\mu(x)$ . *W. Urich.*

**Szamosi, G. and G. Marx:** Classical motion of the nucleons in a scalar meson field. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 4, 219—236 (1955).

In einem skalaren Mesonenfelde ist die Kraft auf ein Nukleon bei Außerachtlassung des Eigenfeldes eine reine Gradientkraft, d. h. die Bewegungsgleichung lautet in den üblichen Bezeichnungen  $dMu_i/d\tau = -\partial V/\partial x_i$ . Man schließt daraus durch Multiplikation mit  $u^i$  mit Rücksicht auf  $u_i u^i = -c^2$ , daß  $M = m + V/c^2$ , wo  $m$  eine konstante Masse ist. Für  $V < -mc^2$  wird daher  $M$  negativ, was sich dahin auswirkt, daß eine anziehende Zentralkraft bei einem gewissen Radius in Abstoßung umschlägt. Die Verf. diskutieren das an einigen Beispielen im einzelnen. *W. Wessel.*

**Melone, S.:** Sulla interazione di masse in movimento. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 68—74 (1955).

Der Verf. zeigt, daß eine sich bewegende Masse einen Feldvektor  $\vec{K}$  erzeugt, der von der Massendichte und Geschwindigkeit abhängig ist. Dieses Feld nennt er unberechtigterweise „kinematisch“, obwohl es eigentlich eher „kinetisch“ ist. Vorerst ist dieses Feld nicht bestimmt, da von ihm nur  $\text{rot } \vec{K}$  gegeben ist. Der Verf. nimmt dann den Gravitationsfeldvektor  $\vec{G}$  zu Hilfe und angesichts der erwiesenen Mangelhaftigkeit der Voraussetzung, daß dieser konservativ ist, nimmt er an, daß  $\text{rot } \vec{G} = h (\partial \vec{K} / \partial t)$ , wobei sich aus anderen zu erfüllenden Bedingungen ergibt, daß  $h = \frac{1}{c^2}$ . Diese Annahme machte der Verf. auf Grund der Analogie, die zwischen den Beziehungen des „kinematischen“ Feldvektors  $\vec{K}$  und des Gravitationsfeldvektors  $\vec{G}$  einerseits und zwischen den Beziehungen des elektrischen Feldvektors  $\vec{E}$  und des magnetischen Feldvektors  $\vec{H}$  andererseits besteht. Auf diese Weise kommt der Verf. zu vier Differentialgleichungen, die diese beiden Feldvektoren charakterisieren. Aus diesen ergibt sich dann, daß sich dieses „kinematische“ Gravitationsfeld

mit der Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt und daß sich zwei bewegende Massen untereinander mit einer Kraft anziehen, die dem durch ein sehr kleines — wegen des Faktors  $\frac{1}{c^2}$  — von der Massengeschwindigkeit abhängendes Zusatzglied verbesserten Newtonschen Gesetz entspricht und die sich im Falle der ruhenden Massen auf die Newtonsche Kraft reduziert.

*T. P. Angelitch.*

**Park, David:** Radiations from a spinning rod. Phys. Review, II. Ser. 99, 1324—1325 (1955).

Ableitung von Formeln für die Gravitationsstrahlung sowie für die elektromagnetische Strahlung, welche von einem rotierenden, elektrisch geladenen, langgestreckten Zylinder emittiert werden (Drehachse senkrecht zur Zylinderachse).

*A. Papapetrou.*

**Lyness, R. C.:** Some considerations of gravity. Math. Gaz. 39, 109—112 (1955).

**Ehlers, Jürgen:** Exakte Lösungen der Einstein-Maxwellschen Feldgleichungen für statische Felder. Z. Phys. 140, 394—408 (1955).

Es werden die bekannten, aus der additiv zusammengesetzten Lagrange-Funktion sich ergebenden Feldgleichungen des kombinierten Gravitations- und elektromagnetischen Feldes für den Fall eines statischen Gravitationsfeldes und eines reinen elektrostatischen bzw. magnetostatischen Feldes diskutiert und verschiedene, meist schon bekannte Lösungen abgeleitet.

*A. Papapetrou.*

**Pham Mau Quân:** Les équations du champ pour un schéma fluide-champ électromagnétique. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 598—600 (1955).

L'A. étudie, en relativité générale, le mouvement d'un fluide thermodynamique en présence d'un champ électromagnétique. Si  $G_{\alpha\beta}$  et  $H_{\alpha\beta}$  sont les deux tenseurs représentant ce champ à l'intérieur de la matière, la contribution électromagnétique au tenseur d'impulsion-énergie est donnée, selon l'A., par le tenseur symétrique  $\tau_{\alpha\beta} - (1 - l m) \tau_{\alpha\sigma} u^\sigma u_\beta$  où  $u$  est le vecteur-vitesse unitaire,  $\tau_{\alpha\beta} = (1/4) g_{\alpha\beta} (G^{\lambda\mu} H_{\lambda\mu}) - G_{\lambda\alpha} H^{\lambda}_{\beta}$  et où  $l$  et  $m$  sont le pouvoir diélectrique et la perméabilité magnétique. Les équations du mouvement sont données par les conditions de conservation du tenseur d'impulsion-énergie obtenu en ajoutant au tenseur du fluide thermodynamique la contribution précédente.

*A. Lichnerowicz.*

**Winogradski, Judith:** Sur les équations du champ généralisé d'Einstein-Schrödinger. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 945—947 (1955).

Betrachtungen über die Invarianzeigenschaften der Gleichungen, welche sich in der einheitlichen Feldtheorie mit nicht-symmetrischem  $g_{\mu\nu}$  aus dem Variationsprinzip  $\delta \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d\tau = 0$  ergeben.

*A. Papapetrou.*

**Simoni, Franco de:** Sulle equazioni di campo della teoria relativistica unitaria. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 297—304 (1955).

Das Variationsprinzip der einheitlichen Feldtheorie mit nichtsymmetrischem  $g_{\mu\nu}$  wird durch Einführung eines zusätzlichen Termes in der Lagrange-Funktion so verallgemeinert, daß man daraus durch passende Wahl dieses Termes sowohl die Einsteinschen und Schrödingerschen Feldgleichungen wie auch die von Kursunoglu und Bonnor vorgeschlagenen Modifizierungen erhält.

*A. Papapetrou.*

**Lenoir, Marcel:** Équations approximatives de la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 1400—1402 (1955).

Nach Lichnerowicz spielt in der einheitlichen Einsteinschen Feldtheorie der Vektor  $l_{\alpha\beta}$ , definiert durch  $l_{\alpha\sigma} g^{(\beta\sigma)} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ , die Rolle des metrischen Tensors (vgl. dies. Zbl. 56, 440). Verf. untersucht Approximationen der Gleichungen der Theorie unter Benutzung dieses Tensors.

*W. Barthel.*

**Bose, S. N.:** Solution d'une équation tensorielle intervenant dans la théorie du champ unitaire. Bull. Soc. math. France 83, 81—88 (1955).

Die Bestimmung der Übertragungsparameter  $\Gamma_{ij}^h$  aus  $\nabla_j g_{ih} = 0$  ( $g_i = s_i$ ,

+  $a_{ij}$ ; vgl. Bose, dies. Zbl. 55, 210) erfordert die Lösung einer Tensorgleichung. In dieser Arbeit wird diese Lösung berechnet als Funktion des Tensors  $C^h_i = s^{hj} a_{ji}$  und ihrer Invarianten. J. Haantjes.

**Ikedai, Mineo:** On static solutions of Einstein's generalized theory of gravitation.

II. Progress theor. Phys. 13, 265—275 (1955).

Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 56, 217), in der bemerkt wurde, daß man in der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie mit nichtsymmetrischem  $g_{\mu\nu}$  ein Vektorpotential einführen kann. In der vorliegenden Arbeit werden diejenigen Lösungen der Feldgleichungen diskutiert, welche einem „magnetostatischen“ Feld entsprechen. Dabei wird aber nicht von einem Vektorpotential, sondern von einem skalaren (magnetostatischen) Potential Gebrauch gemacht.

A. Papapetrou.

**Vaidya, P. C.:** A new static spherically symmetric solution of Einstein's unified field theory. Proc. phys. Soc., Sect. A 68, 260—262 (1955).

**Mavridès, Stamatia:** Sur une nouvelle définition du courant et de la charge en théorie unitaire d'Einstein. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 404—406 (1955).

**Newman, Ezra and Peter G. Bergman:** Lagrangians linear in the „velocities“. Phys. Review, II, Ser. 99, 587—592 (1955).

Ausführliche Diskussion der mit der Hamiltonschen Formulierung zusammenhängenden Fragen bei Feldtheorien, deren Lagrange-Funktion linear in den Zeitableitungen der Feldgrößen ist.

A. Papapetrou.

**Infeld, L.:** Equations of motion for linear field-theories. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 213—216 (1955).

In der Theorie eines Feldes, für welches lineare Feldgleichungen gelten (z. B. elektromagnetisches Feld in der speziellen Relativitätstheorie), muß man die Bewegungsgleichungen unabhängig von den Feldgleichungen postulieren. Betrachtet man aber auch das Gravitationsfeld, so werden aus den (nicht mehr linearen) Feldgleichungen des kombinierten Feldes die Bewegungsgleichungen folgen.

A. Papapetrou.

**Fabre, Hervé:** L'action photonique en gravitation et en cosmologie. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 158—160 (1955).

### Quantentheorie:

● **Döring, Werner:** Einführung in die Quantenmechanik. (Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher, Band X.) Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1955. 517 S. 31 Fig. DM 26,—.

Der Verf. des vorliegenden Buches bemüht sich bei seinen Darlegungen in wohlthuender Weise um mathematische Strenge. Damit soll nicht bloß gesagt sein, daß er ohne Benutzung der Diracschen Deltafunktion auskommt. Gleichzeitig werden jedoch beim Leser keine übermäßig großen mathematischen Vorkenntnisse vorausgesetzt. Über weite Gebiete findet die Diracsche Operatorformulierung der Quantentheorie Verwendung; derartige Beweisführungen ohne Einführung einer Darstellung lesen sich, wie dem Ref. scheint, mit einem gewissen ästhetischen Genuß. Auf der physikalischen Seite werden die Beziehungen zwischen klassischer Wellentheorie, klassischer Partikeltheorie und Quantentheorie besonders klar herausgearbeitet. Dementsprechend wird der Zugang zur Quantenmechanik von beiden klassischen Standpunkten aus erarbeitet. Der Autor beschränkt sich durchwegs auf die nichtrelativistische Quantenmechanik. Von einer handbuchartigen Vollständigkeit des Stoffes kann man nicht sprechen; doch werden viele ausgewählte Probleme mit großer Ausführlichkeit behandelt.

K. Baumann.

**Bohm, D., R. Schiller and J. Tiomno:** A causal interpretation of the Pauli equation. (A). Nuovo Cimento, X. Ser. 1, Suppl., 48—66 (1955).



Continuation d'un précédent travail où l'on définissait une équivalence entre le modèle „causal“ de Madelung et celui de De Broglie. L'on introduit une définition du „spin“ en hydrodynamique, et ceci permet d'interpréter certaines relations de la théorie de la particule à spin de Pauli. *O. Costa de Beauregard.*

**Bohm, D. and R. Schiller: A causal interpretation of the Pauli equation. (B).** *Nuovo Cimento, X. Ser. 1, Suppl., 67—91 (1955).*

Suite du précédent travail. On montre que la théorie de la particule à spin de Pauli correspond à un cas particulier de l'hydrodynamique avec spin selon les AA. Application de la théorie aux états atomiques stationnaires, et à la mesure des moments cinétiques. *O. Costa de Beauregard.*

**Gupta, K. K.: The Green's functions for equations of particles of arbitrary spin. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 41, 231—238 (1955).**

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur formalen Theorie der sogenannten Green-schen Funktionen zu den von Bhabha (dies. Zbl. 35, 424) angegebenen allgemeinen Feldgleichungen:  $(-i \alpha^k \partial_k + \chi) \psi = 0$ . Diese Gleichung beschreibt bekanntlich ein Teilchen mit mehreren Massenwerten  $\chi/a_1, \chi/a_2, \dots$ . Zunächst wird  $S(x)$  als eine Linearkombination (mit Matrizen-Differential-Koeffizienten) der Funktionen  $\Delta_r(x)$  zu den Massenwerten  $\chi/a_r$  definiert, und gezeigt, daß diese der Gleichung  $(-i \alpha^k \partial_k + \chi) S(x) = 0$  genügt. Weiter wird gezeigt, daß die durch die Ersetzung von  $\Delta_r$  durch  $\Delta_r(x)$  daraus hervorgehende Funktion  $\tilde{S}(x)$  der Gleichung

$$(-i \alpha^k \partial_k + \chi) \tilde{S}(x) = -[(1/\chi) i \alpha^k \partial_k]^m \delta(x)$$

genügt. Schließlich wird unter Benutzung von  $S$  eine Funktion  $G(x)$  angegeben, die die Gleichung  $(-i \alpha^k \partial_k + \chi) G(x) = -\delta(x)$  befriedigt, und die entsprechende Feynmansche Funktion angeschrieben. *F. Penzlin.*

**Hasegawa, Kazu and Shukô Azuma: Multiple scattering phase shifts and nuclear potential. Progress theor. Phys. 13, 360—366 (1955).**

Die Verf. verallgemeinern eine von Sawada [Progress theor. Phys. 5, 36 (1950)] aufgestellte Beziehung zwischen der Selbstenergie eines Kernes und den Phasenverschiebungen der Feldquanten, die an der Nukleonenquelle gestreut werden auf den Fall von zwei Nukleonenquellen, die mittels skalarer Mesonenpaare in Wechselwirkung stehen. Die Summe der Phasenverschiebungen kann aus der  $S$ -Matrix abgeleitet werden und es wird gezeigt, daß die Selbstenergie des Zweinukleonensystems gleich ist der Summe der doppelten Nukleonenselbstenergie eines Kernes plus dem Nukleonenpotential, wobei letzteres mit dem von Wentzel identisch ist. *P. Urban.*

**Mower, Lyman: Variational calculation of electron scattering by a static potential. Phys. Review, II. Ser. 99, 1065—1069 (1955).**

Es wird die Genauigkeit der Schwingerschen Variationsmethode für die näherungsweise Bestimmung der Streuamplitude für den Fall elastischer Streuung von Elektronen an einem statischen Yukawa-Potential untersucht, wobei acht verschiedene Formen von Versuchs-Wellenfunktionen Verwendung finden. Die Ergebnisse werden durch Vergleich der Übereinstimmung mit einer exakten Lösung des Problems kontrolliert. *P. Urban.*

● **Thirring, Walter E.: Einführung in die Quantenelektrodynamik. Wien: Verlag Franz Deuticke 1955. XII, 122 S., 18 Diagramme im Text, Ganzln. sfr./DM 17,50.**

Mit dem vorliegenden Büchlein erscheint die erste Darstellung der Quantenelektrodynamik in deutscher Sprache, die wesentlich auf den im letzten Jahrzehnt gewonnenen Resultaten aufbaut. In der Einleitung werden sehr interessante allgemeine Betrachtungen über die Größenordnungen quantenelektrodynamischer Effekte angestellt. Nach einem kurzen Abriß der klassischen Elektrodynamik beginnt der Teil I: „Quantelung der freien Felder“. Verf. schließt sich hier eng an die bekannte Darstellung von Schwinger (dies. Zbl. 43, 422) an.

Der Teil II: „Felder in Wechselwirkung“ behandelt ausschließlich die Quantenelektrodynamik. Durch die Benutzung besonderer, auf diesen Spezialfall zugeschnittener Methoden umgeht der Verf. die Diskussion der Wechselwirkungsdarstellung und des Yang-Feldman-Formalismus. Der Ref. ist nicht sicher, ob man dies als einen Vorteil der Darstellung werten soll. Auch hätte er sich eine eingehendere Untersuchung der mit dem Vakuum und der Lorentzbedingung zusammenhängenden Fragen gewünscht. Es folgt die Durchrechnung einiger wichtiger spezieller Prozesse. Dabei kommt (leider etwas am Rande) auch die Graphentechnik zur Sprache. Der letzte Paragraph von Teil III: „Grenzen der Theorie“ bringt schließlich eine Skizze der Renormierungstheorie. Eine Reihe von „Aufgaben“ mit Lösungen ergänzt die Darstellung. *F. Penzlin.*

**Valatin, J. G.: State vector and quantization in an over-all space-time view.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **229**, 221—234 (1955).

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der sogenannten „Hyperquantisierung“ einer Feldtheorie. Der „Zustandsvektor“ einer solchen Formulierung wird als Funktional gewisser äußerer Quellen betrachtet, und die Feldgleichungen der Theorie enthalten funktionale Ableitungen dieses Zustandsvektors nach den äußeren Quellen. Ähnliche Formulierungen der Theorie sind schon früher von Hori (dies. Zbl. **47**, 217), J. L. Anderson [Phys. Review, II. Ser. **94**, 703—711 (1954)], Coester [Phys. Review, II. Ser. **95**, 1318—1323 (1954)], Kristensen [Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **28**, no 12 (1954)] u. a. gegeben. Der Zusammenhang der hier gegebenen Formulierung mit den früheren Ergebnissen wird in Einzelheiten diskutiert. *G. Källén.*

**Nakai, Shinzo: Point transformation and its application.** Progress theor. Phys. **13**, 380—388 (1955).

It is tried to extend to field theory the correspondence, which is established between those special canonical transformations in point mechanics, which are termed extended point transformations, and certain unitary transformations in quantum theory, which have been constructed by Jordan in terms of the classical generating functions. For boson fields the extension is obvious, but the transformations are not the most general canonical ones. For fermion fields the transformations are general in a certain sense and the extension is not obvious. In the latter case the transformation operator is derived as an infinite series, which in general is not convergent. A simple case is treated in which it is convergent and unitary indeed. Applications are given by making instead of certain unitary transformations after quantization the corresponding extended point transformations before quantization. This is carried out for the Case-Dyson-Foldy transformation and for the elimination of longitudinal photons. *H. J. Groenewold.*

**Urbach, V. Ju.: Verallgemeinerte Theorie der Vektorfelder.** Doklady Akad. Nauk SSSR **101**, 1043—1046 (1955) [Russisch].

In the case of the non-linear generalization of the theory with the geometrical method a certain „non-pythagorean“ 4-dimensional auxiliary space with  $ds = \gamma_i dx_i$  must be co-ordinated to the vector field, whereby  $\gamma_i$  represent the generalized Dirac matrices. Next the Lagrangian as a natural generalization of Maxwell's Lagrangian and the energy momentum tensor are found for a free field and transformed by means of a suitable coordinate-transformation. After having obtained these fundamental expressions it is possible to leave geometrical interpretation aside and to consider the quantities  $\gamma_i$  simple as being a quality of the field, in which case, in classical approximation, the above mentioned commutation does not apply. In the case of weak fields one obtains the electrodynamics of Maxwell-Lorentz, and by comparison of the corresponding expressions for the Lagrangian and the energy momentum tensor it is possible to determine the coefficient occuring therein. Euler's equation of the free static spherically sym-

metric field are solvable, and if an electron is taken as a test charge, it applies the Coulomb potential; if, however,  $r$  tends towards zero, the potential in the case of  $r$  being smaller than  $r_0$  grows abruptly. With this potential the total energy of the electromagnetic field of the electron is computed and the quantization necessary for the computation of the quantum correction is discussed. From the non-linear Lagrangian the non-linear meson field equation is derived, and the solution in first approximation and a diagram for the exact potential are given. If  $g^2/\hbar c$  is approximately equal to 12, the linear theory is no longer applicable to the range with non-vanishing potential, and therefore the Yukawa potential is unsuitable even in first approximation. Besides, the non-linear theory avoids the dipole difficulty in connection with the computation of spin interaction.

*F. Cap.*

**Bogoljubov, N. N. and D. V. Širkov:** Anwendung der Renormierungsgruppe zur Verbesserung der Formeln der Störungstheorie. Doklady Akad. Nauk SSSR **103**, 391—394 (1955) [Russisch].

From a previous work (N. N. Bogoljubov, D. V. Širkov, Doklady Akad. Nauk SSSR **103**, 203—206 (1955)], in which the general equations developed by Lie for the renormalization group in quantum electrodynamics were ascertained, the 2 equations for  $d$  and  $s$  are taken over, and a relationship between the charge  $e^2$  appearing in these equations with the experimental charge  $e_0^2$  is given. For the asymptotic region of large impulses dealt with here the above mentioned equations can be simplified. By integration of the equation for  $d$  one obtains the equation of M. Gell-Mann and F. E. Low (this Zbl. **57**, 214), and the equation for  $s$  is transformed. Next, the relationship between  $e$  and  $e_0$  is specialized for the case  $k^2 \gg m$ . In view of the fact that in the case of large impulses the quantity  $e^2 d$  does not remain small in the case of all  $x$  but assumes values of the order of magnitude 1 and more, the domain of large charges (strong coupling) must be examined. If a certain integral has a finite value, the possible values of  $|k^2|$  are limited, and present-day quantum-electrodynamics is incomplete. As this problem cannot be solved with present-day methods, it is necessary to remain within the area  $e^2 \ln(k^2/m^2) \ll 1$ , where an asymptotic development is obtained from the equations studied. From this a development for the function  $d$  is derived and an analogous improvement of the developments of the ordinary disturbance theory is given for the coefficients  $a$  and  $b$  of the Green function of fermion. On the basis of the above mentioned general group equations it is possible to discuss also other areas, as e. g.  $k^2 \sim m^2$  where  $a$  and  $b$  have „infra-red singularities“. This case is studied here in the second theoretical approximation, and the known exponential singularity is obtained. Also the „sumit operator“  $\Gamma$  may be analyzed in an analogous manner. In conclusion the application of this method to meson theory is outlined in short.

*F. Cap.*

**Finkelstein, R. J.:** On non-local form factors. Nuovo Cimento, X. Ser. **1**, 1113—1119 (1955).

The bilocal field quantity is assumed to be factorizable in terms of Yukawa variables  $x, r$  (denoted in this paper by  $\bar{x}, x$ ). The internal part of the field quantity is treated classically in a fluid-like way. It is supposed that elementary particles are eigensolutions of the fluid corresponding to a definite value of the charge and to discrete mass eigenvalues. This paper is to be regarded rather as an intuitive programme which needs further precisation.

*J. Rayski.*

**Miyatake, Yoshio:** The relation between Jordan's non-localized theory and Pais-Uhlenbeck's theory. Progress theor. Phys. **13**, 458—459 (1955).

**Olsen, Haakon:** Outgoing and ingoing waves in final states and bremsstrahlung. Phys. Review, II. Ser. **99**, 1335—1336 (1955).

Es werden im Anschluß an eine Arbeit vom Verf. [Norske Vid. Selsk. Forhdl.



28, 10 (1955)] beachtenswerte Vereinfachungen bei der Behandlung der Bremsstrahlung aufgezeigt, die im Zusammenhang damit stehen, ob man den differentiellen oder den totalen Wirkungsquerschnitt berechnen will. *P. Urban.*

**Kobzarev, I. Ju.: Zerstrahlungsquerschnitte des Antiprotons.** Doklady Akad. Nauk SSSR **102**, 1101—1102 (1955) [Russisch].

The cross sections of the three annihilation processes of the antiproton ( $\bar{p}$ ), namely  $\bar{p} + p = 2\pi^0$ ,  $\bar{p} + p = \pi^- + \pi^+$ ,  $\bar{p} + n = \pi^- + \pi^0$ , are computed in the first nonvanishing perturbation theoretical approximation for pseudoscalar mesons with pseudoscalar charge-symmetrical interaction. The annihilation processes are observed in the center-of-mass system and the matrices of the transitions are computed according to the usual rules. By averaging over the spins of the nucleon and of the antinucleon one obtains the differential cross sections of these processes which are specialized also for small energies. While neglecting the meson masses one obtains for arbitrary energies by integration over the angles the integral cross sections of these processes which then are transformed for the laboratory system and for common units. Also these formulae are specialized for  $v \rightarrow 0$  and for  $v \rightarrow c$ . If we set  $g \approx 5,10^{-8} \text{ cm}^{3/2} g^{1/2} \text{ sec}^{-1}$ , then we obtain for the total life time in lead about  $10^{-10}$ , in air about  $10^{-6} \text{ sec}$ . For relativistic antiprotons the total effective cross section of all three annihilation processes amounts to about  $10^{-26}$ . Besides that there is given in the paper under review the annihilation cross section for collision with a nucleus. The range at the annihilation of a relativistic antiproton in air amounts to about  $10^5 \text{ cm}$ , in lead to  $10 \text{ cm}$ . In this paper several printing errors should be watched. *F. Cap.*

**Miyazawa, Hironari and Reinhard Oehme: Decay of spin-zero mesons into two leptons.** Phys. Review, II. Ser. **9**, 315—316 (1955).

Die Verff. beweisen, daß das Matricelement für den Zerfall von spinlosen Mesonen der Masse  $m$  in zwei Leptonen der Massen  $m_1$  und  $m_2$  nur Glieder proportional  $m_1/m$  und  $m_2/m$  enthält, wenn in dem offenen Polygonzug der Leptonenlinien die Anzahl der  $\gamma$ -Matrizen, vermehrt um die Anzahl der inneren Linien ( $S_F$ -Funktionen) ungerade ist. *F. Cap.*

**Terleckij, Ja. P.: Der isotope Spin und die Hypothese der Neutronenladung.** Doklady Akad. Nauk SSSR **101**, 1035—1038 (1955) [Russisch].

The conservation law of the projection of the isotopic spin  $T_3$  probably has a more profound physical importance than the law of conservation of the complete isotopic spin  $T$ . If  $S(p)$ ,  $S(n)$ ,  $S(\pi)$ ,  $S(\pi^-)$  are the total numbers of the particles under observation, the entire projection of the isotopic spin  $T_3 = \frac{1}{2} S(p) - \frac{1}{2} S(n) + S(\pi^+) - S(\pi^-)$  and the entire electric charge amounts to  $E = S(p) + S(\pi^+) - S(\pi^-)$ . Only two linear combinations of these laws of conservation  $T_3 = \text{const}$  and  $E = \text{const}$  consist of the sum or of the difference of the various sorts of particles:  $E - 2T_3 = S(n) - S(\pi^+) + S(\pi^-) = a = \text{const}$  means the conservation of the „neutron charge“ ( $a$  is the neutron charge),  $2E - 2T_3 = S(p) + S(n) = -N = \text{const}$  means the conservation of the nuclear charge. The relations  $2T_3 = E - a$ ,  $-N = E + a$  apply also to systems with antinucleons. If  $E^+$ ,  $E^-$ ,  $a^+$ ,  $a^-$ ,  $N^+$ ,  $N^-$  are the positive and negative electric-, neutron-, and nuclear charges, the elementary particles in each case possess two different charges:  $p \dots (N^- E^+)$ , antiproton  $\dots (N^+ E^-)$ ,  $n \dots (N^- a^+)$ , antineutron  $\dots (N^+ a^-)$ ,  $\pi^+ \dots (E^+ a^-)$ ,  $\pi^- \dots (E^- a^+)$ . In the case of systems of nucleons the invariance of  $T$  would then be equivalent to the antisymmetry of the wave function of the system. The hypothesis of the neutron charge offers more theoretical possibilities than that of the isotopic spin, and also to some light particles a neutron charge may be ascribed. If a „neutrino charge“  $\nu^+$  or  $\nu^-$  is presupposed [Ja. B. Zel'dovič, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 1317—1320 (1953)] it applies within this scheme that  $\mu^+ (\text{meson}) \dots (E^+ \nu^+)$ ,  $\mu^- \dots (E^- \nu^-)$ ,  $e^+ \dots (E^+ \nu^-)$ ,  $e^- \dots (E^- \nu^+)$ ,  $\bar{\nu}_2 = \mu_0 \dots (a^+ \nu^+)$ ,  $\bar{\nu}_1 = \mu_0 \dots (a^- \nu^-)$ ,  $\nu \dots (a^+ \nu^-)$ ,

antineutrino  $\dots (a^- \nu^+)$ . Because of the conservation laws for the entire neutron charge and the entire neutrino charge the  $\pi$  and  $\mu$  mesons must be divided as follows:  $\pi^+ = \mu^+ + \bar{\mu}^0$ ,  $\pi^- = \mu^- + \mu^0$ ,  $\mu^+ = e^+ + \mu^0 + \bar{\nu}$ ,  $\mu^- = e^- + \mu^0 + \nu$ . From the conservation of  $E$ -,  $a$ -,  $N$ -, and  $\nu$ -charges it follows among other things that 1. all elementary particles in the last instance are divided into protons, electrons, and neutrinos (or their respective antiparticles) and can have only an even number of charges. 2. The particles with an even number of  $E$ - and  $a$ -charges have a whole-number spin and the particles with an odd number of  $E$ - and  $a$ -charges and consequently also with an odd number of  $N$ - and  $\nu$ -charges have a half-number spin. At the end heavy mesons and hyperons are discussed. F. Cap.

**Brogie, Louis de:** Ondes régulières et ondes à région singulière en mécanique ondulatoire. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 345—348 (1955).

Généralisation d'une précédente démonstration de la „formule du guidage“ de l'A. On intègre l'équation de continuité, par la méthode classique, pour les ondes „ $\Psi$ “ et les ondes „ $u$ “. Le résultat vaut pour toutes les particules à spin.

O. Costa de Beauregard.

**Koppe, H.:** Das Umkehrungsproblem in der verallgemeinerten Elektrodynamik. Z. Naturforsch. **10a**, 505—508 (1955).

Bekanntlich läßt sich in der Boppischen verallgemeinerten Elektrodynamik das statische Potential durch  $(*) U(r^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t^2 - r^2) dt$  mit Hilfe der Funktion  $f(\Gamma)$  ausdrücken. Der Verf. beschäftigt sich nun mit dem Umkehrproblem: wann ist  $(*)$  eindeutig auflösbar? Betrachtet man „retardierte Potentiale“ unter der zusätzlichen Forderung strenger Kausalität, d. h. wird  $f(\Gamma) = 0$  für  $t < r$  angenommen, so gibt es höchstens eine Lösung des Problems. Für ihre Existenz werden jedoch nur notwendige Bedingungen gewonnen, so daß der Bereich der Potentiale, zu denen unter diesen Voraussetzungen eine Funktion  $f$  existiert, schwer zu übersehen ist. Ähnlich liegen die Dinge für „raumartige Potentiale“, für die  $f(\Gamma) = 0$  für  $\Gamma > 0$  angenommen wird. F. Penzlin.

**Pease, Robert L. and Jane Pease:** Necessary condition for positive definite energy. Phys. Review, II. Ser. **99**, 1600—1601 (1955).

Die Verff. leiten ein einfaches notwendiges Kriterium für eine positiv definite Energiedichte einer unquantisierten Feldtheorie für ein Teilchen mit beliebigem Spin nach Bhabha (dies. Zbl. **35**, 424) her. Gegenüber älteren Kriterien (vgl. z. B. Corson, Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations, London 1953) hat das vorliegende Kriterium den Vorteil, daß darin nur die Grundmatrizen (nicht einmal die symmetrisierende Matrix  $D$ ) eingehen. F. Penzlin.

**Heber, G.:** Zur Theorie der Elementarteilchen. I. Ann. der Physik, VI. F. **16**, 43—51 (1955).

Der Verf. betrachtet ein System mit einem quantisierten Mesonenfeld und einem unquantisierten Nukleonenfeld. Das letztere wird aber nicht als gegeben vorausgesetzt, sondern als ein klassisches Wellenpaket behandelt. Unter der Voraussetzung, daß dies Paket als eine Kugel mit dem Durchmesser  $L^{-1}$  dargestellt werden kann, wird die Gesamtenergie des Systems als Funktion von  $L$  betrachtet. Der Verf. findet auf diese Weise, daß die kinetische Energie des Wellenpakets proportional  $L^2$  ist, während die Wechselwirkungsenergie des Systems für große Werte von  $L$  proportional  $-g^2 L$  ist. ( $g$  ist die Kopplungskonstante.) Wenn  $g$  nicht allzu klein ist, hat deshalb die Gesamtenergie ein Minimum bei einem endlichen  $L$ . Der Verf. findet, daß  $L_{\text{Min}}^{-1}$  von der Größenordnung  $10^{-13}$  cm wird, wenn die Konstante  $g^2/\hbar c \sim 50$  ist. Die Selbstenergie des Nukleons ist dabei in diesem Modell etwa  $1/10$  seiner Ruhemasse. G. Källén.

## Bau der Materie:

**Laforgue, Alexandre:** Extension du calcul d'erreur à l'ensemble des états d'un système stationnaire. *C. r. Acad. Sci., Paris* **240**, 2122—2124 (1955).

The error due to inexactitude in the wave function had hitherto been elucidated only for the ground state. This discussion is now extended to excited states.

*J. Jacobs.*

**Everhart, Edgar, Gerald Stone and R. J. Carbone:** Classical calculation of differential cross section for scattering from a Coulomb potential with exponential screening. *Phys. Review, II. Ser.* **99**, 1287—1290 (1955).

Die Verff. behandeln den Stoß zweier Atome und legen ihren Rechnungen die bekannte Potentialform (Yukawa) mit Abschirmung zugrunde. Sie zeigen zuerst, daß eine klassische Bahnberechnung unter gewissen Bedingungen für Probleme vernünftige Ergebnisse liefert, in welchen Ionen von einer Energie von vielen tausend eV an Atomen gestreut werden. Es wird der Stoßparameter und der differentiellen Wirkungsquerschnitt für alle Streuwinkel tabelliert, wobei ein weiterer Variabilitätsbereich der Parameter entsprechend verschiedenem Grade von Abschirmung berücksichtigt wird.

*P. Urban.*

**Sheldon, J. W.:** Use of the statistical field approximation in molecular physics. *Phys. Review, II. Ser.* **99**, 1291—1301 (1955).

The numerical solutions of the difference equations approximating the Thomas-Fermi-Dirac equations of the nitrogen molecule obtained on an electronic IBM machine are discussed. Further, general considerations are adduced here to show that a statistical field treatment cannot lead to stable binding for any molecule.

*J. Jacobs.*

**Carson, T. R. and A. Dalgarno:** Approximate molecular orbitals. III. The  $2s\sigma_g$  and  $3d\sigma_g$  states of  $\text{H}_2^+$ . *Proc. phys. Soc., Sect. A* **68**, 569—576 (1955).

As in the earlier papers (Dalgarno and Poots, Moiseiwitsch and Stewart, this Zbl. **55**, 234) the Raleigh-Ritz variational principle is used to obtain approximate wave functions for the  $2s\sigma_g$  and  $3d\sigma_g$  states. The requirement of orthogonality to the lower  $1s\sigma$  state is taken into account; non-crossing energy curves are obtained by deriving the orbitals for the two states separately. This united-atom approach seems most successful, as for  $R = 5$  the total energy is in error by 4% for the  $2s\sigma$  state as compared with 21% by LCAO treatment.

*J. Jacobs.*

**Artmann, Kurt:** Die quantentheoretischen Grundlagen der gewinkelten Valenz. *Z. Phys.* **141**, 445—462 (1955).

The Slater-Pauling theory for directed valence is criticised as the criteria i) the eigenfunctions  $\Psi$  of the central atom valence electrons are orthogonal, ii) the outer atoms are situated along the directions of maximum value of  $\Psi$ , are frequently not fulfilled. The energy is determined as function of the directions of outer atoms using localized valences with the hybridization parameter found by a variation process. In an elementary way the directed valence is based on the distended molecule concept.

*J. Jacobs.*

**Lewis, J. T., M. R. C. McDowell and B. L. Moiseiwitsch:** Properties of the hydrogen molecular ion. V. Transitions connecting the lowest even and lowest odd  $\pi$ -states with higher  $\sigma$ -states. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **68**, 565—568 (1955).

**Fuchs, W. H. J.:** On the virial series of the ideal Bose-Einstein gas. *J. rat. Mech. Analysis* **4**, 647—652 (1955).

**Schirmer, H.:** Zur Theorie der elektrischen Leitfähigkeit eines Plasmas. *Z. Phys.* **142**, 1—13 (1955).

Die allgemeinste Form der Boltzmannschen Stoßgleichung wird — angewandt auf die Elektronen eines Plasmas — für den stationären, eindimensionalen Fall



spezialisiert und bei Vernachlässigung der Elektronenwechselwirkung (Lorentzgas) integriert. Die auftretenden Integralausdrücke hängen von der Elektronengeschwindigkeit  $v$  ab und lassen sich als wirksamer Querschnitt der streuenden Zentren (Atome, Ionen) deuten. Hieraus ergibt sich ein Ausdruck für die freie Weglänge  $\lambda(v)$ , der bei Idealisierung der Streuzentren als starrelastische Kugeln in die von  $v$  unabhängige elementare Form übergeht. Unter Verwendung von  $\lambda(v)$  und der durch Integration gewonnenen Verteilungsfunktion erhält Verf. Ausdrücke für Stromdichte und Elektronenbeweglichkeit im Lorentzgas. Zur Berechnung von Stromdichte und Elektronenbeweglichkeit im wirklichen Plasma (Berücksichtigung der Elektronenwechselwirkung) werden drei verschiedene Verfahren beschrieben, die den Übergang vom Lorentzgas in guter Näherung wiedergeben. Am Beispiel eines Xenon-Hochdruckplasmas soll in einer späteren Arbeit durch numerische Rechnung gezeigt werden, daß die Ergebnisse nur geringfügig voneinander abweichen.

*A. Rudloff.*

**Siebert, Arnold J. F.:** Metastable states of a finite lattice gas. *Phys. Review*, II. Ser. **97**, 1456—1462 (1955).

In a previous paper [*Phys. Review*, II. Ser. **96**, 243—249 (1954)] the author has started from the assumption that a real fluid can be considered as a „binary alloy“ of submicroscopic systems (cells) whose partition function is of the van der Waals type, i. e. the probability to find  $n$  particles in a small cell is supposed to have two sharp maxima, corresponding with the densities of the gaseous and the liquid phase. In this case the relatively most probable density of a finite system would in a certain range be a two-valued function of the Gibbs free energy and one would expect metastable states to exist. In the present paper the validity of this assumption is investigated for a simple model, namely a finite version ( $N$  sites) of the two-dimensional lattice gas of Lee and Yang (this *Zbl.* **48**, 434). If  $N_1$  is the number of particles, then in the case  $N_1 \leq 3$  or  $N_1 \geq N - 3$ , where explicit formulae for the probability are available, the existence of metastable states is demonstrated at temperatures smaller than  $3,5 T_c / \ln N$ , where  $T_c$  is the critical temperature of the infinite lattice. For larger values of  $N_1$  or  $N - N_1$  groups of numbers  $N_1$  are discussed and some results concerning their probabilities are proved.

*B. R. A. Nijboer.*

**Kuper, C. G.:** On the thermal properties of Fröhlich's one-dimensional superconductor. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **227**, 214—228 (1955).

Die von Fröhlich (dies. *Zbl.* **55**, 441) zur Behandlung seines eindimensionalen Supraleitungsmodells für  $T = 0$  benutzte spezielle self-consistent-field-methode wird auf höhere Temperaturen ausgedehnt. U. a. wird die spezifische Wärme berechnet.

*H. Haken.*

## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

**Hagenow, Karl Ulrich v.:** Zum Problem rotierender kosmischer Gasmassen. *Z. Naturforsch.* **10a**, 631—640 (1955).

In Fortsetzung von Arbeiten aus dem v. Weizsäckerschen Institut über rotierende Gasmassen mit turbulenter Reibung wird hier das Problem der Entstehung einer Zentralmasse in einer flachen rotationssymmetrischen Gasscheibe untersucht. Dem Potential einer ellipsoidischen Verteilung der Flächendichte mit starrer Rotation wird das einer kleinen Zentralmasse überlagert und die durch die Reibung hervorgerufene Zunahme der zentralen Verdichtung berechnet. Dies gelingt unter vereinfachenden Annahmen über die Änderung der Eigengravitation des Gases (Dichteverteilungsgesetz wie bei starrer Rotation) und einem speziellen Ansatz für den Mischungsweg. Dichteverteilung, Materie- und Drehimpulsstrom werden für ver-

schiedene Phasen der Entwicklung diskutiert und das Modell auf das Problem der Sternentstehung und den Andromedanebel angewandt. *G. Burkhardt.*

**Kivel, B., S. Bloom and H. Margenau:** Electron impact broadening of spectral lines. *Phys. Review, II. Ser.* **98**, 495—514 (1955).

In Gasentladungen und Sternatmosphären werden die Spektrallinien u. a. durch die elektrischen Felder von Ionen und Elektronen verbreitert. Um die Frage zu klären, inwieweit der zweite Effekt im Verhältnis zu dem ersten wesentlich ist, untersuchen die Verf. im einzelnen die Verbreiterung der 1. Lymanlinie durch freie Elektronen. Ein erster Effekt („universal line effect“) betrifft die Energieübertragung zwischen Elektron und Atom bei Streuung des Elektrons. Dieser Effekt überwiegt bei Abwesenheit des linearen Starkeffektes. Zweitens führen Stöße 2. Art mit Elektronen („Auslöschung“) zu weiterer Verbreiterung der Linie. Ein dritter Beitrag zur Linienbreite rührt her von der vorübergehenden Erzeugung eines Dipols oder der Drehung eines durch ein benachbartes Ion schon hervorgerufenen Dipols. Bei  $Ly\ \alpha$  sind die erwähnten Effekte klein gegenüber der bekannten Holtsmark-Verbreiterung durch Ionen; die Verff. warnen aber vor voreiliger Verallgemeinerung dieses Ergebnisses. *A. Unsöld.*

**Schrödinger, E.:** A thermodynamic relation between frequency-shift and broadening. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **1**, 63—69 (1955).

Es wird gezeigt, daß ein monochromatischer Lichtstrahl, der ein im thermodynamischen Gleichgewicht befindliches Medium durchläuft, durch Wechselwirkung mit dem Medium keine Rotverschiebung erleiden kann, ohne daß gleichzeitig eine beobachtbare spektrale Verbreiterung auftritt, wenigstens wenn man von allzu gekünstelten Voraussetzungen absieht. Dies spricht auf jeden Fall sehr für die Richtigkeit der kosmologischen Expansionshypothese. *H. Vogt.*

**Lenoble, Jacqueline:** Sur une application de la méthode de Chandrasekhar à l'étude du rayonnement diffusé dans des couches de brume. *C. r. Acad. Sci., Paris* **241**, 567—569 (1955).

**Ljapunov, A. A.:** Über ein Kriterium für die Verifikation der Interpretation von Gravitationsbeobachtungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **102**, 165—266 (1955) [Russisch].

**Matschinski, Matthias:** I fenomeni di fluttuazione in geofisica. Lore descrizione matematica e loro applicazione dal punto di vista pratico. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* **18**, 378—385 (1955).

**Argence, Émile, Karl Rawer et Kurt Suchy:** Les théorèmes d'équivalence de l'absorption ionosphérique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **241**, 505—507 (1955).

**Geršman, B. N. und V. L. Ginzburg:** Über den Mechanismus der Entstehung von Inhomogenitäten in der Ionosphäre. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **100**, 647—650 (1955) [Russisch].

**Dmitriev, A. A., T. V. Bončkovskaja und T. A. Kalinina:** Änderungen von Temperatur und Druck während einer totalen Sonnenfinsternis. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **103**, 597—600 (1955) [Russisch].

**Allan, D. W.:** Heat in the earth. *Advancement Sci.* **12**, 89—96 (1955).

**Kolesnikov, A. G. und A. A. Pivovarov:** Berechnung des täglichen Temperaturganges des Meeres aus der Strahlungssumme und der Lufttemperatur. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **102**, 261—264 (1955) [Russisch].

**Musaeljan, Š. A.:** Die räumliche Aufgabe der Strömung um die Unebenheiten der Erdoberfläche mit Berücksichtigung der Kugelgestalt der Erde. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **103**, 815—818 (1955) [Russisch].

**Kibel', I. A.:** Über die Anpassung der Luftbewegung an die Geostrophische. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **104**, 60—63 (1955) [Russisch].

**Linejkin, P. S.:** Über die Bestimmung der Dicke der baroklinen Schicht des Meeres. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **101**, 461—464 (1955) [Russisch].

## Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- A**bhyankar, Shreeram (Splitting of valuations. II.) 273; (Ramification of algebraic functions) 275.
- — and Oscar Zariski (Splitting of valuations) 272.
- Abraham, G., L. Cohen and A. S. Roberts (Binding energies) 227.
- Abrahams, Elihu (Spin waves and conduction electrons) 235.
- Ackermann, W.-G. (Wahrscheinlichkeitsrechnung) 126.
- Aczél, J. (Vektor-Funktionalgleichung der „Translation“) 373.
- Adams, J. F. (Theorem of W. H. Cockcroft) 415.
- Adkins, J. E. (Finite plane-strain equations) 426; (Deformation of materials) 426.
- Ado, I. D. (Lineare Darstellungen endlicher Gruppen) 26.
- Agudo, F. R. Dias s. Dias Agudo, F. R. 249.
- Ahmad, Mansoor (Cauchy's theorem) 311.
- Aitken, A. C. (Acceleration of Lin's process) 123.
- Albert, A. A. (Involutional algebras) 272.
- Albrecht, Julius (Runge-Kutta-Verfahren) 124; (Gleichungen von Treffitz und Galerkin) 378.
- Rudolf (Konforme Abbildung eines Ringgebietes) 76.
- Albuquerque, J. (Successioni di insiem) 290.
- Aleksandrov, A. D. und E. P. Seĭkin (Unverbiegbarkeit konvexer Flächen) 406.
- Alexandroff (Aleksandrov), P. S. und A. A. Ljapunov (L. V. Keldyš) 4.
- Alexiewicz, A. and W. Orlicz (Theorem of C. Carathéodory) 362.
- Alexits, G. (Orthogonalpolynomentwicklungen) 302; (Caractérisation de fonctions) 305.
- Allan, D. W. (Heat in the earth) 454.
- Allen, D. N. de G. and R. V. Southwell (Viscous fluid past a fixed cylinder) 198.
- Almeida Costa, A. (Modules and rings with operators) 265.
- Altman, M. (Newton's method) 372.
- Amen-Zade, Ju. A. s. B. A. Azimov 185.
- Amitsur, S. A. (Rings with identities) 265; ( $\bar{I}$ -ideals of free ring) 265.
- Ammeter, Hans (Erneuerungsproblem) 392.
- Anderson, T. W. (Statistical problems) 141.
- André, Johannes (Projektive Ebenen über Fastkörpern) 144.
- Andreev, P. P. (Mathematische Tafeln) 381.
- Andreoli, G. (Geometrie di un semplice) 29; (Sistemi ortogonali di Walsh) 302.
- Andrunakievič, V. A. (Ringe mit Minimalbedingung) 31; (Ringe mit minimalen zweiseitigen Idealen) 31.
- Anis, A. A. (Partial sums of independent normal variates) 135.
- Anke, Klaus (Quadratische Regelfläche) 331.
- Antosiewicz, H. A. (Nonlinear differential equations) 84.
- Anzelius, Adolf (Flow problems in viscous fluid) 431.
- Apte, Madhumalati (Variétés kähleriennes compactes) 163.
- Aquaro, Giovanni (Teorema di esistenza di Carathéodory) 336.
- Araki, Shōrō (Homology of spinor groups) 418.
- Archard, G. D. (Spherical aberration in electron lenses) 215.
- Archibald, R. C. (Logarithms to the base ten) 1.
- Argence, Émile, Karl Rawer et Kurt Suchy (Absorption ionosphérique) 454.
- Arsove, Maynard G. (Analytic function) 66.
- Artemov, G. A. (Čaplygin'sche Methode für gewöhnliche Differentialgleichungen) 87; (Methode Čaplygins für partielle Differentialgleichungen) 95.
- Artmann, Kurt (Gewinkelte Valenz) 452.
- Aržanyč, I. S. (Dynamisches Vektorfeld) 100; (Elektromagnetisches Feld) 212.
- Ashley, Holt s. Marten Landahl 200.
- Asser, Günter (Deduktiv abgeschlossene Mengen des Prädikatenkalküls) 11.
- Atkinson, F. V. (Second-order oscillations) 333.
- Auch, Karl und Werner Braunbek (Bewegungsformen eines Schwing-Systems) 182.
- Aumann, Georg s. Otto Haupt 48.
- Avez, André (Variétés complètes) 162.
- Aymerich, Giuseppe (Guide d'onda anisotrope) 440.
- Azbelev, N. V. (Methode von Čaplygin) 376.
- Azimov, B. A., Ju. A. Amen-Zade, E. M. Borisov, G. L. Belkina und A. I. Kutuzov (Torsion prismatischer Stäbe) 185.
- Azuma, Shukō s. Kazu Hasegawa 447.
- B**ackes, F. (Formule de Dirichlet) 298; (Correspondance avec orthogonalité des éléments) 405; (Configuration des douze surfaces de Darboux) 405; (Lames liquides en équilibre) 405.
- Bacon, Harold Maile (Differential and integral calculus) 47.
- Badillo, M<sup>a</sup> de la Cinta s. Cinta Badillo, M<sup>a</sup> de la 12.
- Baer, Reinhold (Supersoluble groups) 21.



- Baker, C. C. T. (Practical mathematics. I.) 241.  
 — I. N. (Iteration of entire transcendental functions) 71.
- Balazs, N. L. (Wave propagation) 179.
- Balsimelli, Pio (Trasformazione birazionale) 400.
- Bambah, R. P. and K. Rogers (Nonconvex star-regions) 283.
- Banaschewski, Bernhard (Ultrafilterraum) 410; (Kompaktheitsbegriff) 412; (Extremaleigenschaften topologischer Räume) 413; (Nulldimensionale Räume) 413.
- Bankoff, Leon (Golden arbelos) 398.
- Baranoff, Alexis von (Résistance d'un corps de révolution) 201.
- Bargmann, Rolf (Signifikanzuntersuchungen) 139.
- Bari, N. K. (Beste Approximation durch trigonometrische Polynome) 61.
- Barker, C. C. H. (Contact of surfaces) 152.  
 — J. A. (Cell theory of liquids) 234.
- Barlotti, Adriano ( $N$ -agoni) 398.
- Barner, Martin (Doppelverhältnisscharen) 161; (Projektive Differentialgeometrie der Komplexflächen. III.) 161.
- Barnes, E. S. (Problem of Oppenheim) 42; (Quadratic forms) 43.  
 — — — s. A. Oppenheim 283.
- Barnett, I. A. (Diophantine equation) 40.
- Baratt, M. G. (Track groups. I.) 171.
- Barrett, J. H. (Second order self-adjoint differential equations) 332.  
 — Lida K. (Regular curves) 169.
- Barsotti, Iacopo (Varietà gruppi) 403.
- Barthel, Woldegar (Oberflächenfunktion in Finsler-scher Geometrie) 164.
- Bartle, Robert G. (Implicit functions) 260; (Compactness in functional analysis) 355.
- Bartsch, Rudolf (Kommutations- und Rentenbarwerte) 393.
- Barua, S. N. (Source in a rotating fluid) 197.
- Bass, Jean (Fonctions de répartition) 128.
- Basu, D. (Unbiased estimation) 140; (Method of maximum likelihood) 140.
- Bauer, Friedrich L. s. Heinz Rutishauser 122.  
 — Heinz (Riemann-Integral) 295.  
 — Rainald K. (Lexische Dispersionstheorie) 136.
- Bazylev, V. T. (Quasi-Laplacesche Transformationen) 161.
- Beard, Robert S. (Apollonius problem) 148.
- Beatty, S. ( $e$  is not quadratically algebraic) 46.
- Beaumont, R. A. and R. P. Peterson (Permutation groups) 25.
- Beck, G. (Emission process) 221.
- Becker, H. (Load distribution at intersection of shells) 190.  
 — Hugo (Poincarésche Reihen) 329.
- Beer, H. (Orthotrope Platten und Plattenroste) 423.
- Behnke, Heinrich (Analytische Gebilde holomorpher Funktionen) 326.
- Belgodère, Paul (Surfaces minima) 409.
- Belkina, G. L. s. B. A. Azimov 185.
- Bellman, Richard (Matrix theory. IV.) 15; (Bottleneck problems) 395.  
 — —, Irving Glicksberg and Oliver Gross (Nonlinear integral equations) 395.
- Belousov, V. D. (Distributive Systeme von Operationen) 262.
- Bendat, Julius and Seymour Sherman (Operator functions) 369.
- Benedicty, Mario (Matrici normali di Severi) 403; (Gruppo unimodulare ristretto) 404.
- Bennhold, Friedrich (Projektive Geometrie der Ebene) 142.
- Berekašvili, V. A. (Euler-sche Summationsmethoden) 59.
- Berezanskij, Ju. M. (Spektraltheorie partieller Differenzen-Differentialgleichungen) 94.
- Berger, E. R. (Bernoullische Zahlen) 13; (Stirlingsche Formel) 13.  
 — Jean (Film d'injection pariétale) 203.  
 — s. Edmond A. Brun 203.
- Bergmann, Peter G. s. Ezra Newman 446.
- Berkovitz, Leonard D. and Richard P. Gosselin (Double trigonometric series) 306.
- Berkson, Joseph (Logistic function) 141; (Integrated normal curve) 390.
- Berman, D. L. (Approximation stetiger Funktionen) 60.  
 — Gerald (Three parameter family of block designs) 139.  
 — S. D. (Gruppenalgebren) 253.
- Bernoulli, Johann (Briefwechsel. I.) 2.
- Bernstein, B. and T. Y. Thomas (Differential equations of stream lines) 432.
- Berry, F. J., D. S. Butler and M. Holt (Spherical blast) 207.
- Bertaut, Félix (Probabilité de valeurs de fonctions) 130; (Fonctions de répartition) 130; (Statistique des fonctions complexes) 382.
- Berthé, Guy (Symétrie sphérique d'un tenseur) 154.
- Bertin, Jean s. François Maunoury 199.
- Betti, Ezio (Equation of compressible flow) 199.
- Beyer, Gudrun (Einbettung zyklischer Körper) 36.  
 — Robert T. s. John von Neumann 215.
- Bhatia, A. B. (Vibration spectra of cubic metals. I.) 236.
- Bieberbach, L. (Analytische Fortsetzung) 69.
- Biedenharn, L. C., R. L. Gluckstern, M. H. Hull jr. and G. Breit (Coulomb functions) 227.
- Biel, S. J. and E. H. S. Burhop (Bremsstrahlung production) 229.
- Bierlein, Dieter (Sterbetafel) 392.
- Bijlaard, P. P. (Buckling of stringer panels) 186.
- Bing, R. H. (Partially continuous decompositions)

- 169; (Decompositions of a cube) 415.
- Birch, B. J. (Games) 383.
- Birman, M. Š. (Variationsmethode von Trefftz für die Gleichung  $\Delta^2 u = f$ ) 100.
- Birnbaum, Allan (Classes of tests of multiparametric hypotheses) 138.
- Blackman, Jerome (Inversion of the Fourier transform) 103.
- Blair, Alexander (Multiplication in operator algebras) 357.
- — s. Seth Warner 356.
- Blanc-Lapierre, André et Robert Fortet (Répartitions de Poisson) 128.
- Bledsoe, W. E. and A. P. Morse (Product measures) 291.
- Bleuler, K. und Ch. Terreaux (Schalenmodell für Atomkerne) 226.
- Bloom, S. S. B. Kivel 454.
- Blum, E. K. (Analytic functions in Banach algebras) 364.
- Boas jr., R. P. (Moments of analytic functions) 70.
- Bodner, Sol R. (Post buckling behavior of a clamped plate) 188.
- Boehm, Carl (Todes- und Erlebensfallversicherungen) 393.
- Boer, J. de s. E. G. D. Cohen 234.
- Bogoljubov, N. N. und D. V. Širkov (Formeln der Störungstheorie) 449.
- Bohm, D. and R. Schiller (Pauli equation (B)) 447.
- —, R. Schiller and J. Tiomno (Pauli equation (A)) 446.
- Böhm, Wolfgang (Fadenkonstruktionen) 147.
- Bohr, A., P. O. Fröman and B. R. Mottelson (Fine structure in alpha decay) 229.
- Bokštejn, M. F. (Dimensionelle Dominante von Mengen) 414.
- Bol, Gerit (Infinitesimale Flächenverbiegung) 158.
- Boley, B. A. (Saint Venant's principle) 184; (Lateral impact on beams) 429.
- Sara R. (Approximate analysis of buckled plates) 187.
- Boltjanskij, V. G. (Faserung von Räumen von Abbildungen) 175.
- Bolyai, John (Absolute space) 145.
- Bompiani, E. (Omografie e quadriche) 146.
- Bončkovskaja, T. V. s. A. A. Dmitriev 454.
- Bonola, Roberto (Non-euclidean geometry) 145.
- Borde, A. H. de (Radiative corrections) 221.
- Borel, A. and C. Chevalley (Betti numbers of exceptional groups) 259.
- Boresi, A. P. (Buckling of rings) 186.
- Borisov, E. M. s. B. A. Azimov 185.
- Born, J. S. s. G. Horvay 424.
- Borok, V. M. (Cauchysches Problem) 344.
- Borsuk, K. (Diviseur et multiple des transformations) 412; (Dépendance des transformations continues) 412.
- Bose, R. C. and W. H. Clatworthy (Partially balanced designs) 385.
- S. N. (Équation tensorielle) 445.
- Bott, R. and H. Samelson (Cohomology ring of  $G/T$ ) 259.
- Bottema, O. (Pascal's theorem) 147.
- Oene (Equilibrium of a linear mechanical system) 181.
- Boughon, Pierre (Formule de Taylor) 36.
- —, Jacqueline Nathan et Pierre Samuel (Séries formelles transcendentes) 46.
- Bouix, Maurice (Champ électromagnétique) 213.
- Bouligand, Georges (Situations dans la recherche mathématique) 241.
- Brace, John Wells (Compactness in the weak topology) 168.
- Brachman, Malcolm K. (Integral of Ramanujan) 299.
- Bradley, A. Day (Day of week for Gregorian dates) 13.
- Bram, Joseph (Subnormal operators) 116.
- Brand, R. S. (Inertia forces in lubricating films) 430.
- Brauer, Alfred (Characteristic vectors of a matrix) 16.
- Brauer, A. and H. T. LaBorde (Characteristic roots of a matrix. VI.) 122.
- Braun, Hel (Basissatz für hermitesche Modulformen) 328.
- Willis H. (Stress tensor for turbulence) 204.
- Braunbek, Werner s. Karl Auch 182.
- Brauner, H. (Hyperbolisches Paraboloid) 155; (Quadriken als Bewegungsflächen) 155.
- Breit, G., J. B. Ehrman and M. H. Hull jr. (Nucleon-nucleon scattering) 225.
- — and M. H. Hull jr. (Nucleon-nucleon scattering) 225.
- — s. L. C. Biedenharn 227.
- Brelot, Marcel (Problème de Dirichlet) 99; (Potential theory) 349; ( $n$ -capacities) 351.
- Brenman, Edwin (Testing for divisibility) 39.
- Breslin, John P. (Flow about half bodies between parallel walls) 199.
- Briggs, W. E. and S. Chowla (Power series of  $\zeta[s]$ ) 319.
- Brillouet, Georges (Intégrales d'équations différentielles) 83; (Ondes liquides de gravité) 209.
- Brinkman, H. C. and B. Peperzak (Thomas-Fermi equations. II.) 232.
- Broadbent, S. R. (Quantum hypotheses) 140.
- Brogie, Louis de (A. Einstein) 3; (Mécanique ondulatoire) 216; (Ondes régulières et ondes à région singulière) 451.
- Brooks, Samuel H. (Optimum subsampling number) 386.
- Brown, L. J. M. (Domains of infinite connectivity) 75.
- — M. (Configuration of points and spheres) 148.
- W. P. (Matrix algebras) 34.
- Bruck, R. H. (Ring of rational integers) 30.
- Brueckner, K. A. (Two-body forces and nuclear saturation. III.) 226.
- — and C. A. Levinson (Reduction of many-body problem) 226.
- Bruhata, François (Représentations unitaires des groupes de Lie) 28.

- Bruijn, N. G. de and G. Szekeres (Exponential and polar representations of matrices) 247.
- Brun, Edmond A. et Jean Berger (Couche limite dans le cas d'une injection pariétale) 203.
- Brüning, Gerhard (Stabilität des Hubschraubers) 434.
- Bruns, Günter und Jürgen Schmidt (Moore-Smith-Folgen und Filter) 410.
- Burau, Werner (Punktmolelle für lineare Räume auf Hyperquadriken) 153.
- Bureau, Florent J. (Divergent integrals) 92.
- Burgess, C. E. (Homogeneous continua) 415.
- Burhop, E. H. S. s. S. J. Biel 229.
- Burnengo, Giuseppe (Punti doppi di curva piana algebrica) 150.
- Burniat, Pol (Surfaces algébriques) 151; (Lemme de F. Enriques) 401.
- Burnside, W. (Groups of finite order) 251.
- Burstein, Elias s. Melvin Lax 239.
- Burton, W. K. (Formulations of quantum field theory) 219.
- Bush, Robert R. and Frederick Mosteller (Stochastic models) 390.
- Butler, D. S. s. F. J. Berry 207.
- M. C. R. (Irreducible factors of  $f(x^m)$ ) 249.
- S. T. and M. H. Friedman (Partition function for Bose-Einstein particles) 235.
- — — s. M. H. Friedman 235.
- Bylov, B. F. (Charakteristische Exponenten) 90.
- Caianiello, E. R. (Derivatives of propagation kernels) 220.
- Cailliate, Charles (Rotation photométrique de l'astéroïde Éros) 240.
- Calderón, A. P. (Mesures invariantes) 51.
- — — et Allen Devinatz (Courbes dans l'espace de Hilbert) 368; (Courbes à courbure constante) 368.
- — — and A. Zygmund (Singular integrals) 104.
- Callahan jr., Francis P. (Rigid body motion) 181.
- Callaway, Joseph (Orthogonalized plane wave method) 237.
- Calloway, J. M. (Discriminant of algebraic number fields) 273.
- Calvo Carbonell, Carlos (Gleichungen 3., 4. und 5. Grades) 124.
- Campbell, George S. (Partial fractions for dynamic-response calculations) 183.
- L. L. and A. Robinson (Mixed problems for hyperbolic partial differential equations) 97.
- Cantoni, Lionello (Serie di potenze e logaritmo di una matrice) 247.
- Riccardo (Teorema di Coriolis) 180.
- Cap, F. and W. Gröbner (Deuteron problem) 223.
- Caputo, Michele  
 $(y + P_{r_1(x)} y^{r_1} + P_{r_2(x)} y^{r_2} + \dots + P_{r_t(x)} y^{r_t} = 0)$  82.
- Carbone, R. J. s. Edgar Everhart 452.
- Carbonell, Carlos Calvo s. Calvo Carbonell, Carlos 124.
- Carlitz, L. (Reciprocal of  $J_0(x)$ ) 65; (Special determinant) 246; (Equations in a finite field) 278; (Class number relations) 282.
- — and F. R. Olson (Factorization of polynomials) 250.
- Carmody, Francis J. (Works of Thābit b. Qurra) 242.
- Carshaw, H. S. s. Roberto Bonola 145.
- Carson, T. R. and A. Dalgarno (Approximate molecular orbitals. III.) 452.
- Cartan, Henri (Itération des opérations de Steenrod) 172.
- Cartwright, Mary L. (Mathematical Mind) 241.
- Case, K. M. s. H. Mendlowitz 229.
- Casesnoves, Dario Maravall s. Maravall Casesnoves, Dario 383.
- Cassels, J. W. S. (Diophantine approximation) 44; (Least solutions of quadratic equations) 283.
- Castoldi, Luigi (Equazione di d'Alembert) 345; (Mo-
- menti di una distribuzione statistica) 381.
- Cath, P. G. (J. H. Poincaré) 243.
- Cattaneo, Carlo (G. Galilei) 1.
- Cavallaro, Vincenzo G. (Identità aritmetiche all'ellisse di Lemoine) 397.
- Čebyšev, P. L. (Ausgewählte Arbeiten) 1.
- Čečík, V. A. (Semistabilität eines Grenzzykels) 334.
- Cecioni, Francesco (Teoria della divisibilità) 268.
- Centre Belge de Recherches Mathématiques (Second Colloque sur les Équations aux dérivées partielles) 344.
- Cerulus, Franz (Binding-energy of deuteron) 227.
- Chaix, Bernard and Peter Henrici (Design of supersonic nozzles) 205.
- Chambré, P. L. and L. M. Grossman (Limiting temperatures) 212.
- Chandrasekhar, S. (Turbulence) 437.
- Charnes, A., W. W. Cooper and B. Mellon (Optimizing production by reference to cost surrogates) 396.
- Chassan, J. B. (Trigonometric inequalities) 47.
- Chen, Che-Pen (Régime laminaire dans un canal) 199.
- Chern, Shiing-Shen (Géométrie des sous-variétés d'un espace euclidien) 175.
- Cherry, T. M. (Kepler's equation) 64.
- Cherubino, Salvatore (Logaritmi delle matrici) 246.
- Chintschin (Chinč'in), A. J. s. B. W. Gnedenko 127.
- Chisini, Oscar (Geometria algebrica) 399.
- Choquard, Ph. (Forces dans la représentation de Feynman) 216.
- Choquet, Gustave (Theory of capacities) 351.
- Chow, Hung Ching (Absolute summability of a Fourier series) 305.
- H. H. (Summability of Fourier series) 62.
- Wei-Liang (Abelian varieties over function fields) 276.
- Chowla, S. s. W. E. Briggs 319.
- Chu, John T. (Distribution of sample median) 131.



- Chuchunajšvili, G. E. (Universeller metrischer Raum von Urysohn) 169.
- Cinta Badillo, M<sup>a</sup> de la (Grundlagen im Zusammenhang mit mehrwertiger Logik) 12.
- Cirillo, Elda de Tullio s. Tullio Cirillo, Elda de 400.
- Clarke, Joseph H., Hans R. Menkes and Paul A. Libby (Turbulent boundary layers with injection) 203.
- Clatworthy, W. H. s. R. C. Bose 385.
- Clausen, I. M. s. G. Horvay 190.
- Cleaves, H. F. (Stresses in a disk) 423.
- Clunie, J. (Integral function) 71; (Asymptotic behavior of integral functions) 72; (Asymptotic paths of integral functions) 72; (Theorem of Collingwood and Valiron) 72.
- Cobbe, Anne P. (Cohomology groups of a finite group) 27.
- Cochran, William G. (Deviations between observed and expected numbers) 388.
- Coddington, Earl A. and Norman Levinson (Ordinary differential equations) 330.
- Cohen, Clarence B. s. Eli Reshotko 203.
- E. G. D., J. de Boer and Z. W. Salsburg (Cell-cluster theory for liquid state, II.) 234.
- L. (Variation-perturbation method, I. II.) 216.
- s. G. Abraham 227.
- Cohn, Harvey (Markoff's minimal forms) 43.
- Collatz, Lothar (Differentialgleichungen) 124.
- Collingwood, Edward F. (Fonction méromorphe) 72.
- Collins, Heron Sherwood (Completeness and compactness) 355.
- W. D. (Rotation of a sphere in a viscous fluid) 430.
- Colmez, Jean (Certains opérateurs différentiels) 113.
- Combes, Jean (Dérivées des fonctions analytiques, I. II.) 316.
- Computer development at the National Bureau of Standards 380.
- Conroy, Margaret F. (Beams subject to dynamic loading) 195.
- Conte, Luigi (Marchese de L'Hospital) 242; (Equazioni algebriche di G. C. De'Toschi di Fagnano, I. II.) 393.
- Conti, R. s. G. Sansone 333.
- Conway, H. D. (Orthotropic plane stress) 192; (Plates on elastic foundation) 192; (Stress distributions in orthotropic strips) 425.
- Cooper, Leon N. and James Rainwater (Multiple Coulomb scattering) 231.
- W. W. s. A. Charnes 396.
- Coppel, W. A. (Solution by iteration) 123.
- Copping, J. (*K*-matrices) 56.
- Cordes, Heinz Otto (Spektralzerlegung von Operatoren, I. II.) 117.
- Cornfield, Jerome s. Max Halperin 135.
- Corrsin, Stanley (Measure of the area of a homogeneous random surface) 168.
- Cossa, Paul (Cybernétique) 241.
- Costa, A. Almeida s. Almeida Costa, A. 265.
- Cote, Louis J. (Sums of random variables) 131.
- Courant, R. (Differential- und Integralrechnung, I.) 47.
- Court, N. A. (Pencils of conics) 147.
- Covert, Eugene (Differential equation of conservative systems) 183; (Deformation of a cantilever plate) 188.
- E. E. s. L. Trilling 439.
- Cox, Hugh L. and Bertram Klein (Buckling of plates) 187; (Vibration of plates) 196.
- Coxeter, H. S. M. (Laves' graph) 25; (Affine plane) 145.
- Crampton, T. H. M. and G. Whaples (Additive polynomials, II.) 36.
- Cronin, Jane (Dirichlet problem for elliptic equations) 347.
- Cugiani, Marco (Algebra moderna) 13.
- Curr, R. M. (Coulomb scattering) 229.
- Czechowski, J., M. Fisz, W. Sadowski and R. Zasepa (Safety factor) 421.
- Czipszer, J. and L. Gehér (Functions satisfying Lipschitz condition) 54.
- Dalgarno, A. s. T. R. Carson 452.
- Danguy, Louis (Équation de degré *n*) 250.
- Dantzig, George B. (Linear programming) 395.
- — —, Alex Orden and Philip Wolfe (Simplex method for minimizing a linear form) 394.
- Darbo, Gabriele (Trasformazioni a codominio non compatto) 357.
- Darling, D. A. (Cramér-Smirnov test) 137.
- Dätwyler, Gottfried (Échelle de la turbulence) 204.
- Davenport, H. (Theorem of Furtwängler) 45.
- David, F. N. (History of probability, I.) 127; (Transformation of discrete variables) 136.
- — — and M. G. Kendall (Symmetric functions, V.) 135.
- Davidenko, D. F. (Methode der Variation des Parameters) 373.
- Davidon, William C. (Proper-time electron formalism) 221; (Proper-time quantum electrodynamics) 221.
- Davidson, J. F. (Buckling of beams) 196.
- Davis, Anne C. (Complete lattices) 261.
- Davydov, N. A. (Zweiter Abelscher Satz) 315.
- Daymond, S. D. (Frequencies of vibrating systems) 377.
- Deas, Herbert D. (Unsaturated hydrocarbons) 233.
- Deheuvels, René (Suite de faisceaux) 170; (Invariants d'une application continue) 171.
- Deicke, Arno (Finsler space) 164.
- Dekker, J. C. E. (Productive sets) 10.
- Delachet, A. s. M. Queysanne 263.

- Delaporte, Pierre (Coefficient de corrélation d'un caractère) 142.
- Delone, A. B. s. G. M. Idlis 240.
- Demčenko, O. P. (Frequenzcharakteristiken von Reglersystemen) 124.
- Dempster, A. P. and S. Schuster (Poles and polars) 146.
- Denavit, J. and R. S. Hartenberg (Lower-pair mechanisms) 156.
- Denbow, C. H. (Postulates and mathematics) 241.
- Denisjuk, I. N. (Festigkeit eines Schachtseils) 184.
- Denjoy, Arnaud (Théorème de Vitali) 51; (Séries de fractions rationnelles) 54; (Théorème de Cauchy-Goursat) 67; (Intégrale de Cauchy) 67; (Points critiques) 70.
- Dequoy, N. (Axiomatique intuitionniste) 12.
- Deresiewicz, H. and R. D. Mindlin (Vibrations of a disk) 196.
- Derjagin, B. V. s. S. V. Nerpın 234.
- Derman, C. and H. Robbins (Strong law of large numbers) 382.
- Derwidié, L. (Vecteurs propres d'une matrice) 375.
- Desoyer, K. s. G. Heinrich 440.
- Deuring, Max (Zetafunktion algebraischer Kurve. I. II.) 274.
- Devidé, Vladimir (Problem über Wägen) 13.
- Devınatz, Allen s. Alberto Calderón 368.
- DeYoung, John (Span loading for plan forms) 191.
- Diananda, P. H. (Limit theorem) 131.
- — — and A. Oppenheim (Irrationality of numbers. II.) 287.
- Dias Agudo, F. R. (Groups with operators) 249.
- Dienst, Hans-Rudolf (Prämienreserven bei Gruppenversicherungen) 393.
- Dieudonné, Jean (Witt groups) 255; (Groupes de Lie abéliens) 255; (Lie groups and Lie hyperalgebres. II.) 255; (Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie. III.) 256; (Lie groups and Lie hyperalgebres. IV.) 256.
- Dinghas, Alexander (Mittelwerte harmonischer Funktionen) 351.
- Dini, Ulisse (Opere. III.) 329.
- Dirac, P. A. M. (Stress tensor) 219.
- Divinsky, Nathan (Pseudoregularity) 268.
- Djerasimović, Božidar (Regelmäßige Kettenbrüche) 286.
- Dmitriev, A. A., T. V. Bončkovskaja und T. A. Kalinina (Temperatur und Druck während einer Sonnenfinsternis) 454.
- Dobrotin, D. A. (Erzwungene Lösungen linearer Differentialgleichungen) 331.
- Dold, Albrecht (Homotopieäquivalenz von Faserräumen) 174.
- Döring, Werner (Quantenmechanik) 446.
- Drazin, M. P. (Some inequalities) 53.
- Du Val, Patrick s. Val, Patrick Du 150.
- Duff, G. F. D. (Closed harmonic forms) 92.
- Duffin, R. J. (Biharmonic functions) 352.
- Dufresnoy, J. et Ch. Pisot (Fonctions méromorphes) 37; (Éléments d'accumulation d'entiers algébriques) 273.
- Dugas, R. s. Maurice D'Ocagne 1.
- Dugué, Daniel (Approximation par série de Fourier) 128; (Existence d'une norme) 128.
- Duimio, Fiorenzo (Dinamica relativistica della particella) 444.
- Duncan, D. G. (Euler-Fermat theorem) 40.
- W. J. (Test functions for stability) 88.
- Dunford, Nelson and J. Schwartz (Convergence of operator averages) 370.
- Dunnett, C. W. and M. Sobel (Approximations to probability integral) 385.
- Dwass, Meyer (Asymptotic normality of statistics) 389; (Simultaneous confidence intervals) 389.
- Dye, H. A. (Geometry of projections) 110.
- Dyson, Freeman J. (Electron spin resonance absorption. II.) 238.
- Džrbašjan, M. M. (Ableitungen ganzer Funktionen endlicher Ordnung) 317.
- Džvarševili, A. G. (Ungleichung von Bernštejn) 303.
- Eason, G., B. Noble and I. N. Sneddon (Integrals of Lipschitz-Hankel type) 65.
- Eckert, E. R. G. (Friction and heat transfer to surfaces in high velocity flow) 212.
- Eden, R. J. and N. C. Francis (Nuclear models) 225.
- Edge, W. L. (Isomorphism between  $LF(2,3^2)$  and  $\mathfrak{A}_6$ ) 143; (Line geometry) 143; (31-point geometry) 144.
- Edrei, Albert (Zeros of successive derivatives) 70.
- Edwards, D. A. (Vector-valued measure) 369.
- S. F. (Nucleon Green function) 222.
- Eells jr., James s. Charles B. Morrey jr. 352.
- Efremovič, V. A. (Fasttopologische Eigenschaften) 168.
- Egerváry, E. (Faktorisierung von Matrizen) 15.
- Eggleston, H. G. (Sets of constant width) 167.
- Egloff, Werner (Satz von Axel Schur) 398.
- Egorov, I. P. (Maximal bewegliche Riemannsche Räume) 408.
- V. G. (System von Gleichungen in totalen Differentialen) 336.
- Ehlers, F. Edward (Hodograph equation) 205.
- Jürgen (Einstein-Maxwellsche Feldgleichungen) 445.
- Ehrenfeld, Sylvain (Efficiency of experimental designs) 385.
- Ehrenpreis, L. (Problems of division. II.) 115.
- — — and F. I. Mautner (Representations of groups) 26.
- Ehresmann, Charles (Jet non holonome) 164; (Espace fibré différentiable) 175.
- Ehrlich, Fredric F. (Differentiation of experimental data) 142; (Flows in cascades of blades) 197.
- Ehrlich, Gertrude (Invariant subgroups) 265.

- Ehrman, J. B. s. G. Breit 225.
- Eichler, Martin (Heinrich Brandt †) 242.
- Eilenberg, Samuel and Saunders MacLane (Homology theory of Abelian groups) 27.
- Ejdus, D. M. (Randwertaufgabe für  $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ ) 98.
- Eliseev, G. P. s. V. A. Ljubimov 231.
- Elliott, R. J. and R. L. Lowde (Scattering of neutrons by magnetic spin waves) 239.
- Elston, Fred G. (Last theorem of Fermat) 41.
- Eltermann, Heinz (Näherungsweise Lösung von Differentialgleichungen) 375.
- Emersleben, Otto (Madelung-Konstante eines Kristalls) 235; (Summen Epstein-scher Zetafunktionen) 320; (Parallelströmung zäher Flüssigkeiten) 431.
- Engel, Wolfgang s. Ott-Heinrich Keller 3, 243.
- Enomoto, Shizu (Fonctions d'ensemble dans les groupes topologiques. I.) 260.
- Epheser, Helmut (Randwertaufgaben mit nichtlinearen Differentialgleichungen) 86.
- Epifanov, G. V. (Dichtigkeit zweidimensionaler Polyeder) 178.
- Epstein, Benjamin and Milton Sobel (Sequential life tests) 137.
- Marvin and Harley Flanders (Reduction of a matrix) 15.
- Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (Transcendental functions. III.) 63.
- Erdős, Paul and Michael Golomb (Functions which are symmetric about several points) 121.
- — and P. Turán (Lebesgue functions in Lagrange interpolation) 301.
- Ericksen, J. L. (Deformations in elastic material) 421; (Singular surfaces in plasticity) 426.
- — — s. R. S. Rivlin 420.
- Eršov, A. P. (Inversion von Matrizen) 15.
- Ertel, Hans (Algorithmus hydrodynamischer Wirbelgleichungen) 196; (Wirbeltheorem der Hydrodynamik) 196.
- Escande, Léopold (Cheminée d'équilibre déversante) 199.
- Espagnat, Bernard d' (États excités à très courte vie moyenne) 229.
- Evans, J. P. and J. L. Walsh (Interpolation to an analytic function) 315.
- Everhart, Edgar, Gerald Stone and R. J. Carbone (Differential cross section for scattering from a Coulomb potential) 452.
- Evgrafov, M. A. (Abel-Gončarovsche Interpolationsaufgabe) 119.
- Eweida, M. T. (Newton's series of interpolation) 314.
- Eyring, Henry and Taikyue Ree (Theory of plasticity) 236.
- Ezra, Jacques (Équations aux dérivées partielles quasi linéaires) 93.
- Fabre, Hervé (L'action photonique en gravitation) 446.
- Facciotti, Guido (Iperbole equilatera) 399.
- Fadini, Angelo (Teorema elementare di geometria) 397.
- Fan, Ky and A. J. Hoffman (Metric inequalities in space of matrices) 14.
- —, Olga Taussky and John Todd (Inequalities of Wirtinger) 298.
- — and John Todd (Determinantal inequality) 14.
- Farquharson, Robin (Notion d'équilibre) 134.
- Feller, William (Differential operators) 113.
- Fenyő, Stefan (Lineare partielle Integralgleichungen) 101.
- Férier, Joseph Kampé de s. Kampé de Férier, Joseph 133.
- Fernbach, Sidney, Warren Heckrotte and Joseph V. Lepore (Polarization of nucleons) 228.
- Feščenko, S. F. (Asymptotische Zerspaltung von linearen Differentialgleichungen) 88.
- Feshbach, Herman and S. I. Rubinow (Two-body method for triton) 225.
- Fettis, H. E. (Linear differential equations) 83.
- Fick, E. (Polarisation des Lichtes. II.) 214.
- Fieschi, R. (Galvanomagnetic and thermomagnetic phenomena) 211.
- Fil'čakov, P. F. (Sukzessive konforme Abbildungen) 76.
- Filippov, A. F. (Stabilität von Differenzgleichungen) 342.
- Findley, W. N. and J. J. Poczater (Creep-deflection and stress distribution in beams) 195.
- Finkelstein, R. J. (Non-local form factors) 449.
- Fischer, Günter (Selbergsche Formel) 41.
- Fišman, K. M. (Integraldarstellung ganzer Funktionen) 71.
- Fisz, M. (Theorem of Khintchin) 128; (Multinomial distribution) 131; (Probability limit theorem) 382; (Limiting distribution of a function of two random variables) 382.
- — s. J. Czechowski 421.
- Fjellstedt, Lars (Gleichzeitige Lösbarkeit von Kongruenzen) 37.
- Flanders, Harley s. Marvin Epstein 15.
- Flett, T. M. (Schlicht functions) 321.
- Flodmark, Stig (Covalent boron-boron bonds in crystals) 232.
- Fogels, E. K. (Primzahlen am Anfang einer arithmetischen Progression) 282.
- Ford, Lester R. (Differential equations) 330.
- Fornaguera, R. Ortiz s. Ortiz Fornaguera, R. 223.
- Forsythe, G. E. (SWAC computes semigroups of order 4) 20.
- — — and E. G. Straus (Best conditioned matrices) 375.
- Fortet, Robert s. André Blanc-Lapierre 128.
- Foster, Alfred L. (Universal algebras) 263.
- F. G. (Stochastic epidemic) 392.



- Fourès, Y. and I. E. Segal (Causality and analyticity) 368.
- Bruhat, Yvonne (Equations ultrahyperboliques) 94.
- Fowler, G. N. (Scattering of high energy electrons) 229.
- Fragner, Wolfram (Neuer Typ von Differentialgleichung) 82.
- Fraissé, Roland (Opérateurs dans les classes de relations) 287; ( $\gamma$ -opérateurs) 288.
- Frame, J. S. s. R. T. Hinkle 156.
- Franceschi, Odoardo (Superficie di H. A. Schwarz) 152.
- Francis, N. C. s. R. J. Eden 225.
- Franke, Herbert W. (Spannungstensor) 220.
- Franz, Walter und Raimund Galle (Beugung einer Welle am Zylinder) 441.
- Fréchet, Maurice (Différentielle d'une intégrale) 353; (Distinction entre les probabilités rationnelles et irrationnelles) 393.
- Freeman, N. C. (Shock waves) 206.
- Freistadt, Hans (Classical field theory) 224.
- Freud, G. (Differenzieren einer orthogonalen Polynomreihe) 302.
- Fricke, A. (Variationsaufgabe) 354.
- Friedlander, F. G. and Joseph B. Keller ( $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ ) 349.
- Friedman, M. H. and S. T. Butler (Bose-Einstein condensation) 235.
- — — s. S. T. Butler 235.
- Friedmann, N. E. and D. Rosenthal (Combined bending and torsion problems) 185.
- Friedrich, E. (Momente beim frei aufliegenden Balken) 422.
- Hans R. (Hydraulic servo systems) 183.
- Fröberg, Carl-Erik (Numerische Berechnungen) 126.
- Frucht, Max M. and Roscoe Guernsey jr. (Photoelastic problem) 184.
- Froese, C. s. T. E. Hull 102.
- Fröhlich, A. (Absolute class-group. I. II.) 273.
- Fröhlich, A. and J. C. Shepherdson (Factorization of polynomials) 249.
- Fröman, Per Olof (Cohesive energies of ionic crystals) 235.
- — — s. A. Bohr 229.
- Frucht, Robert (Finite groups) 24.
- Fryer, K. D. (Permutation groups) 25.
- Fuchs, Aimé (Théorème de N. Wiener) 131; (Opérateurs associés aux processus de Markoff) 383.
- L. (New type of radical) 265; (Idealtheorie kommutativer Ringe) 267.
- W. H. J. (Virial series of ideal Bose-Einstein gas) 452.
- Fues, E. und H. Stumpf (Gitterstatik von Kristallstrukturen) 235.
- Fujiwara, Tsuyoshi (Isomorphism problem for free algebraic systems) 265.
- Fuller, L. E. (Matrices over a principal ideal ring) 16.
- Fullerton, R. E. (Linear operators between  $L^p$  spaces) 370.
- Fung, Y. C. and W. H. Wittich (Boundary layer phenomenon in deflexion of thin plates) 189.
- Furuya, Shigeru (Van der Pol-Mathieu equation) 334.
- G. Allen, D. N. de s. Allen, D. N. de G. 198.
- Gaffney, Matthew P. (Hilbert space methods) 343.
- Gagua, M. (Galerkinsche Methode) 373; (Lineare Randwertaufgaben für elliptische Gleichungen) 377.
- Gale, David (Law of supply and demand) 394.
- Gallarati, Dionisio (Contatto di superficie algebriche lungo curve) 401.
- Galle, Raimund s. Walter Franz 441.
- Galletly, G. D. (Influence coefficients for hemispherical shells) 190.
- Galli, Mario (Speculazioni galileiane relative alla forza centrifuga) 1.
- Ganea, Tudor (Multikohärenz topologischer Gruppen. II.) 28.
- Gardner, Robert S. s. John E. Maxfield 139.
- Garza, A. de la, D. S. Hawhurst and L. T. Newman (Minimum cost experimental procedures) 142.
- Gatteschi, Luigi (Derivata delle funzioni di Bessel) 308.
- Gatto, R. (Pion production) 223.
- Gauss, F. (Schwungsverhalten luftbereifter Fahrzeuge) 182.
- Gauthier, Luc (Nombres de Betti des intersections de formes quadratiques) 153.
- Gedizli, H. S. (Tölke's tables for computation of the circular plate) 423.
- Gehér, L. s. J. Czipszer 54.
- Gehring, F. W. (Paper by L. C. Young) 52.
- Gejdel'man, R. M. (Stratifizierung von Kreis- und Kugelkongruenzen) 162.
- Gelfand, I. M. und M. I. Graev (Analogon der Plancherelschen Formel) 28; (Spuren unitärer Darstellungen) 111.
- — — und V. B. Lidskij (Stabilitätsgebiete von Differentialgleichungssystemen) 89.
- Gelfond, A. O. (Satz von Dirichlet) 41.
- — — s. P. L. Čebyšev 1.
- Gelsomini, Theo, e Alessandro Smid (Applicazione di statistica nelle imprese elettriche) 142.
- Geronimus, Ja. L. (Orthogonalreihen) 314.
- Geršman, B. N. und V. L. Ginzburg (Inhomogenitäten in der Ionosphäre) 454.
- Gerstenhaber, Murray (Canonical constructions. I.) 9.
- Gherardelli, Francesco (Catena delle sizigie di un ideale di funzioni theta) 404.
- Ghurye, S. G. (Random functions. II.) 381.
- Gil', G. V. s. A. D. Myškis 79.
- Gilbarg, David and James Serrin (Subsonic flow past a finite body) 199.
- Gillings, R. J. (Greek mathematics) 241.
- Ginzburg, V. L. s. B. N. Geršman 454.
- Giorgi, Ennio de (Non-unità della soluzione del problema di Cauchy) 345.

- Girardin, Pierre (Effet du jet d'un engin autopropulsé) 180.
- Girkmann, K. (Karl Federhofer) 242.
- Glass, I. I. and G. N. Patterson (Shock-tube flows) 206.
- Glauert, M. B. and M. J. Lighthill (Boundary layer on a cylinder) 435.
- Glazman, I. M. und P. B. Najman (Orthogonale Spektralfunktionen) 85.
- Gleason, A. M. s. R. E. Greenwood 179.
- Glicksberg, Irving s. Richard Bellman 395.
- Gluckstern, R. L. s. L. C. Biedenharn 227.
- Gluskin, L. M. (Homomorphismen von Halbgruppen auf Gruppen) 250; (Einfache Halbgruppen mit Null) 250.
- Gluskov, V. M. (Gruppen, die über einem topologischen Körper vollständig sind) 28; (Liesche  $Z$ -Algebren) 35.
- Gnedenko, B. V. (A. J. Chinčín) 3.
- W. und A. J. Chinčschin (Wahrscheinlichkeitsrechnung) 127.
- Gochberg, I. C. (Unbeschränkte Operatoren) 120.
- Goddard, L. S. (Transition matrices) 132; (Characteristic function of matrix product) 248.
- Godeaux, Lucien (Courbes tracées sur une surface multiple. I. II.) 151; (Points de diramation d'une surface multiple d'ordre 37) 151; (Complexes linéaires en involution) 162; (Équation différentielle linéaire) 331; (Points de diramation) 400; (Surfaces algébriques contenant des involutions cycliques) 401.
- Godfrey, D. E. R. (Plane stress in an elastic wedge) 192.
- Godwin, H. J. (Minima of norms) 43.
- Goffman, Caspar (Convergence in area of integral means) 294.
- Goheen, Harry (Wedderburn theorem) 33.
- Gohier, Simone (Calottes convexes) 406.
- Gol'berg, P. A. (Sylowsche  $II$ -Basen) 22.
- Gold, Louis (Neutron interaction in magnetics) 237.
- Goldberg, S. I. (Euler characteristic) 269.
- Gol'denblat, I. I. (Elastoplastische Deformationen) 194.
- Goldhamer, Herbert s. Andrew W. Marshall 392.
- Goldstine, Herman H. and John von Neumann (Blast wave calculation) 207.
- Golomb, Michael s. Paul Erdős 121.
- Gombás, P., E. Mágori, B. Molnár und E. Szabó (Statistische Theorie des Atomkerns. III.) 227.
- Gonçalves, J. Vicente (Développement des irrationalités quadratiques en fraction continue) 286.
- Gončar, A. A. (Beste Annäherungen) 60.
- Goodman, A. W. (Almost bounded functions) 320.
- — — and E. Reich (Univalent functions. II.) 74.
- Goormaghtigh, R. (Point de Miguel) 397.
- Gordon, I. I. (Satz von Kakutani) 177.
- — M. M. (Rutherford scattering formula) 218.
- Görtler, H. (Boundary layer effects in aerodynamics) 436.
- Gosselin, Richard P. s. Leonard D. Berkovitz 306.
- Goto, Morikuni (Imbedding of groups) 258; (Automorphisms of a locally compact connected group) 258.
- Graev, M. I. s. I. M. Gel'fand 28, 111.
- Grammel, R. (Diophantische Vektorgleichungen) 283.
- Grant, I. P. ( $(d, p)$  and  $(d, n)$  reactions. II.) 219.
- Grauert, Hans (Holomorphe vollständige komplexe Räume) 326.
- — — und Reinhold Remmert (Modifikationen. I.) 81.
- Graves, Lawrence M. (Riesz theory) 371.
- Green, A. E. (Deformation of compressible isotropic bodies) 194.
- C. D. and D. ter Haar (Fluctuations in mechanical models) 210.
- — — s. D. ter Haar 210.
- H. S. (Nucleon-nucleon interaction) 225.
- Greenhouse, Samuel W. s. Max Halperin 135.
- Greenspan, Donald s. Stanley B. Jackson 146.
- Greenwood, R. E. (Coupon collector's test) 139.
- — — and A. M. Gleason (Chromatic graphs) 179.
- Gregory, N., J. T. Stuart and W. S. Walker (Stability of boundary layers) 436.
- Grib, A. A. (Ebene, zylindrische und sphärische Wellen) 96.
- — — und A. G. Rjabinin (Gleichungen der Überschallbewegung eines Gases) 205.
- Gröbner, W. s. F. Cap 223.
- Grogan, G. C. s. R. N. Haskell 201.
- Groot, S. R. de s. G. J. Hooyman 211.
- — — s. G. A. Kluitenberg 211.
- Grosjean, C. C. (Frequency equation) 213.
- Gross, Oliver s. Richard Bellman 395.
- Grossman, L. M. s. P. L. Chambré 212.
- Grotemeyer, Karl-Peter (Verbiegungen von geschlossenen Raumkurven) 157.
- Grothendieck, Alexandre (Produits tensoriels topologiques) 355.
- Grün, Otto (Homomorphe Abbildungen von Gruppen) 23.
- Grzegorzczak, A. (Elementarily definable analysis) 9.
- Guelfi, Julien s. René Lucas 209.
- Guernsey jr., Roscoe s. Max M. Frocht 184.
- Guier, William H. s. Robert W. Hart 240.
- Guinand, André Paul (Identité de M. Halphen) 52.
- Gul', I. M. (Cauchysches Problem für partielle Differentialgleichungen) 94.
- Gulland, J. A. (Population parameters) 141.
- Gumbel, E. J. (Gompertz-Makeham'sche Formel) 392.
- Gupta, A. M. s. Sen s. Sen Gupta, A. M. 188.
- K. K. (Green's functions for equations of particles) 447.
- Gurevič, G. B. (Liesche Standard-Algebren) 36.

- Gurk, Herbert M. (Stability charts) 379.
- Gurland, John (Definite and indefinite quadratic forms) 129.
- Guseva, O. V. (Randwertaufgaben für stark elliptische Systeme) 97.
- Guy, Jean et Jacques Tillieu (Susceptibilité magnétique des liaisons) 6) 238.
- Gvozdkov, N. N. (Reibung eines Keils in Überschallströmung eines Gases) 205.
- Haar, D. ter and C. D. Green (Ehrenfests' windwood model) 210.
- — — s. C. D. Green 210.
- Hadwiger, H. (Konvexe Körper) 165; (Eulers Charakteristik) 166.
- Hagenow, Karl Ulrich v. (Rotierende kosmische Gasmassen) 453.
- Haimo, Franklin (Endomorphisms of class 2 groups) 22; (Normal automorphisms) 22.
- Halberstam, H. (Additive number-theoretic functions) 42.
- Hallén, Erik (Iterated sine- and cosine-integrals) 308.
- Halperin, Max, Samuel W. Greenhouse, Jerome Cornfield and Julia Zalokar (Percentage points for studentized maximum absolute deviate) 135.
- Halstedt, G. B. s. John Bolyai 145.
- — — s. N. Lobachevski 145.
- Hammer, P. C. (Procedures for taking roots) 124; (Maximal convex sets) 166; (Constant breadth curves) 167.
- Hämmerlin, Günther (Eigenwertproblem der Instabilität laminarer Grenzschichten) 203.
- Hammersley, J. M. (Storage problems) 133.
- Hannan, James F. and Herbert Robbins (Compound decision problem) 387.
- Hanneken, C. B. (Quintic congruences) 19.
- Hano, Jun-ichi and Akihiko Morimoto (Affine transformations of an affinely connected manifold) 165.
- Harish-Chandra (Representations of a semisimple Lie group) 259.
- Harmuth, Henning (Wärmeleitungsgleichung) 126.
- Hart, Robert W. and William H. Guier (Weakly interacting particles) 240.
- V. G. (Equilibrium of membranes) 187.
- Hartenberg, R. S. s. J. Denavit 156.
- Hartley, H. O. (Analysis of variance) 136.
- Hartman, Philip and Aurel Wintner (Linear differential equations) 87; (Mean value theorems) 119; (Asymptotic values for linear differential equations) 332.
- Hasegawa, Kazu and Shukô Azuma (Scattering phase shifts) 447.
- Hashimoto, Hiroshi (Structure of semigroups) 251; (Kernel of semigroups) 251.
- Haskell, R. N. and G. C. Grogan (Slender bodies of low wave drag) 201.
- — — and W. S. Johnson jr. (Loading on wings) 206.
- Hassitt, A. (Fractional parentage coefficients) 228.
- Haupt, Otto, Georg Aumann und Christian Y. Pauc (Differential- und Integralrechnung. III.) 48.
- Hawxhurst, D. S. s. A. de la Garza 142.
- Haynsworth, Emilie V. (Quasi-stochastic matrices) 16.
- Heaps, H. S. (Detection of a random signal) 133.
- Heber, G. (Elementarteilchen. I.) 451.
- Heckrotte, Warren s. Sidney Fernbach 228.
- Heider, L. J. (Theorem of K. G. Wolfson) 366.
- Heilbronn, Georges (Intégration par la méthode de Drach) 92.
- Heinrich, G. und K. Desoyer (Grundwasserströmungen) 440.
- Heins, A. E. and S. Silver (Edge conditions and field representation) 213.
- Helfenstein, H. G. (Conformal maps) 323.
- Hellman, O. (Matrizanten bei Eigenwertaufgaben) 375.
- Hellwig, Günter (Verbiegbarkeit von Flächenstücken) 158.
- Helmbold, H. B. (Auftrieb eines Blasflügels) 201; (Lift of a blowing wing) 202.
- Helson, Henry (Theorem of Szegő) 68; (Theorem of F. and M. Riesz) 316.
- Hénon, Michel (Machine analogique) 126.
- Henrici, Peter (Fehlerintegral) 125; (Helical springs) 184.
- — s. Bernard Chaix 205.
- Henstock, R. (Linear functions) 363.
- Herbst, Eugene H., N. Metropolis und Mark B. Wells (Problem codes on the MANIAC) 126.
- Hermann, Robert (Espaces homogènes compacts) 417.
- Hermes, Hans (Verbandstheorie) 29.
- Herstein, I. N. (Lie and Jordan rings) 36.
- Hervé, Michel (Valeurs omises par une fonction méromorphe) 317.
- Hewitt, Edwin und Herbert S. Zuckerman (Convolution algebras) 269.
- Heywood, P. (Integrability of functions. II.) 61; (Integrability theorems for power series) 62.
- Hicke, Max (Airysche Fläche) 425.
- Hilton, P. J. (Homotopy groups of unions of spaces) 172; (Homotopy groups of the union of spheres) 173; ( $p$ -homomorphism in homotopy groups) 173.
- Hines, Jerome (Operator mathematics. II.) 115.
- Hinkle, R. T., C. Ip and J. S. Frame (Acceleration in mechanisms) 156.
- Hiong, King-Lai (Valeurs exceptionnelles des fonctions holomorphes) 73; (Théorème de M. Milloux) 317.
- Hirasawa, Yoshikazu (Perturbation problems of systems of differential equations) 341.
- Hirschfeld, K. (Kreisförmiger Stollen unter Temperaturbeanspruchung) 212.
- Ho, Kuo-Chu (Double interpolation formulae) 379.



- Hodges jr., J. L. (Galton's rank-order test) 139.
- Hoeffding, Wassily (Expected value of a function) 381.
- Hoel, Paul G. (Sequential test for linear hypothesis) 139.
- Hoff, N. J. (Donnell's equations) 424.
- Hoffman, A. J. s. Ky Fan 14.
- Hoggatt, Vern (Fibonacci numbers) 39.
- Hohenberg, F. (Satz von Pohlke) 418; (Herstellung von Perspektiven) 419.
- Hohn, Franz E. s. Franco Modigliani 395.
- Holöien, E. (Analytic wave functions for configurations) 231.
- Holt, M. s. F. J. Berry 207.
- Hönig, Chaim Samuel (Topologies semi-régulières) 410.
- Hooton, D. J. (Anharmonicity in lattice thermodynamics. I. II.) 236.
- Hooyman, G. J. and S. R. de Groot (Phenomenological equations) 211.
- Hopf, Heinz (Schlichte Abbildungen und Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten) 417.
- Hopkins, A. Olive (Concomitants of quintic) 19.
- H. G. and W. Prager (Limits of economy of material in plates) 421.
- J. W. (Negative hypergeometric sampling) 136.
- Hörmander, Lars (Transformation de Legendre) 103; (Fonction d'appui des ensembles convexes) 105.
- Horner, Walter W. (Magic square of order 8) 40.
- Hornfeck, Bernhard (Berichtigung) 281.
- Hornich, Hans (Überall unlösbare lineare partielle Differentialgleichungen) 93; (Nirgends lösbare partielle Differentialgleichungen) 93.
- Horvay, G. and J. S. Born (Self-equilibrating functions) 424.
- — — I. M. Clausen (Membrane and bending analysis of shells) 190.
- Hoskin, B. C. and J. R. M. Radok (Root section of a swept wing) 423.
- Houbolt, John C. s. Harry Press 208.
- Hove, L. van s. G. Placzek 237.
- Howe, C. E. and R. M. Howe (Application of electronic differential analyzer to oscillation of beams) 195.
- R. M. s. C. E. Howe 195.
- Hua, Loo-Keng (Functions of several complex variables. II.) 79.
- Huang, T. C. (Harmonic oscillations of two-degree-of-freedom systems) 182.
- Huber, Alfred (Elastic sphere under torques) 193.
- Peter (Mathematischer Keilschrifttext) 1.
- Huet, Denise (Confluence des fonctions de Bessel) 65.
- Huff, G. B. (Quasi-idempotent matrices) 248.
- Hukuhara, Masuo (Polygones caractéristiques d'une équation différentielle) 335; (Endomorphismes de l'espace vectoriel) 370.
- Hull, T. E. and C. Froese (Inverse of a Laplace transform) 102.
- jr., M. H. s. L. C. Biedenharn 227.
- — — s. G. Breit 225.
- Hult, J. A. H. (Critical time in creep buckling) 428.
- Hunn, B. A. (Normal modes of an aircraft) 208.
- Hunt, G. A. (Inequality in probability theory) 130.
- Huppert, Bertram (Permutationsgruppen) 253.
- Hurley, A. C. (Method of atoms in molecules) 233.
- Huron, Roger (Loi multinomiale) 387.
- Huth, J. H. (Plastic torsion) 428.
- Ibadzade, Ju. A. (Oberfläche des Wassers) 197.
- Idlis, G. M. (Pekuliargeschwindigkeiten von Sternen) 240.
- — — M. G. Karimov, A. B. Delone und S. O. Obašev (Magnetfeld in Protuberanzen) 240.
- Igusa, Jun-ichi (Arithmetic genera of normal varieties) 152.
- Ikeda, Mineo (Einstein's theory of gravitation. II.) 446.
- Iliev, Ljubomir (Summen von schlichten Funktionen) 322; (Differenzenquotient bei schlichten Funktionen) 322.
- Il'in, A. M. (Dirichletsches Problem für eine Gleichung vom elliptischen Typus) 98.
- Il'jušin, A. A. (Plastizitätstheorie) 194.
- Imai, Isao (Thin airfoil theory) 200.
- Infeld, L. (Equations of motions) 446.
- Inokuma, Takeshi (Completely normal spaces) 169.
- Inthoff, W. (Statistische Theorie der Atomkerne) 227.
- Ip, C. s. R. T. Hinkle 156.
- Isaacs, Rufus (Card game) 134.
- Isay, Wolfgang-Hermann (Kompressible Unterschallströmung) 200.
- Iséki, Kiyoshi (Théorème de M. G. Thierrin) 20; (Conjecture of K. Nagami) 412.
- Ishihara, Tadashige (Multiplication of distributions) 114.
- Itô, Noboru (Produkt abelscher Gruppen) 252; (Fratini-Gruppe einer endlichen Gruppe) 253.
- Ivanova, V. M. (Räume von Teilmengen) 168.
- Jacchia, Luigi (Numerical integration of functions) 125.
- Jackson, J. Edward and Eleanor L. Ross (Tables for use with the „G“ test) 388.
- Stanley B. and Donald Greenspan (Hyperbolic analytic geometry) 146.
- Jacob jr., Henry G. (Mappings on Kronecker products) 33.
- Jacobs, J. (Effect of 3p-electrons) 231.
- Konrad (Beschränkte Gruppen im Hilbert-Raum) 111.
- Jacobs, Willi (Downwash behind wings at supersonic speeds) 438.
- Jacobson, N. (Commutative restricted Lie algebras) 35; (Division ring extensions) 269; (Automorphisms and derivations of Lie algebras) 270.
- Jaeger, Arno (Multidifferential polynomials) 272; (Relation between multi-

- differential polynomials and transposed matrices) 272.
- Jakubovič, V. A. (Lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten) 337.
- James, A. T. (Wishart distribution) 129; (Averages over orthogonal group) 130.
- I. M. (Reduced product spaces) 415.
- R. D. (Integrals and trigonometric series) 61.
- Jancel, Raymond (Théorie ergodique) 210.
- et Théo Kahan (Principe de négentropie) 215.
- s. Maria Lozzi 213.
- Janenko, N. N. (Quasilineare Gleichungen) 94.
- Janet, Maurice (Transformation de Laplace) 102.
- Jenkins, J. A. (Schottky's theorem) 73.
- James A. (Lemma of R. Huron) 74; (Uniqueness results in symmetrization) 75; (Bieberbach-Eilenberg functions. II.) 320.
- Jenne, Werner (Poissonsche Gleichung) 377.
- Jensen, J. Hans D. s. Berthold Stech 230.
- Jéquier, Ch. (Assurances d'annuités sur une et plusieurs têtes) 393.
- Jessop, W. N. (Analysis of usage trials) 136.
- Jindra, E. (Verzerrungszustand des dickwandigen Rohres) 194.
- Jochvidov, I. S. (Toeplitzsche Formen) 368.
- Johnson, H. T. (Stress distribution in a shaft) 186.
- jr., W. S. s. R. N. Haskell 206.
- Jones, Burton W. and Donald Marsh (Theorem of Meyer) 19.
- Jones, D. S. (Scattering of a scalar wave) 213; (Fluid past a thin aerofoil) 433.
- Jongmans, F. (Périodes des formes harmoniques) 343.
- Jordan, Henri (Montonie von  $sn(tK)$ ) 64.
- Jörgens, Konrad (Harmonische Abbildungen) 352.
- Julia, Gaston (Géométrie infinitésimale. Fasc. 2) 154; (Fasc. 4) 155; (Fasc. 3) 156.
- Jung, H. (Hillsche Minimalbedingung) 194.
- Jung, Hans Peter (Schlichte Funktionen) 320.
- Junger, M. C. (Effect of a supersonic fluid on pressure) 206.
- Kaazik, Ju. Ja. und É. É. Tamme (Angenäherte Lösung von Funktionalgleichungen) 121.
- Kadison, R. V. (Linear group of infinite factors) 27; (Isomorphisms of factors) 366; (Additivity of the trace in finite factors) 366; (Operator representations) 366.
- Kadosch, Marcel s. François Maunoury 199.
- Kahan, Théo s. Raymond Jancel 215.
- s. Maria Lozzi 213.
- Kahane, Jean-Pierre (Fonctions approchables par des sommes d'exponentielles) 359.
- Kähler, Erich (Tensori sopra una varietà algebrica) 403.
- Kainer, Julian H. (Pitching-moment coefficient) 434.
- Kalinina, T. A. s. A. A. Dmitriev 454.
- Kaluza jr., Th. (Vermutung von H. Hopf) 179.
- Kammerer, Albert (Constraints des pièces prismatiques traités thermiquement) 425.
- Kampé de Fériet, Joseph (Équation de la chaleur) 133.
- Kampen, N. G. van (Scattering states. I.) 217.
- Kantz, Georg (Analytische Funktion und ihre Umkehrfunktion) 313.
- Kanwal, R. P. (Oscillations of axisymmetric bodies in viscous fluid) 198; (Vibrations of an cylinder) 209.
- Kappus, Robert (Durch zwei Einzelkräfte belasteter Kreisring) 423.
- Karas, K. (Rotierende Scheiben) 423.
- Karimov, M. G. s. G. M. Ildis 240.
- Karlikov, V. P. (Punkthafte Explosion) 206.
- Karol', I. L. (Gleichung vom gemischten Typus) 345.
- Karpelevič, F. I. (Untergruppen Liescher Gruppen) 28.
- Kashiwagi, Sadao s. Shigeo Ozaki 368.
- Kaufman, R. N. (Dielektrische Schicht mit Hohlraum) 212.
- Kawada, Yukiyo (Cohomology in abstract unit groups) 27.
- Kaye, Joseph (Integrals of error function) 381.
- Keil, Karl-August (Integralcurven gewöhnlicher Differentialgleichung erster Ordnung) 335.
- Keller, Joseph B. s. F. G. Friedlander 349.
- Ott-Heinrich und Wolfgang Engel (H. W. E. Jung) 3, 243.
- Kemmer, N. and Abdus Salam (Relativistic equation for scattering) 218.
- Kempner, Joseph (Donnell's equations) 191.
- Kendall, M. G. s. F. N. David 135.
- Kennard, E. H. (Cylindrical shells) 424.
- Kennedy, Ernest C. (Supersonic aerodynamic flutter coefficients) 206.
- P. B. (Conjecture of Heins) 100.
- Keown, E. R. (Reflexive Banach algebras) 365.
- Kertész, A. (Linear equation systems over semi-simple rings) 264.
- Kessler, Paul (Calcul approché en théorie des perturbations) 216; (Terme du second ordre en théorie des perturbations) 216.
- Kibel', I. A. (Luftbewegung) 454.
- Kiefer, J. and J. Wolfowitz (Theory of queues) 133.
- Kimball, Bradford F. (Theory of extreme values) 385.
- Kimura, Motoo (Process of random genetic drift) 391.
- Kinukawa, Masakiti (Integro-jump of a function) 62.
- Kiš, O. (Trigonometrische Interpolation) 68.
- Kivel, B., S. Bloom and H. Margenau (Electron impact broadening of spectral lines) 454.
- Klamkin, Murray S. (Buffon needle problem) 134.
- Klee, V. L. (Extreme points) 106.
- jr., V. L. (Convex sets) 105; (Separation properties of convex cones) 356.

- Klein, Bertram s. Hugh L. Cox 187, 196.  
 — Martin J. (Principle of detailed balance) 210.  
 Klingenberg, Wilhelm (De-sarguescher Satz) 145.  
 Klöter, Hubert und Alfred Stöhr (Wesentliche Komponenten und asymptotische Dichte) 281.  
 Kluitenberg, G. A. and S. R. de Groot (Irreversible processes. III. IV. V.) 211.  
 Knappe, Werner (Hydrodynamisches Modell) 212.  
 Kneser, Martin (Satz über abelsche Gruppen) 43.  
 Knörlein, Franz (Mathematik der Gruppenversicherung) 393.  
 Kobzarev, I. Ju. (Zerstrahlungsquerschnitte des Antiprotons) 450.  
 Koehler, Max (Modulformen. II.) 328.  
 Kohn, W. and J. M. Luttinger (Donor states in silicon) 238.  
 — — s. J. M. Luttinger 238.  
 Koiter, W. T. (Diffusion of load from a stiffener into a sheet) 191.  
 Kolesnikov, A. G. und A. A. Pivovarov (Temperaturgang des Meeres) 454.  
 Kolmogorov, A. N. (Elementenzahl von E-Netzen) 108.  
 Komatu, Yūsaku (Boundary value problems for a rectangle) 349.  
 König, Heinz (Distributionen. I.) 113.  
 Koppe, H. (Halbquantisierte Systeme) 216; (Umkehrungsproblem) 451.  
 Kordemskij, B. A. s. Ja. I. Perel'man 241.  
 Korhonen, Unto (Atomic scattering factors) 237.  
 Koroljuk, V. S. (Asymptotische Genauigkeit der Netzmethode) 125.  
 Korovin, V. I. ( $R$ -System) 161.  
 Kosmačevskij, V. K. s. V. A. Ljubimov 231.  
 Koster, G. F. (Hund's rule) 217.  
 Kotel'janskij, D. M. (Matrizen-spektrum) 17; (Spektrum von Matrizen) 18; (Spektrum einer Matrix) 247.  
 Köthe, G. (Heutige Mathematik) 243.  
 Koval', P. I. (Systeme von Differenzgleichungen) 342.  
 Kovancov, N. I. (Grenzpunkte und Brennpunkte einer Kongruenz) 159; (Projektive Rotationskomplexe) 162.  
 Kovda, A. V. s. V. A. Ljubimov 231.  
 Kozlova, Z. I. (Bedeckung von Mengen) 289.  
 Kraitchik, M. (Carrés magiques) 277.  
 Krames, Josef (Gefährliche Drehzylinder beim Rückwärtseinschnitt) 419.  
 Krasnosel'skij, M. A. (Sukzessive Approximationen) 120; (Drehung eines Vektorfeldes) 177; (Mittelbildung in nicht-linearer Mechanik) 339.  
 — — und V. I. Sobolev (Orliczsche Räume) 108.  
 Krasovskij, N. N. (Stabilität der Bewegung) 339; (Umkehrung der Sätze von A. M. Ljapunov) 340.  
 Kravtchenko, Julien und John S. McNowen (Seiche in rectangular ports) 439.  
 Krbek, Franz von (Wohlordnung) 289.  
 Krejn, S. G. s. M. A. Krasnosel'skij 339.  
 Kreyszig, Erwin (Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten) 80; (Einschließung von Eigenwerten) 123.  
 Krickeberg, Klaus (Obere und untere Integrale) 49; (Differentialgleichung der Sphäroidfunktionen) 332.  
 Krishna Rao, T. s. Rao, T. Krishna 124.  
 Kromm, Alexander (Randquerkräfte bei gestützten Platten) 188.  
 Kröner, Ekkehart (Innere Spannungen) 236.  
 Krylov, N. M. (Zum 75. Geburtstag) 4.  
 Kubo, Tadao (Kelvin principle. I. II. III.) 323.  
 Kudrjavcev, L. D. (Ableitung von Radon-Nikodym) 294.  
 Kuipers, L. and B. Meulenbeld (Symmetric polynomials) 18.  
 Kulik, S. (Cubic equations) 124.  
 Kummel, Hermann (Wechselwirkung vieler Teilchen. I.) 220.  
 Künzi, Hans P. (Konstruktion Riemannscher Flächen) 77; (Geometrische Wertverteilung) 78; (Rolf Nevanlinna) 243.  
 Kuo, Y. H. (Interaction between conical field and plane shock) 206.  
 Kuper, C. G. (Fröhlich's superconductor) 453.  
 Kuramochi, Zenjiro (Harmonic functions on Riemann surfaces) 325; (Analytic functions on Riemann surfaces) 325.  
 Kuratowski, K. (Mathematisches Institut der Polnischen Akademie) 241.  
 Kuribayasi, Akikasu (Functions of bounded Dirichlet integral) 323.  
 Kurita, Minoru (Conformal Riemann spaces) 408.  
 Kurosch, A. G. (Theory of groups. I. II.) 251.  
 Kurth, Rudolf (Statistische Mechanik der Sternsysteme) 240.  
 Kurzweil, J. (Approximation in Banach spaces) 108.  
 Küssner, H. G. (Elastisch-plastisches Kontinuum) 193.  
 Kutuzov, A. I. s. B. A. Azimov 185.  
 LaBorde, H. T. s. Alfred Brauer 122.  
 Ladyženskaja, O. A. (Cauchy'sches Problem für hyperbolische Gleichungen) 95; (Instationäre Operatorgleichungen) 96.  
 Lafleur, Ch. s. V. Namias 102.  
 Laforgue, Alexandre (Ensemble des états d'un système stationnaire) 452.  
 Laha, R. G. s. D. Sarkar 140.  
 Lakin, W. (Spin polarization of the deuteron) 217.  
 Lalaguë, Pierre (Fonctions indéfiniment dérivables) 53.  
 Lambek, Joachim and Leo Moser (Integers  $n$  prime to  $f(n)$ ) 279.  
 Lamouche, André (Théorie harmonique) 4.  
 Landahl, Marten, Holt Ashley and Erik Mollo-Christensen (Compressible flow



- around oscillating wings) 200.
- Landis, E. M. s. I. G. Petrovskij 334.
- Landsberg, Max (Spektrum der Endomorphismen eines linearen Raumes) 109.
- Lang, Serge (Abelian varieties) 39.
- Langefors, Börje (Linear equations) 122.
- Larsson, David F. (Nombre  $N$  écrit dans la base  $B$ ) 277.
- Latyševa, K. Ja. (V. P. Ermakov) 82; (Lineare Differentialgleichungen) 83.
- Lauffer, R. (Interpolation mehrfacher Integrale) 59.
- Laugwitz, Detlef (Normtopologien) 105.
- Lavrent'ev, M. A. und B. V. Šabat (Methoden der Theorie der Funktionen) 66.
- M. M. (Cauchysches Problem für Laplacesche Gleichung) 100.
- Lax, Melvin (Canonical and microcanonical ensembles) 209; (Molecular field) 239.
- — and Elias Burstein (Infrared lattice absorption in crystals) 239.
- Peter D. (Reciprocal extremal problems) 313.
- Lebedev, N. A. (Majorantenbereiche für
- $$J = \ln \left( \frac{z^\lambda f'(z)^{1-\lambda}}{f(z)^\lambda} \right)$$
- 322; (Konforme Abbildungen eines Kreises) 324.
- Leblanc, Hugues (Deductive logic) 5.
- LeCam, L. (Wald's theory of statistical decision functions) 387.
- Leech, John (Seven region maps on a torus) 178.
- Légrand, Gilles (Espaces presque complexes) 163; (Connexions infinitésimales) 164.
- Lehman, R. Sherman (Approximation of improper integrals) 44.
- Lehmer, D. H. (Distribution of totatives) 279.
- Emma (Solutions of  $u^k + D \equiv w^2 \pmod{p}$ ) 278.
- Lehner, Joseph and G. Milton Wing (Operator arising in transport theory of neutrons) 230.
- Leichtweiss, Kurt (Extremalprobleme der Minkowski-Geometrie) 167.
- Leighton, Walter and Allan D. Martin (Quadratic functionals) 354.
- Leja, F. (Function mapping conformally a simply connected domain upon a circle) 325.
- Lekkerkerker, C. G. (Determinant of asymmetric hyperbolic region) 46.
- Lelong-Ferrand, Jacqueline (Formes différentielles) 91; (Représentation conforme) 322.
- Lemoine, Simone (Réductibilité de variétés riemanniennes complètes) 408.
- Lemos, Victor Hugo de (Vermessungen in der Kartographie) 419.
- Lenoble, Jacqueline (Méthode de Chandrasekhar) 454.
- Lenoir, Marcel (Théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger) 445.
- Leone, Fred C. s. Chester W. Topp 136.
- Leont'ev, A. F. (Exponentialfunktionen in krummlinigem Streifen) 314.
- Leontovič, E. and A. Majer (Zerlegung in Trajektorien) 339.
- Lepore, Joseph V. s. Sidney Fernbach 228.
- Leppert jr., E. L. (Characteristic values in problems of airplane dynamics) 199.
- Leptin, Horst (Moduln und Ringe) 32; (Funktionalgleichung der Zeta-Funktion) 37.
- Lesieur, L. (Idéaux irréductibles d'un demi-groupe) 21; (Demi-groupes) 261.
- Levič, V. G. (Erregung und Dämpfung von Wellen durch den Wind) 204.
- Levinson, C. A. s. K. A. Brueckner 226.
- Norman s. Earl A. Codrington 330.
- Levit, R. J. (Minimax problems) 13.
- Levitan, B. M. (Entwicklung nach Eigenfunktionen) 97.
- Lévy, Paul (Fonctions aléatoires gaussiennes) 131; (Mouvement brownien. III.) 133.
- Levy, Salomon (Heat conducting bodies) 203.
- Lewis, D. C. (Periodic solutions of systems having relatively invariant line integrals) 340.
- J. T. (Ionic configuration interaction in hydrogen molecule) 232.
- —, M. R. C. McDowell and B. L. Moiseiwitsch (Hydrogen molecular ion. V.) 452.
- Li, Ting-Yi (Shear flow past a flat plate) 431.
- Libby, Paul A. and Marian Visich jr. (Laminar heat transfer in subsonic effusers) 435.
- — s. Joseph H. Clarke 203.
- Libermann, Paulette (Structures infinitésimales régulières) 417.
- Lidov, M. L. (Linearisierte Lösungen eines Gases) 432.
- Lidskij, V. B. (Oszillationssätze für Differentialgleichungen) 89.
- — s. I. M. Gel'fand 89.
- Liebeck, H. (Prime power groups) 25.
- Lieberman, Gerald J. and George J. Resnikoff (Sampling plans for inspection by variables) 386.
- Lieblein, Julius (Moments of order statistics) 384.
- Lighthill, M. J. and G. B. Whitham (Kinematic waves. I. II.) 209.
- — s. M. B. Glauert 435.
- Linejkin, P. S. (Barokline Schicht des Meeres) 454.
- Linis, Viktors (Univalent functions) 74.
- Link, H. (Kreisringträger) 186.
- Linnik, Ju. V. (Charakteristische Funktionen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen) 129.
- — — and K. A. Rodosskij (N. G. Čudakov) 3.
- Lions, Jacques Louis (Problèmes mixtes) 92; (Dérivée oblique) 100.
- Lipton, S. (Electronic computer) 126.
- Litoff, O. (Commutator subgroup of the linear group) 255.
- Littlewood, J. E. (Real functions) 287.

- Ljapunov, A. A. (Interpretation von Gravitationsbeobachtungen) 454.  
 — — — s. P. S. Alexandroff 4.
- Ljubič, Ju. I. (Potenzen eines Operators) 370.
- Ljubimov, V. A., G. P. Eliseev, V. K. Kosmačevskij und A. V. Kovda (Ionisation der  $\mu$ -Mesonen) 231.
- Ljusternik, L. A. und W. I. Sobolev (Funktionalanalyse) 105.
- Lobachevski, N. (Theory of parallels) 145.
- Locher-Ernst, L. (Nabelpunkte des Ellipsoides) 148; (Dodekaeder und Ikosaeder) 398.
- Lochin, I. F. (Darstellung analytischer Funktion) 314.
- Lockwood, E. H. (Incylic-circumcyclic quadrilaterals) 398.
- Lodge, A. S. (Transformation of equilibrium equations) 183.
- Lohwater, A. J. (Analytic functions) 311.
- Loinger, Angelo (Elettrodinamica classica dell'elettrone puntiforme) 443.
- Łojasiewicz, S. (Formule de Green-Gauss-Ostrogradsky) 297.
- Lombardo-Radice, Lucio (Piani finiti a configurazione di Fano) 143; (Dimensione, invariante topologica) 170.
- Longo, Carmelo (Complessi lineari di piani in  $S_2$ ) 149.
- Longuet-Higgins, H. C. s. J. N. Murrell 231.
- Loos, Henk G. (Laminar boundary layer) 202.
- Lorch, E. R. (Convex bodies in Hilbert space) 106.
- Lorent, Henri (Traces des pas d'Archimède) 1; („Indéfiniment“ mathématique) 241; (Famille de triangles) 396.
- Lorentz, G. G. (Majorants in spaces of integrable functions) 361.
- Łoś, J. (Axiomatic treatment of probability) 127.
- Lotkin, Mark (Nonlinear integral equations) 101; (Accuracy in integration) 379.
- Louhivaara, Ilppo Simo (Erstes Randwertproblem für  $u_{xx} + u_{yy} + qu + f = 0$ ) 347.
- Lovaglia, A. R. (Convex Banach spaces) 356.
- Low, F. E. (Boson-fermion scattering) 219.
- Lowde, R. L. s. R. J. Elliott 239.
- Lozzi, Maria, Raymond Jancel et Théo Kahan (Absorption des ondes électromagnétiques dans les plasmas) 213.
- Lubin, Clarence (Morley's theorem) 396.
- Lucas, René et Julien Guelfi (Ondes de viscosité) 209.
- Lüde, H. v. (Dreikörperproblem) 180.
- Ludloff, H. F. and F. J. Marshall (Stresses in airfoils) 208.
- Lukačs, Eugene (Faà di Bruno's formula) 384.
- Lundberg, Bo (Fatigue life of airplane structures) 208.
- Lundqvist, Stig O. (Vibrational frequencies of a cubic ionic lattice) 236.
- Lüst, R. und A. Schlüter (Hydrodynamische Gleichungen) 197.
- Luttinger, J. M. and W. Kohn (Electrons and holes in perturbed periodic fields) 238.  
 — — — s. W. Kohn 238.
- Lutz, Elisabeth (Approximations diophantiennes) 284.
- Lyness, R. C. (Considerations of gravity) 445.
- Maak, Wilhelm (Weierstraßscher Approximationssatz) 302.
- MacDermott, William N. (Flexible plate supersonic nozzle contours) 206.
- MacDonald, D. K. C. and S. K. Roy (Lattice thermal properties. II.) 235.  
 — William M. (Isotopic spin selection rule) 228.
- Maddowell, Robert (Banach spaces of continuous functions) 109.
- Mackie, A. G. and D. C. Pack (Transonic flow past finite wedges) 205.
- MacLane, Saunders s. Samuel Eilenberg 27.
- MacNerney, J. S. (Stieltjes integrals) 362.
- Magnus, W. s. A. Erdélyi 63.
- Mágori, E. s. P. Gombás 227.
- Magyar, F. (Stromfunktionen für Wirbelsenken) 197.
- Mahajani, G. S. and V. R. Thiruvengkatachar (Problem in symmetric functions) 250.
- Mahler, Kurt (Diophantine approximations) 44.
- Majer, A. s. E. Leontovič 339.
- Majo, A. de (Faisceaux de sphères) 398.
- Maksimov, Ju. D. (Extremalprobleme) 73.
- Malgrange, Bernard (Formes harmoniques) 343.
- Malliavin, Paul (Quasi-analyticité) 54, 300.
- Malyšev, A. V. (Berichtigung zu „Zerlegung der Zahlen in Kuben“) 282.
- Manacorda, Tristano (Torsione di un cilindro) 426.
- Mandelbrojt, Szolem (Transformées de Fourier) 103.
- Mangeron (Manžeron), D. I. (Kinematik materieller Systeme) 155; (Formeln von Somov) 156.
- Manning, P. P. (Chemical valency. XIX. XX.) 233.
- Manwell, A. R. (Singularity of transonic plane flows) 438.
- Maravall Casesnoves, Dario (Aleatorische Stoßbewegungen) 383.
- Marble, Frank E. (Servostabilization of oscillations) 183.
- March, Arthur (Physikalische Erkenntnis) 4.
- Marcus, M. D. (Norm inequality for square matrices) 248.
- Marczewski, E. (Convergence of measurable sets) 293.
- Margenau, H. s. B. Kivel 454.
- Markus, Lawrence (Continuous matrices) 338.
- Markušević (Markuschevitsch), A. I. (Ju. V. Sochockij zur Theorie der analytischen Funktionen) 242; (Geschichte der analytischen Funktionen) 310; (Theorie der analytischen Funktionen) 310.
- Marquard, E. (Brückenschwingungen) 196.
- Marsh, Donald s. Burton W. Jones 19.
- Marshall, Andrew W. and Herbert Goldhamer (Epidemiology of mental disease) 392.  
 — F. J. s. H. F. Ludloff 208.
- Marstrand, J. M. (Circular density of plane sets) 51.

- Martin, Allan D. s. Walter Leighton 354.  
 — M. H. (Propagation of a plane shock.- II.) 207; (Unsteady anisentropic flow) 431.  
 Marty, Claude, Roger Nataf et Jacques Prentki (Spin de noyaux impair-impairs. IV.) 227.  
 Marx, G. s. G. Szamosi 444.  
 Matschinski, Matthias (Fluttuazione in geofisica) 454.  
 Matsumoto, Toshizô (Formules de transformation de Lorentz) 444.  
 Matsushita, Shin-ichi (Fonctions presque périodiques. I. II. III. IV.) 329; (Positive functionals. I.) 365.  
 Matsuyama, Noboru and Shigeru Takahashi (Convergence of gap series) 305.  
 Matthews, P. T. and Abdus Salam (Spin of  $\theta^0$ -meson) 222.  
 Mauldon, J. G. (Composite matrices) 15.  
 Maunoury, François, Marcel Kadosch et Jean Bertin (Section d'éjection des tuyères) 199.  
 Maurin, K. (Randwertaufgaben für stark-elliptische Systeme) 347.  
 Mautner, A. J. s. S. Rushton 391.  
 — F. I. s. L. Ehrenpreis 26.  
 Mavridès, Stamatia (Courant et charge) 446.  
 Maxfield, John and Margaret (Numbers having a given period modulo  $m$ ) 278.  
 — E. and Robert S. Gardner (Linear hypotheses) 139.  
 Maxfield, Margaret s. John Maxfield 278.  
 Maximon, L. C. (Indefinite integrals involving special functions) 307.  
 — — — and G. W. Morgan (Indefinite integrals involving special functions) 307.  
 Mazet, Robert (Mécanique vibratoire) 181.  
 Mazur, S. and W. Orlicz (Summability) 56.  
 McClure, J. W. (Axial ratios in hexagonal crystals) 236.  
 McDowell, M. R. C. s. J. T. Lewis 452.  
 McNown, John S. s. Julien Kravtchenko 439.  
 McShane, E. J. (Dominated-convergence theorem) 293.  
 McWeeny, R. (Valence-bond theory. III.) 233.  
 Mead, D. G. (Differential ideals) 267.  
 Medvedev, Ju. T. (Rekursiv-abzählbare Mengen) 288.  
 Meili, Heino Jürg (Asymptotische Reihen) 67.  
 Melan, E. (Spannungen infolge nicht stationärer Temperaturfelder) 425.  
 Mellon, B. s. A. Charnes 396.  
 Melone, S. (Masse in movimento) 444.  
 Mendlowitz, H. and K. M. Case (Scattering of electrons) 229.  
 Menkes, Hans R. s. Joseph H. Clarke 203.  
 Mergeljan, S. N. (Familien analytischer Funktionen) 68.  
 Merwe, J. H. van der (Linear second order differential equation) 332.  
 Meschkowski, Herbert (Darstellung analytischer Funktionen) 67; (Hilbertsche Räume mit Kernfunktion) 107.  
 Meserve, B. E. (Decision methods) 8.  
 Methée, Pierre-Denis (Transformées de Fourier de distributions) 115.  
 Metropolis, N. s. Eugene H. Herbst 126.  
 Mettler, E. (Schwingungen und Instabilität bei Saiten und Stäben) 429.  
 Meulenbeld, B. s. L. Kuipers 18.  
 Meyer, Burnett (Restricted functions) 54.  
 Meynieux, R. (Quadrilatère de Dixon et Morton) 147.  
 Michael, Ernest (Point-infinite and locally finite coverings) 411.  
 — J. H. (Approximation to a rectifiable curve) 311.  
 Migulin, V. V., S. P. Strelkov und K. F. Teodorčik (Physik der Schwingungen) 181.  
 Mikeladze, M. Š. (Gleichgewicht einer Schale) 190.  
 Mikusiński, J. ( $x^{(n)} + A(t)x = 0$ ) 331.  
 Miller, F. H. s. H. W. Reddick 47.  
 — J. C. P. and M. F. C. Woollett ( $x^3 + y^3 + z^3 = k$ ) 40.  
 Millsaps, Knox (Obukhoff spectrum) 204.  
 Mindlin, R. D. s. H. Deresiewicz 196.  
 Minorsky, Nicolas (Espace paramétrique de l'équation de M. Liénard) 334.  
 Mironov, V. T. (Rationale Interpolationsreihen) 315.  
 Mirsky, L. (Inequality for matrices) 14.  
 Mirzadzanzade, A. Ch. (Temperatur einer zähplastischen Flüssigkeit) 195.  
 Miščenko, E. F. und L. S. Pontrjagin (Periodische Lösungen von Differentialgleichungssystemen) 339.  
 Mitra, Debendranath (Stresses of an elastic disc) 192.  
 Mitrinovitč, Dragoslav (Équation différentielle d'Emden) 333.  
 — D. S. (Équation différentielle du premier ordre) 333.  
 Miyatake, Yoshio (Jordan's and Pais-Uhlenbeck's theory) 449.  
 Miyazawa, Hironari (Strong-coupling theory) 222.  
 — — — and Reinhard Oehme (Decay of mesons into leptons) 450.  
 Mizuno, Katuhiko (Factorset of third obstruction) 415.  
 Modigliani, Franco and Franz E. Hohn (Production planning) 395.  
 Mogi, Isamu s. Kentaro Yano 163.  
 Moh, Shaw-Kwei (Propositional calculus) 11.  
 Moiseiwitsch, B. L. s. J. T. Lewis 452.  
 Mokrišev, K. K. (Kurven im Lobačevskischen Raume) 160.  
 Mollo-Christensen, Erik s. Marten Landahl 200.  
 Molnár, B. s. P. Gombás 227.  
 Monna, A. F. (Einführung des Logarithmus) 64.  
 Montgomery, Deane and Hans Samelson (Fixed points of involutions) 177.  
 Moore, P. G. (Mean square successive difference) 389.  
 — Richard A. (Linear differential equation of second order) 84.  
 Moorty, T. Narayana (Binomial coefficients) 13.  
 Mordell, L. J. ( $ax^3 + ay^3 + bz^3 = bc^3$ ) 40; (Integer so-



- lutions of cubic equations) 278.
- Morehead jr., James C. (Perspective and projective geometries) 418.
- Morelock, J. C. and N. C. Perry (Algebraic surfaces) 151.
- Morgan, A. J. A. (Channel flows with straight sonic line) 205.
- G. W. s. L. C. Maximon 307.
- Morgenstern, Dietrich (Numerische Quadratur) 125; (Differentialgleichung des reinen Geburtsprozesses) 134.
- Morphen, K. und K. Rothe (Strömung im Axiallader) 199.
- Mori, Shinziro (Durchschnitt  $\cap \alpha_x$  der Ideale  $\alpha_x$ ) 266.
- Morimoto, Akihiko s. Jun-ichi Hano 165.
- Morin, Ugo (Algebra astratta, I.) 28.
- Moriya, Mikao (Topologische Körper) 37.
- Morrey jr., Charles B. and James Eells jr. (Harmonic integrals) 352.
- Morrison, D. R. (Bi-regular rings) 30.
- Morse, A. P. s. W. E. Bledsoe 291.
- Moser, Jürgen (Singular perturbation of eigenvalue problems) 333.
- Leo and Max Wyman ( $x^d = 1$  in symmetric groups) 26.
- s. Joachim Lambek 279.
- Mosteller, Frederick s. Robert R. Bush 390.
- Mostow, G. D. (Decomposition theorems for semi-simple groups) 259.
- Mottelson, B. R. s. A. Bohr 229.
- Motzkin, T. S. and J. L. Walsh (Least  $p$ -th power polynomials) 60.
- Mower, Lyman (Electron scattering by a static potential) 447.
- Mügel, Karl Wilhelm (Morphologie periodische Funktionen) 318.
- Muller, Maurice (Probabilité et ses applications) 127.
- Müller, Max (Approximation reeller Zahlen) 44; (Interpolation) 59.
- Müller, R. (Spezielle Integrale) 66.
- W. (In Flüssigkeit bewegter Rumpfkörper) 201.
- — s. H. Richter 199.
- Munn, W. D. (Semi-group algebras) 20.
- — — and R. Penrose (Inverse semigroups) 251.
- Murai, H. (Gitterströmung) 433.
- Murnaghan, Francis D. (Characters of symmetric group) 26.
- Murrell, J. N. and H. C. Longuet-Higgins (Electronic spectra of aromatic molecules, III.) 231.
- Murta, M. N. (Plastic wave propagation) 429.
- Musaeljan, S. A. (Strömung um die Unebenheiten der Erdoberfläche) 454.
- Mycielski, J. (Coloriage des graphs) 178.
- Myškis, A. D. und G. V. Gil' (Aufgabe von N. N. Luzin) 79.
- — — und I. M. Rabinovič (Fixpunktsatz von P. G. Boľ) 178.
- Nagami, Keio (Alexandroff's mapping theorem) 411; (Paracompactness and strong screenability) 411; (Dimension of paracompact Hausdorff spaces) 411.
- Nagata, Jun-iti (Complete metric space) 414.
- Masayoshi (Commutative rings) 266.
- Nagell, Trygve (Diophantine equation) 40.
- Naghdi, P. M. (Bending of thick plates) 188.
- — — and C. Nevin de Silva (Deformation of elastic shells of revolution) 190.
- Najman, P. B. s. I. M. Glazman 85.
- Nakai, Shinzo (Point transformation) 448.
- Nakano, Noboru (Primäridealquotienten) 266; (Idealtheorie im Stiemkeschen Körper) 266.
- Nakayama, Tadasi (Rings with minimum condition, II.) 31.
- Namias, V. (Utilisation des fonctions impulsives  $\delta_+$  et  $\delta_-$  pour l'équation de Wiener-Hopf) 102.
- Namias, V. et Ch. Lafleur (Application des fonctions impulsives  $\delta_+$  et  $\delta_-$  aux relations de Bayard-Bode) 102.
- Narayana, Tadepalli Venkata (Treillis) 127.
- Nardini, Renato (Relazione energetica) 443.
- Nash, John (Path space and Stiefel-Whitney classes) 175.
- Nasitta, Kh. (Dimensionierung dünner Kreisplatten) 187; (Anwendung der Bernoullischen Gleichung auf bewegte Stromfäden) 196.
- Nataf, Roger s. Claude Marty 227.
- Natanson, I. P. (Functions of a real variable) 291.
- Nathan, Jacqueline s. Pierre Boughon 46.
- Natucci, Alpinolo (Enrico Poincaré) 4; (Problema dell'interpolazione) 125.
- Neiss, F. (Determinanten und Matrizen) 246.
- Nejgauz, M. G. (Asymptotik der Funktion  $q(x)$ ) 86.
- Nel'son-Skornjakov, F. B. (Erddämme) 209.
- Nemyckij, V. V. (Stabilität nicht-linearer Systeme) 90.
- Nerpin, S. V. und B. V. Derjagin (Dünne Flüssigkeitsschicht auf fester Unterlage) 234.
- Neumann, B. H. (Groups with finite classes of conjugate subgroups) 252.
- John von (Quantum mechanics) 215.
- — — s. Herman H. Goldstine 207.
- Nevanlinna, Rolf (Differenzierbare Abbildungen) 297.
- Neveu, Jacques (Hypothèse de Feller) 112.
- Nevin de Silva, C. s. P. M. Naghdi 240.
- Nevskij (Newski), B. A. (Nogrammkonstruktionen) 125.
- Newman, Ezra and Peter G. Bergmann (Lagrangians linear in the „velocities“) 446.
- Newman, L. T. s. A. de la Garza 142.
- Marcel K. (Effect of rotatory inertia) 430.
- Morris (Coefficients of certain modular forms) 282; (Modular subgroups) 327.

- Newton, Isaac (*Traité d'optique*) 242.  
 — Roger G. (Electron scattering) 229.  
 Neyman, Jerzy (Inductive inference) 387.  
 Nickel, K. (Tragflügelsysteme in ebener Strömung) 201.  
 Nicol, C. A. and H. S. Vandiver (Partitions of rational integers) 280.  
 Nicolson, M. M. (Surface tension in ionic crystals) 236.  
 Niedenfuhr, F. W. (Aeroelastic reversal of propeller blades) 209.  
 Niehrs, H. (Friedelsche Regel) 237.  
 Nikolenko, L. D. (Oszillation der Lösungen von  $y'' + p(x)y = 0$ ) 332.  
 Nishi, Miao (Dimension of local rings) 265.  
 Nitsche, Joachim (Randwertproblem, III.) 158; (Verbiegung zweifach zusammenhängender Flächenstücke) 405.  
 Noble, B. S. G. Eason 65.  
 — M. E. (Taylor series with gaps) 315.  
 Nobusawa, Nobuo (Extension of Galois theory to division rings) 273.  
 Noi, Salvatore Di (Geometria euclidea sulla sfera) 399.  
 Noll, Walter (Continuity of solid and fluid states) 420.  
 Normal probability function. Tables 383.  
 Northcott, D. G. (Homogeneous ideals) 268.  
 Noshiro, Kiyoshi (Cluster sets of functions) 318.  
 Nyström, E. J. (Kegelflächen) 150.  
 Obašev, S. O. s. G. M. Idlis 240.  
 Oberhettinger, F. s. A. Erdélyi 63.  
 Ocagne, Maurice d' (*Histoire des sciences mathématiques*) 1.  
 Očan, Ju. S. (Operationen über Mengen) 289.  
 Oehme, Reinhard (Scattering of polarized nucleon beams) 228.  
 — s. Hironari Miyazawa 450.  
 Oesterle, Fletcher and Edward Saibel (Effect of lubricant inertia) 430.  
 Ogasawara, Tôzrô (Operator algebras) 367.  
 — — and Kyôichi Yoshinaga (Integration for operators) 367.  
 Ogg, Alexander s. Max Planck 209.  
 Ohtsuka, Makoto (Théorèmes étoilés de Gross) 78; (Ensembles d'accumulation relatifs des transformations) 78.  
 Okamoto, Masashi (Fit of Poisson distribution by index of dispersion) 384.  
 Olejnik, O. A. (Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen) 97.  
 Olevskij, M. N. (Wellengleichung und Wärmeleitungsgleichung) 94.  
 Olsen, Haakon (Outgoing and ingoing waves) 449.  
 Olson, F. R. s. L. Carlitz 250.  
 O'Meara, O. T. (Quadratic forms) 38.  
 Onat, E. T. (Plastic collapse of cylindrical shells) 427.  
 Ono, Akimasa (Stress in rotating disk) 426.  
 Öpik, U. (Layzer approximation) 222.  
 Oppenheim, A. and E. S. Barnes (Ternary quadratic form) 283.  
 — — s. P. H. Diananda 287.  
 Orden, Alex s. George B. Dantzig 394.  
 Orlicz, W. (Operations over the space of integrable functions) 107.  
 — — s. A. Alexiewicz 362.  
 — — s. S. Mazur 56.  
 Ortiz Fornaguera, R. (Schiff's equation) 223.  
 Osima, Masaru (Blocks of group characters) 254.  
 Osterle, J. F. s. W. T. Rouleau 435.  
 Ostmann, Hans-Heinrich (Rekursionsformel in Theorie der Partitionen) 41.  
 Ostrowski, Alexander (Evoluten und Evolventen) 156.  
 — A. M. (Logarithm algorithm) 379.  
 Otradnych, F. P. (V. Ja. Bunjakovskij) 242.  
 Ovsjannikov, L. V. (Linearisierung einer partiellen Differentialgleichung) 93.  
 Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi (Kernel functions) 368.  
 Ozawa, Mitsuru (Solutions of  $\Delta u = Pu$  on Riemann surfaces. II.) 325.  
 Özkan, Asim (Surfaces à courbure moyenne constante) 157.  
 Paasche, Ivan (Moessnerscher Satz) 13.  
 Pachares, James (Distribution of a definite quadratic form) 129.  
 Pack, D. C. s. A. G. Mackie 205.  
 Pagni, Mauro (Equazioni differenziali lineari) 330.  
 Paige, Lowell J. (Loop algebras) 29.  
 Pailloux, H. (Calcul tensoriel) 154.  
 Palamà, Giuseppe (Limitazioni di polinomi) 308.  
 Pan, T. K. (Quotient law of tensors) 154.  
 Panov (Panow), D. Ju. (Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen) 125.  
 Papy, Georges (Algèbre tensorielle) 343.  
 Park, David (Radiations from a spinning rod) 445.  
 Parker, W. V. (Theorem of Roth) 16.  
 Parodi, Maurice (Théorème de Pellet) 18; (Fonction  $\zeta$  de Riemann) 69; (Analyse symbolique et résolution d'une équation fonctionnelle) 121.  
 Pastides, Nicolas (Classes  $C\{M_n\}$  of real functions) 299.  
 Patterson, E. M. (Lie groups) 257.  
 — G. N. s. I. I. Glass 206.  
 Pauc, Christian et Denis Rutovitz (Théorie de Ward-Denjoy) 50.  
 — — Y. S. Otto Haupt 48.  
 Pauncz, R. (Quantum-mechanical method of approximation) 232.  
 Payne, L. R. (Eigenvalues of membranes) 348.  
 — — and H. F. Weinberger (Harmonic and biharmonic problems) 99.  
 Pchakadze, Š. S. (Nichtmeßbare, absolut nulldimensionale Mengen) 295.  
 Peano, Giuseppe Di (In memoria) 243.  
 Pearson, Carl E. (Surge in compressors) 206.

- Pease, Jane s. Robert L. Pease 451.  
 — Robert L. and Jane Pease (Positive definite energy) 451.
- Pennington, W. B. (Ingham summability) 58.
- Pennisi, L. L. (Fredholm integral equations) 101.
- Penrose, R. s. W. D. Munn 251.
- Penzlin, F. (Pseudoskalares Mesonenfeld) 222.
- Peperzak, B. s. H. C. Brinkman 232.
- Percus, J. K. (Quantized linear systems) 225.
- Perel'man, Ja. I. (Unterhaltungsgeometrie) 241.
- Perkins, H. C. (Buckling of columns) 186.
- Perron, Oskar (Periodizitätsbeweise für Kettenbrüche) 47.
- Perry, N. C. s. J. C. Morelock 151.
- Pesin, I. N. (Länge einer unzusammenhängenden Menge) 291.
- Pestel, E. (Analogie zur Torsion prismatischer Stäbe) 185.
- Peterson, R. P. s. R. A. Beaumont 25.
- Petiau, Gérard (Fonctions d'ondes) 215.
- Petropavlovskaja, R. V. (Differentialgleichungssystem) 87.
- Petrov, V. V. und G. M. Ulanov (Indirekte Regelung) 91.
- Petrovskij (Petrowski), I. G. (Partielle Differentialgleichungen) 344.  
 — — — und E. M. Landis (Grenzzyklen von  $dy/dx = M(x, y)/N(x, y)$ ) 334.
- Pflüger, A. (Stabilität des tangential gedrückten Staebes) 186.
- Pham Mau Quân (Schéma fluide-champ électromagnétique) 445.
- Phillips, O. M. (Motion outside turbulent boundary) 205.  
 — R. S. (Semi-groups of operators) 112; (Adjoint semi-group) 112.
- Piccard, Sophie (Bases du groupe symétrique) 25.
- Pignedoli, Antonio (Movimenti di tipo browniano) 230.
- Pilatovskij, V. P. (Elliptische Batterien von Bohrlöchern) 209.
- Pillai, K. C. S. (Test criteria in multivariate analysis) 138.
- Pinl, M. und K. Schuff (Hermiteische Kreise) 149.
- Piskunov, N. S. (Elliptische Gleichung) 100.
- Pisot, Ch. s. J. Dufresnoy 37, 273.
- Pivovarov, A. A. s. A. G. Kolesnikov 454.
- Piza, Pedro A. (Fermat's last theorem) 41.
- Placzek, G. and L. van Hove (Interference effects in neutron scattering cross-section) 237.
- Planck, Max (Thermodynamics) 209.
- Plass jr., H. J. (Nonuniform bending theory) 421.
- Plessat, M. S. s. S. A. Zwick 431.
- Pliškin, Ju. M. (Güte der Regulierung nichtlinearer Systeme) 84.
- Pliss, V. A. (Stabilität im Großen für  $n$  Differentialgleichungen) 337.
- Plotkin, B. I. (Radikale in Gruppen) 21.
- Poczater, J. J. s. W. N. Findley 195.
- Poitou, Georges (Approximations diophantiennes) 285.
- Polak, A. I. (Lineare Funktionalgleichungen) 121.
- Polkinghorne, J. C. (Feynman principle) 219; (Graphs in quantum field theory) 220.
- Pollák, G. (Einfachheit der alternierenden Gruppe) 253; (Gleichungssystem über einem Ringe) 264.
- Položij, G. N. (Torsion von Wellen) 185.
- Pol'skij, N. I. (Näherungsmethoden der Analysis) 120.
- Pontrjagin, L. S. (Glatte Mannigfaltigkeiten) 174.  
 — — — s. E. F. Miščenko 339.
- Popruzenko, J. (Ensembles abstraits) 290; (Ensembles indécomposables. II.) 290.
- Pöschl, Th. (Fließzustand fester Stoffe) 194; (Ritzsche Methode) 376.
- Postley, J. A. (Boolean algebraic equations) 244.
- Postnikov, M. M. (Homotopietheorie) 174.
- Potapov, V. P. (Analytische  $J$ -nichtdehnende Matrixfunktionen) 79.
- Potier, Robert (Fonctions d'onde des corpuscules à spin) 217; (Corpuscules à spin) 217.
- Potok, M. H. N. (Diffraction of wave by a slit) 213.
- Potts, R. B. (Triangular Ising lattice) 239.
- Prachar, K. ( $\sum_{p \leq N} e(xp)$ ) 41; (Teiler einer natürlichen Zahl) 41; (Lösungszahl von Gleichungen in Primzahlen) 41.
- Prager, William (Congestion in transportation problems) 396.  
 — — s. H. G. Hopkins 421.
- Prakash, Prem (Self-superposability in flows) 430.
- Pratt jr., George W. (Antiferromagnetism) 239.
- Prentki, Jacques s. Claude Marty 227.
- Press, Harry and John C. Houbolt (Harmonic analysis) 208.
- Preuß, H. (Kombiniertes Näherungsverfahren) 232; (Zweizentren-Wechselwirkungsintegrale) 232.
- Prévo, J. (Calculs de productivité) 393.
- Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference 126.
- Proceedings of the Symposium on spectral theory and differential problems 119.
- Prodi, Giovanni (Seconda formula di Green) 348.
- Prosperi, Giovanni Maria (Moto di una particella) 444.
- Pucci, Carlo (Problema isoperimetrico) 354.
- Pukánszky, L. (Quasi-unitary algebras) 367.
- Putnam, C. R. (Integrable potentials) 84; (Dynamical systems) 338.
- Quade, W. (Interpolationstheorie reeller Funktionen) 125.
- Quân, Pham Mau s. Pham Mau Quân 445.



- Queysanne, M. et A. Delachet (Algèbre moderne) 263.
- Quine, W. V. (Frege's way out) 5.
- Rabinovič, I. M. s. A. D. Myškis** 178.
- Rademacher, Hans (Transformation of  $\log \mu(\tau)$ ) 327.
- Radok, J. R. M. (Eigenvalue problems of integral equations) 101.
- — — s. B. C. Hoskin 423.
- Ragab, F. M. (Integrals involving Bessel-functions) 66.
- Raher, Walter (Stoß starrer Körper) 180.
- Rainwater, James s. Leon N. Cooper 231.
- Raisbeck, Gordon (Order of magnitude of Fourier coefficients) 304.
- Rao, T. Krishna (Cubic equation) 124.
- Rapoport, I. M. (Eigenwerte Hermitescher Operatoren) 117.
- Ravetz, J. R. (Continuous functions of two real variables) 298.
- Rawer, Karl s. Émile Argence 454.
- Reddick, H. W. and F. H. Miller (Mathematics for engineers) 47.
- Ree, Taikye s. Henry Ey-ring 236.
- Rees, Mina (Digital computers) 380.
- Reich, E. s. A. W. Goodman 74.
- Reid, W. H. (Stretching of material lines in isotropic turbulence) 204.
- Reifenberg, E. R. (Fixed point theorem) 177.
- Reiner, M. (Elasticity law for metals) 421.
- Rembs, Eduard (Verbiegbarkeit konvexer Kalotten) 407.
- Remez, E. R. (Čebysevsche Approximation) 302.
- Remmert, Reinhold s. Hans Grauert 81.
- Renaudie, Josette (Théorie unitaire) 163.
- Repin, I. I. (Folgen von Aggregaten analytischer Funktionen) 316.
- Report of the Physical Society Conference on the Physics of the Ionosphere 213.
- Rešetnik, Ju. G. (Satz von Čebotarev) 278.
- Reshotko, Eli and Clarence B. Cohen (Laminar boundary layer with heat transfer) 203.
- Resnikoff, George J. s. Gerald J. Lieberman 386.
- Riabouchinsky, Dimitri (Mouvements presque linéaires d'un fluide compressible) 433.
- Ribaud, Gustave (Transfert de chaleur) 203.
- Ribeiro, Hugo (Topological groups) 260.
- Ricci, Giovanni (Partizione degli interi) 42; (Serie di potenze non prolungabili) 70; (Serie di potenze) 315.
- Richter, H. und W. Müller (Tschaplyginsche Hodo-graphenmethode) 199.
- Riesz, Frédéric et Béla Sz.-Nagy (Analyse fonctionnelle) 354.
- Ritter, Robert (Baronische Klassen von Biegungsflächen) 159.
- Rivlin, R. S. (Stress-deformation relations for isotropic materials) 421.
- — — and J. L. Ericksen (Stress-deformation relations) 420.
- Rjabinin, A. G. s. A. A. Grib 205.
- Robbins, H. s. C. Derman 382.
- — s. James F. Hannan 387.
- Roberts, A. S. s. G. Abraham 227.
- G. T. (Topologies defined by bounded sets) 105.
- Robinson, A. (Embedding theorem for algebraic systems) 8; (Théorie mathématique des idéaux) 243.
- — s. L. L. Campbell 97.
- Rodden, W. P. (Dihedral effect of flexible wing) 208.
- Rodosskij, K. A. (Verteilung der Primzahlen in arithmetischen Progressionen) 281; (Betragswerte der  $\zeta$ -Funktion) 319.
- — — s. Ju. V. Linnik 3.
- Rogers, K. s. R. P. Bambab 283.
- Rogosinski, W. W. (Inequalities for polynomials) 18; (Linear equations with an infinity of unknowns) 371.
- Rohrbach, Hans und Bodo Volkmann (Asymptotische Dichten) 280.
- Rooney, P. G. (Laplace transformation) 102; (Spaces of Lorentz) 362.
- Roquette, Peter (Konstantenerweiterungen algebraischer Funktionenkörper) 39.
- Rosati, Mario (Funzioni abeliane) 64.
- Rosenstock, Herbert B. (Dynamics of simple lattices) 235.
- Rosenthal, Arthur (Continuity of functions) 300.
- D. s. N. E. Friedmann 185.
- Roshko, Anatol (Wake and drag of bluff bodies) 201.
- Rosina, B. A. (Diametri autocongiugati di una curva algebrica piana) 150.
- Ross, Eleanor L. s. J. Edward Jackson 388.
- Rosser, Barkley (Esquisses de logique) 7.
- Roth, K. F. (Approximations to algebraic numbers) 285.
- Werner (Belasteter Membranstreifen) 424.
- Rothe, K. s. K. Morghen 199.
- Rothstein, Wolfgang (Analytische Mannigfaltigkeiten) 80.
- Rouleau, W. T. and J. F. Osterle (Boundary-layer type flows) 435.
- Roumieu, Charles (Choc raccordant deux écoulements uniformes) 439.
- Roy, Maurice s. Robert Mazet 181.
- S. K. s. D. K. C. MacDonald 235.
- Royster, W. C. ( $p$ -valent functions) 74.
- Rubel, L. A. (Carlson's theorem) 317.
- Rubinow, S. I. (Scattering with tensor forces) 218.
- — — s. Herman Feshbach 225.
- Rubinstein, G. Š. (Äußerster Schnittpunkt einer Achse mit einem Polyeder) 14.
- Rüdiger, D. (Anisotrope prismatische Faltwerke) 184.



- Schubert, Hans und Erich Schincke (Unterschallströmungen) 432.
- Schuff, K. s. M. Pinl 149.
- Schultze, Ernst (Eigenschwingungen von Flugzeugflügeln) 208.
- Schuster, S. s. A. P. Dempster 146.
- Schützenberger, Marcel Paul (Communications métriques) 133.
- Schwartz, J. (De Rham's theorem) 176.
- s. Nelson Dunford 370.
- Schwarz, Hans Rudolf (Stabilité pour des systèmes à coefficients constants) 248.
- (Svare), Stefan (Vergrößerungselemente) 250.
- Scoins, H. I. s. G. S. Rushbrooke 234.
- Scorza Toso, Annamaria (Estremi parziali di una funzione di due variabili) 300.
- Sebastião e Silva, José (Spazi localmente convessi) 358; (Théorie des distributions) 358, 359.
- Sedov, L. I. (Theoretische Gasdynamik) 199.
- Segal, I. E. s. Y. Fourès 368.
- Selmer, Ernst S. (Unbestimmte Gleichung  $X^3 + Y^3 = AZ^3$ ) 278; (Diophantine equation  $\eta^2 = \xi^3 - D$ ) 279.
- Sen Gupta, A. M. (Stresses due to diametral forces on a disk) 188.
- Señkin, E. P. s. A. D. Aleksandrov 406.
- Sergescu, Pierre (D. Pompeiu) 4.
- Serman, D. I. (Verbiegung einer Platte) 188.
- Serre, Jean-Pierre (Domaines de Runge) 79.
- Serrin, James s. David Gilbarg 199.
- Seth, B. R. (Stability of plates) 191.
- Severi, Francesco (Equivalenze sulle varietà algebriche) 401, 402; (Antigeneri d'una varietà algebrica) 402.
- Sexton, Charles R. (Numeri primi gemelli comprese tra 100 000 e 1 100 000) 41.
- Shah, Tao-Shing (Mapping radii of non-overlapping domains) 324.
- Shalit, A. de s. Y. Yeivin 223.
- Shanks, Daniel (Theorems of Fredholm and Frame) 248.
- Shapiro, Victor L. (Localization of trigonometric series) 306.
- Shaw, R. (Virtual masses of interacting fields) 220; (Spinor identities) 230.
- Sheldon, J. W. (Statistical field approximation) 452.
- Shenitzer, Abe (Decomposition of a group) 22.
- Shepherdson, J. C. s. A. Fröhlich 249.
- Sherman, Seymour (Doubly stochastic matrices) 132.
- s. Julius Bendat 369.
- Shield, R. T. (Indentation of a layer) 427.
- Shimony, Abner (Coherence and axioms of confirmation) 244.
- Shirai, Tameharu (Homeomorphic mapping) 414.
- Sibuya, Yasutaka (Points singuliers d'une équation différentielle) 82.
- Siddons, A. W. (Product of series) 56.
- Šidlovskij, A. B. (Werte von ganzen Funktionen) 46.
- Siegel, Carl Ludwig (Morphische Funktionen auf Mannigfaltigkeiten) 82.
- Siebert, Arnold J. F. (Metastable states of finite lattice gas) 453.
- Signorini, Antonio (Optica geometrica) 441.
- Sikorski, R. (Uniformization of functions. II.) 55; (Mazur-Orlicz theory of summability) 57.
- and K. Zarankiewicz (Uniformization of functions. I.) 55.
- Šilov, G. E. (Quasianalytizität) 54; (Satz vom Typus des Phragmén-Lindelöfschen) 93.
- Šilova, G. I. (Minimum mehrfacher Integrale) 353.
- Silva, C. Nevin de s. Nevin de Silva, C. 190.
- José Sebastião e s. Sebastião e Silva, José 358, 359.
- Silver, S. s. A. E. Heins 213.
- Silverman, I. K. (Stress functions for triangular wedges) 192.
- Simoni, Franco de (Equazioni di campo) 445.
- Singer, I. M. (Automorphisms of finite factors) 110.
- Singh, Vikramaditya (Appell polynomials) 309.
- Širkov, D. V. s. N. N. Bogoljubov 449.
- Sisto, F. (Airfoils in cascade) 200.
- Slater, L. J. (Expansions of hypergeometric functions) 309.
- Slobodeckij, L. N. (Potentialtheorie für parabolische Gleichungen) 345.
- Słowikowski, W. (Theory of distributions) 359.
- Slugin, S. N. (Angenäherte Lösung von Operatorgleichungen) 372.
- Smid, Alessandro s. Theogelsomini 142.
- Šmidov, F. I. (Théorie des Integrals) 52.
- Smiley, M. F. (Matrix polynomials) 15.
- Smith, C. D. (Chebyscheff inequalities) 136.
- Šmul'jan, Ju. L. (Störungen von Operatoren) 371.
- Sneddon, N. s. G. Eason 65.
- Sobel, M. s. C. W. Dunnett 385.
- s. Benjamin Epstein 137.
- Sobolev, V. I. s. M. A. Krasnosel'skij 108.
- Sobolew, W. I. s. L. A. Ljusternik 105.
- Sodnomov, B. S. (Nichteffektive Mengen) 10.
- Soucie, R. L. San s. San Soucie, R. L. 34.
- Southwell, R. V. s. D. N. de G. Allen 198.
- Spampinato, Nicolò (Curve e superficie osculatrici principali) 160; (Rappresentazione di un fascio di curve) 400.
- Spanier, E. H. and J. H. C. Whitehead (Duality in homotopy theory) 172; (Fibre spaces) 416.
- Spenske, E. (Elektronische Halbleiter) 238.
- Spitzer, Frank (Random variables) 128.
- Sprott, D. A. (Series of block designs) 385.
- Srinivasan, T. P. (Extensions of measures) 292.
- Stalley, Robert (Schnirelmann density) 281.
- Stanišić, Milomir M. (Vibration of a plate) 428.



- Stanley, Robert L. (Foundations for mathematical logic) 246.
- Stech, Berthold und J. Hans D. Jensen (Kopplungskonstanten) 230.
- Stečkin, S. B. (Trigonometrische Polynome) 304.
- Stein, E. (Special primal of a linear plane complex in  $S_n$ ) 153.
- Marvin L. (Mode shapes and frequencies of wings) 17.
- P. ( $d^2y/dx^2 = F(x)$ ) 379.
- Steinhaus, H. (Géométrie des corps convexes) 166.
- Steinwedel, Helmut (Dipol-Hamiltonfunktion) 221.
- Stekete, J. A. (Formula of H. W. Emmons) 204.
- Stern, Marvin (Thermal stresses in shells) 193.
- Sternberg, Shlomo (Invariant curves) 165.
- Stewartson, K. (A flat plate viscous fluid. I.) 206; (II.) 438.
- Stille, Ulrich (Messen und Rechnen) 179.
- Stinespring, W. F. (Positive functions on  $C^*$ -algebras) 367.
- Stöcker, Claus (Hilfssatz von Bruck und Kleinfeld) 34.
- Stöhr, Alfred s. Hubert Klöter 281.
- Stolt, Bengt (Axiomensysteme, die abstrakte Gruppen bestimmen) 21; (Irreduzible Axiomensysteme, die eine Gruppe bestimmen) 21; (Axiomatik endlicher Gruppen) 21; (Diophantine equation) 40.
- Stone, Gerald s. Edgar Everhart 452.
- Storchi, Edoarda (Criteri di divisibilità per i numeri di Mersenne) 277.
- Straneo, Paolo (A. Einstein) 443.
- Straus, E. G. s. G. E. Forsythe 375.
- Strebel, Kurt (Distanz zweier Enden einer Riemannschen Fläche) 325.
- Strelkov, S. P. s. V. V. Migulin 181.
- Strickler, P. (Reserveapproximation durch Hyperbeln) 393.
- Strother, Wayman L. (Multihomotopy) 171.
- Stuart, J. T. s. N. Gregory 436.
- Stumpf, H. s. E. Fues 235.
- Sturrock P. A. (Electron optics) 441.
- Suchy, Kurt s. Émile Argeñce 454.
- Sugiyama, Shohei ( $d^2y/dx^2 + f(x, y) dy/dx + g(x, y) = P(x)$ ) 83.
- Šulejkin, V. V. (Windwellen in flachem Wasser) 440; (Windwellen im flachen Meer) 440.
- Sumner, D. B. (Convolution transforms) 103.
- Šura-Bura, M. R. (Projektionsspektren) 170.
- Surányi, J. and P. Turán (Interpolation. I.) 300.
- Švarc, A. S. (Abgeschlossene Mengen des Euklidischen Raumes) 170.
- Štefan s. Schwarz, Štefan 250.
- Švejkin, P. I. (Affinvariante Konstruktionen auf Flächen) 160.
- Swan, P. (Zero-energy scattering phase-shifts) 218.
- Sydlér, J.-P. (Configuration de Desargues) 146; (Triangle comme opérateur géométrique) 400.
- Szablewski, W. (Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Grenzschichtströmungen) 437.
- Szabo, E. s. P. Gombás 227.
- Szamosi, G. and G. Marx (Motion of nucleons) 444.
- Szász, G. (Theorem of Birkhoff) 29; (Weakly complemented lattices) 30.
- Szekeres, G. s. N. G. de Bruijn 247.
- Szele, T. (Nilpotent Artinian rings) 264.
- Szendrei, J. (Jacobson radical of a ring) 265.
- Szép, J. (Faktorisierbare Gruppen) 23.
- Szmielew, W. (Abelian groups) 8.
- Szmydt, Z. (Systèmes d'équations différentielles non linéaires) 340.
- Taam, Choy-Tak** (Schlicht functions) 321; (Boundedness of nonlinear differential equations) 334.
- Tables s. Normal probability function 383.
- Tajmanov, A. D. (Abgeschlossene Abbildungen) 169; (Bemerkung zu Ar-
- tikel v. S. Fedorov) 311; (Universalmengen) 413.
- Takahashi, Shigeru s. Noboru Matsuyama 305.
- Y. (Quantization of spinor fields) 219.
- Takeda, Gyo and K. M. Watson (Scattering of fast neutrons) 228.
- Takenouchi, Osamu (Fonctions continues sur un groupe localement compact) 111.
- Tallini, Giuseppe (Sistemi a doppia composizione) 264.
- Tamme, E. E. s. Ju Ja. Kaa-zik 121.
- Tarski, Alfred (Semantischer Wahrheitsbegriff) 4; (Fixpoint theorem) 260.
- Tatarkiewicz, K. (Erreur dans le procédé de Ritz) 376.
- Taunt, D. R. (Isomorphism problem) 24; (Finite groups. I.) 24.
- Taussky, Olga s. Ky Fan 298.
- Taylor, D. G. (Triangles) 397.
- J. C. (Singular integral equations) 223.
- J. Lockwood (Spherical blast wave problem) 207.
- S. J. (Brownian path) 52.
- Teicher, Henry (Positive type polynomials) 249; (Poisson probabilities) 382.
- Teichroew, D. (Statistical tables) 383.
- Temple, G. (Generalized functions) 115; (Weak functions) 115; (Kato's lemma) 371.
- Tenca, Luigi (G. Wallis) 243.
- Teodorčik, K. F. s. V. V. Migulin 181.
- Terleckij, Ja. P. (Isotopenspin und Neutronenladung) 450.
- Terracini, Alessandro (G. Loria) 4.
- Terreaux, Ch. s. K. Bleuler 226.
- Tesson, Fernand (Cinématique des systèmes) 196.
- Thébault, Victor (Belles figures de la géométrie) 397; (Géométrie du tétraèdre) 398; (Isosceles tetrahedron) 398; (Tranchet d'Archimède) 398.
- Theil, H. (Munich business test) 396.



- Thierrin, Gabriel (Demi-groupes) 20.
- Thinius, E. (Inversionsgerät) 126.
- Thirring, Walter E. (Quantenelektrodynamik) 447.
- Thiruvengatachar, V. R. s. G. S. Mahajani 250.
- Thomas, Johannes (Elektronenbahnen) 442.
- R. G. (Collision matrices) 227.
- T. Y. s. B. Bernstein 432.
- Thomée, Vidar (Estimates of Friedrichs-Lewy type) 344.
- Thomson, George W. (Ratio of range to standard deviation) 135.
- W. T. (Conical crater in a sheet) 195.
- Thrall, R. M. (Algebras without unity element) 271.
- Tietz, Horst (Riemannsche Flächen) 77; (Berandete Riemannsche Flächen) 77.
- Tiffen, R. (Thin clamped elastic plates) 422.
- Tillieu, Jaques s. Jean Guy 238.
- Timan, A. F. (Approximation durch algebraische Polynome) 303.
- Timm, U. (Elektrostatische Linsen) 442.
- Tiomno, J. (Mass reversal) 222.
- s. D. Bohm 446.
- Todd, John (Numerische Analysis) 374; (Numerical analysis) 374.
- s. Ky Fan 14, 298.
- Tôgô, Shigeaki (Splittable linear Lie algebras) 270.
- Tolstow, G. P. (Fourierreihen) 61.
- Tomber, M. L. s. R. D. Schaffer 269.
- Tominaga, Hisao (Matrix rings) 31; ( $\pi$ -regular rings) 31; ( $\pi$ -regularity of certain rings) 267.
- Tomita, Minoru (Banach algebras) 365.
- Topp, Chester W. and Fred C. Leone ( $J$ -shaped frequency functions) 136.
- Tornheim, Leonard (Minima of quadratic forms) 283; (Approximation to irrationals) 285.
- Tosi, Armida (Problemi di secondo grado) 150.
- Toso, Annamaria Scorza s. Scorza Toso, Annamaria 300.
- Tóth, Imre (J. Bolyai) 242.
- Trachtenbrot, B. A. (Rekursive Operatoren) 11.
- Traenkle, C. A. (Root systems of algebraic equations) 374.
- Tremmel, E. (Wärmespannungen in Scheiben) 425.
- Tresse, M. A. (Géométries non euclidiennes) 145.
- Tricomi, Francesco G. (Konfluente hypergeometrische Funktionen) 310.
- — — s. A. Erdélyi 63.
- Trigg, Charles W. (Configuration) 398.
- Trilling, L. and E. E. Covert (Pitching oscillations in transonic flight) 439.
- Trošin, G. D. (Interpolation von analytischen Funktionen) 68.
- Truesdell, C. (Hypo-elasticity) 420; (Simplest rate theory of pure elasticity) 420.
- Truitt, Robert Wesley (Free streamline analysis) 438.
- Tsuboi, Teruo s. Shigeo Ozaki 368.
- Tsuji, Kazô (Representation of operator algebra) 367.
- Masatsugu (Function of  $U$ -class) 319; (Remark on „Fuchsian groups“) 327.
- Tuckey, C. O. (Misuse of symmetry) 397.
- Tuganov, N. G. (Kongruenz von Kurven) 162.
- Tugué, Tosiuyuki (Fonctions qui sont définies par l'induction transfinie) 55.
- Tullio Cirillo, Elda de (Trasformazione birazionale) 400.
- Turán, P. s. P. Erdős 301.
- s. J. Surányi 300.
- Tureckij, A. Ch. (Annäherung periodischer differenzierbarer Funktionen) 61.
- Turri, Tullio (Trasformazioni birazionali involutorie) 399; (Trasformazioni involutorie dello spazio) 399.
- Turrittin, H. L. (Ordinary linear homogeneous differential equations) 336.
- Ugodčikov, A. G. (Konforme Abbildung eines Kreises) 126.
- Ulanov, G. M. s. V. V. Petrov 91.
- Ul'janov, P. L. (Fortsetzung von Funktionen) 54; ( $A$ -Integral) 61.
- Umezawa, Toshio (Systems of regular functions) 74.
- Urbach, V. Ju. (Vektorfelder) 448.
- Urbanik, K. (Corps des opérateurs) 115.
- Utz, W. R. (Mean value theorems) 53.
- Vacca, Maria Teresa (Moto di un corpo rigido intorno a un punto fisso) 180.
- Vacher, F. S. (Basis stetiger Funktionen) 109.
- Vaidya, P. C. (Einstein's unified field theory) 446.
- Vajnberg, M. M. (Quadratische Formen in  $L^q(q=2)$ ) 117; (Potentialoperatoren) 119, 372.
- Val, Patrick Du (Transformations) 150.
- Valatin, J. G. (State vector and quantization) 448.
- Vance, P. Elbridge (Unified algebra and trigonometry) 13.
- Vandiver, H. S. s. C. A. Nicol 280.
- Vanhuyse, V. J. (Frequencies of waveguides) 440.
- Vasil'eva, M. V. (Geometrie eines Integrals) 409.
- Vaughan, Hubert (Osculation) 125.
- Vekua, I. N. (Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen) 346.
- Vesentini, Edoardo (Teorema dell'appartenenza) 152.
- Vidav, Ivan (Vermutung von Kaplansky) 109.
- Viguier, G. (Équation d'Abel) 149.
- Vikraman, V. (Radon-Nikodym theorem) 293.
- Villa, Mario (Postulato di Euclide) 145.
- Villamayor, Orlando (Équations, et systèmes linéaires dans anneaux associatifs) 30.
- Vincensini, Paul (B. Gambier) 3; (Reti geodetiche)

- planari) 157; (Quadriques de Lie) 160.
- Vinograd, R. E. (Stabilität eines singulären Punktes) 91; (Charakteristischer Exponent eines regulären Systems) 336.
- Vinogradov, I. M. (Gitterpunkte in Gebieten) 43.
- — — s. P. L. Čebyšev 1.
- Viola, Tullio (Funzioni quasi continue composte) 297; (Funzioni quasi continue) 297.
- Visich jr., Marian s. Paul A. Libby 435.
- Višik, M. I. (Gemischte Randwertaufgaben) 97.
- Viswanathan, K. S. (Elasticity of crystals) 236.
- Vituškin, A. (Problem von Urysohn) 170.
- Vodička, V. (Conduction of fluctuating heat flow) 211; (Heat waves) 211; (Cylinder in periodic temperature field) 212.
- Vogel, W. (Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung) 124.
- Volkman, Bodo (Klasse der Summenmengen) 280.
- — — s. Hans Rohrbach 280.
- Volkov, E. A. (Gleichungen vom elliptischen Typus) 378.
- Volosov, V. M. (Quasihomogene Differentialgleichungen) 84.
- Vorob'ev, Ju. V. (Inhomogene lineare Gleichungen) 371.
- Voss, K. (Totalkrümmung geschlossener Raumkurven) 405.
- Vries, Dirk de (Diophantische Approximationsprobleme) 283.
- Wadhwa, Y. D. (Boundary layer for a parabolic cylinder) 202; (Boundary layer thickness) 435.
- Waerden, Bartel L. van der (Byzantinische Sonnentafel) 1.
- Wagner, Hans (Unstetige Funktion) 300.
- Wahl, H. (Festigkeit von Kegelböden) 191.
- Walker, W. S. s. N. Gregory 436.
- Walsh, J. L. (Jensen's theorem) 19.
- — — s. J. P. Evans 315.
- — — s. T. S. Motzkin 60.
- Wang, A. J. (Deflection of a plastic plate under blast loading) 428.
- Hao (Undecidable sentences) 245.
- Ward, G. N. (Steady high-speed flow) 437.
- Morgan (Vanishing terms in an integral cubic recurrence) 40.
- Warner, Seth and Alexander Blair (Symmetry in vector spaces) 356.
- Warschawski, S. E. (Mean convergence in conformal mapping) 76.
- Wartmann, Rolf (Logarithmische Normalverteilung) 384.
- Washizu, K. (Bounds of eigenvalues) 377.
- Washnitzer, G. (Dirichlet principle for analytic functions) 79.
- Wasow, Wolfgang (Approximations to elliptic differential equations) 378.
- Watson, K. M. s. Gyo Takeda 225.
- Ważewski, T. (Intégrales de branchement des systèmes des équations différentielles) 341.
- Weibull, Waloddi (Parameters of distributions) 135; (Threaded bolts) 194.
- Weidenhammer, F. (Dreh-schwingungen in Kreuzgelenkwellen) 182.
- Weidner, Julius (Ausbreitung elektrischer Wellen um die Erde) 212.
- Weier, Josef (Singularitäten einer Abbildungsschar) 176.
- Weill, Georges (Champ électromagnétique) 212.
- Weinberger, H. F. (Sturm-Liouville theory) 85.
- — — s. L. E. Payne 99.
- Weiner, L. M. (Factorization of homogeneous functions) 249; (Algebra of semimagic squares) 270.
- Weiss, Lionel (Confidence sets for random variables) 140; (Confidence intervals for the mean of a normal distribution) 141.
- Weisse, J. s. F. Sauter 240.
- Wells, Mark B. s. Eugene H. Herbst 126.
- Westpfahl, Konradin (Potentialschale in Teilchenstrom) 233; (Beugung elektromagnetischer Wellen) 440.
- Whaples, G. s. T. H. M. Crampton 36.
- Wheeler, John Archibald (Geons) 224.
- Whitehead, J. H. C. s. E. H. Spanier 416.
- Whitham, G. B. (Dam-break problem) 198.
- — — s. M. J. Lighthill 209.
- Whittle, P. (Stochastic epidemic) 391.
- Whyburn, William M. (Boundary value problem for differential systems) 91.
- Wiegmann, N. A. (Matrices with real quaternion elements) 16.
- Wielandt, Helmut (Sums of eigenvalues) 247.
- Wiener, Norbert (Factorization of matrices) 63.
- Wiezorke, Bernhard (Bestimmung von Mittelwert und Streuung) 135; (Binomialpapier von Mosteller-Tuckey) 140.
- Wigner, Eugene P. (Energy derivative of scattering phase shift) 218.
- Wilhelm, Johannes (Positive Säule einer Glühmentladung) 234.
- Wilkes, E. W. (Stability of a circular tube) 186.
- Wing, G. Milton s. Joseph Lehner 230.
- Winkler, Wilhelm (Measurement of productivity) 393.
- Winogradski, Judith (Équations du champ généralisé d'Einstein-Schrödinger) 445.
- Winter, H. (Hydraulisches Verzweigungsproblem. I.) 440.
- Wintner, Aurel s. Philip Hartman 87, 119, 332.
- Wittrick, W. H. s. Y. C. Fung 189.
- Włodarski, L. (Méthodes continues de limitation. I. II.) 57.
- Woinowsky-Krieger, S. (Clamped plate under bending load) 188; (Biegemomente von Platten) 422.
- Wolfe, Philip s. George B. Dantzig 394.
- Wolfowitz, J. s. J. Kiefer 133.
- Wolfson, Kenneth G. (Primitive rings) 109.



- Womersley, J. R. (Oscillatory motion of a viscous liquid. I.) 439.
- Woods, L. C. (Flow of compressible fluid past curved obstacles) 198; (Unsteady flow through cascade of aerofoils) 200; (Subsonic flow in an annulus) 433; (Flow past curved obstacles) 434; (Oscillating aerofoil) 434.
- Woollett, M. F. C. s. J. C. P. Miller 40.
- Woolston, Donald S. and Harry L. Runyan (Air forces on a wing) 208.
- Worbs, Erich (C. F. Gauss) 3.
- Wright, E. M. (Non-linear difference-differential equation) 342.
- Wu, Wen-Tsün (Pontrjagin classes. IV.) 417.
- Wuest, W. (Absaugeregenschichten) 202.
- Wunderlich, W. (Kreise als Doppelloxodromen) 148; (Evolutoiden der Ellipse) 149; (Loxodromen auf Zylindern) 157; (Satz von Pohlke) 418.
- Wundt, H. (Laminare Grenzschicht an Zylindern) 202.
- Wylie jr., C. R. (Plane Trigonometry) 399.
- Wyman, Max s. Leo Moser 26.
- Yacoub, K. R. (Products of cyclic groups) 252.
- Yamada, Tetsuo s. Hisao Tominaga 267.
- Yano, Kentaro and Isamu Mogi (Kaehlerian manifolds) 163.
- Yeivin, Y. and A. de Shalit (Statistical weights in many-particle systems) 223.
- Yen, Ti (Trace on finite AW\*-algebras) 366.
- Yih, Chia-Shun (Stability of parallel flows) 196.
- Yokota, Ichiro (Cell structure of octanion projective plane. II.) 417.
- Yood, Bertram (Periodic mappings on Banach algebras) 110.
- Yoshinaga, Kyôichi s. Tôzîrô Ogasawara 367.
- Yoshizawa, Taro (System of differential equations) 340.
- Yosida, Kôsaku (Parametrix of stochastic processes) 132.
- Young, J. W. A. (Topics of modern mathematics) 241.
- Yu, Yi-Yuan (Gravitational stresses in a ring) 192.
- Yûjôbô, Zuiman (Pseudo-regular functions) 326.
- Zabronsky, H. (Temperature distribution of heat exchanger) 212.
- Zacher, Giovanni (Elementi modulari in un  $p$ -gruppo) 21.
- Zadiraka, K. V. (Abschätzungen für Eigenwerte einer Randwertaufgabe) 85.
- Žak, I. E. (Satz von Čelidze) 306; (Sätze von Bernštejn und Privalov) 306.
- Zalokar, Julia s. Max Halperin 135.
- Zappa, Guido (Caratteri invarianti di una superficie algebrica) 401.
- Zarankiewicz, K. s. R. Sikorski 55.
- Zariski, Oscar s. Shreeram Abhyankar 272.
- Zasepa, R. s. J. Czechowski 421.
- Zeller, Karl s. Helmut Salzmann 299.
- Zickel, J. (Bending of pre-twisted beams) 422.
- Zink, Robert E. (Measure spaces) 49.
- Žitomirskij, Ja. I. (Cauchysches Problem) 344.
- Zizicas, G. A. (Representation of stress distributions by Mohr circles) 184.
- Zlotnick, Martin (Static aeroelastic design consideration) 209.
- Zoller, K. (Anheizen von Kesseltrommeln) 193; (Dehnungs- und Torsionsschwingungen von umlaufenden Scheiben) 428.
- Zubov, V. I. (Zweite Methode A. M. Ljapunovs) 341.
- Zuckerman, Herbert S. s. Edwin Hewitt 269.
- Zurbrzycki, S. (Inégalités entre les moments des variables aléatoires) 130.
- Zwick, S. A. (Vapor bubbles in liquids) 431.
- Zygmund, A. s. A. P. Calderón 104.